

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si } x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar el valor de **A** para que **f(x)** sea continua. ¿Es derivable para ese valor de **A**?
 b) (1 punto) Hallar los puntos en los que **f'(x) = 0**.
 c) (1 punto) Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de **f(x)** en el intervalo **[4, 8]**

a)

$$\begin{cases} f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3 \cdot 3 + A = 9 + A \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -4 + 10 \cdot 3 - 3^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow 9 + A = 17 \Rightarrow A = 8$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 10 - 2x & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 10 - 2 \cdot 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 4$$

Sea cual sea el valor de **A** la función **no es derivable** en el punto **x = 3**

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 10 - 2x & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \neq 0 \Rightarrow \text{No existe en el intervalo } x < 3 \\ 10 - 2 \cdot x = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \in (3, \infty) \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ -2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Como $f''(x) = -2 \Rightarrow$ En $x = 5 \Rightarrow f(5) = -4 + 10 \cdot 5 - 5^2 = 50 - 29 = 21 \Rightarrow$ *Máximo relativo*

c)

$$\begin{cases} f(4) = -4 + 10 \cdot 4 - 4^2 = 40 - 20 = 20 \\ f(8) = -4 + 10 \cdot 8 - 8^2 = 80 - 68 = 12 \end{cases} \Rightarrow \text{Como } \begin{cases} 20 < 21 \Rightarrow \text{Máximo absoluto en } x = 5 \\ 20 > 12 \Rightarrow \text{Mínimo absoluto en } x = 8 \end{cases}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} 3x + ay + 4z = 6 \\ x + (a+1)y + z = 3 \\ (a-1)x - ay - 3z = -3 \end{cases}$$
 se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores de **a**.

b) (1 punto) Resolverlo para **a = -1**.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & a & 4 \\ 1 & a+1 & 1 \\ a-1 & -a & -3 \end{vmatrix} = -9(a+1) + a(a-1) - 4a - 4(a+1)(a-1) + 3a + 3a \Rightarrow$$

$$|A| = -9a - 9 + a^2 - a - 4(a^2 - 1) + 2a = -8a - 9 + a^2 - 4a^2 + 4 = -3a^2 - 8a - 5$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -3a^2 - 8a - 5 = 0 \Rightarrow 3a^2 + 8a + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 - 60 = 4 \geq 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-8+2}{6} = -1 \\ a = \frac{-8-2}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{3}, -1 \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Compatible Determinado}$

$$\text{Si } a = -\frac{5}{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -\frac{5}{3} & 4 & 6 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 & 3 \\ -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -3 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -5 & 12 & 18 \\ 3 & -2 & 3 & 9 \\ -8 & 5 & -9 & -9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 0 & -18 \\ 3 & -2 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 18 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 36 \\ 3 & -2 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 18 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

$$\text{Si } a = -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

b)

$\text{Si } a = -1 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x + z = 3 \Rightarrow x = 3 - z \Rightarrow -y + z = -3 \Rightarrow y = z + 3 \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (3 - \lambda, 3 + \lambda, \lambda)$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Se dan la recta r y el plano π , mediante $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$; $\pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

Tomados los infinitos puntos R de la recta de su ecuación expresada en paramétricas, hallaremos aquel o aquellos que cumplen la condición impuesta

$$R \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow d(R, \pi) = 1 \Rightarrow \frac{2(4 + 2\lambda) + (1 - \lambda) - 2(2 + 3\lambda) - 7}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\frac{8 + 4\lambda + 1 - \lambda - 4 - 6\lambda - 7}{\sqrt{9}} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} -2 - 3\lambda = 3 \Rightarrow 3\lambda = -5 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{3} \\ -2 - 3\lambda = -3 \Rightarrow 3\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \begin{cases} x = 4 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \\ y = 1 - \left(-\frac{5}{3}\right) \\ z = 2 + 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow R_1 \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -3\right) \\ \\ R_2 \begin{cases} x = 4 + 2 \cdot \frac{1}{3} \\ y = 1 - \frac{1}{3} \\ z = 2 + 3 \cdot \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow R_2 \left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, 3\right) \end{array} \right.$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$; $s \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{cases}$ se pide:

- a) **(1,5 puntos)** Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2, 3, 4)$ y es paralelo a las rectas r y s .
 b) **(0,5 puntos)** Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4, -1, 2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

a) El vector del plano pedido π tiene como vector director al vector \vec{u} que es perpendicular a los vectores directores de las rectas r y s ; lo hallaremos como el producto vectorial de estos dos últimos vectores.

El vector hallado \vec{u} es perpendicular al vector AG , siendo G el punto genérico del plano y por ello su producto escalar es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 2, -2) \equiv (1, 1, -1) \\ y = 4 - x \Rightarrow \vec{v}_s = (1, -1, -2) \equiv (-1, 1, 2) \\ z = 4 - 2x \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + \vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{u} = \vec{v}_\pi = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (3, -1, 2) \\ \vec{AG} = (x, y, z) - (2, 3, 4) = (x-2, y-3, z-4) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{AG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(3, -1, 2) \cdot (x-2, y-3, z-4) = 0 \Rightarrow 3x - 6 - y + 3 + 2z - 8 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x - y + 2z - 11 = 0$$

b) La recta t pedida es perpendicular al plano, debido a ello su vector director es el del plano; el punto B acaba por determinarla

$$\vec{v}_t = \vec{v}_\pi = (3, -1, 2) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el punto $P(2, 1, -1)$, se pide:

- a) (0,5 puntos) Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3, 0, 2)$.
 b) (1,25 puntos) Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x - 1 = y - 1 = z$.
 c) (1,25 puntos) Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x + y + z = 3$.

a) El punto dado Q es el punto medio entre punto P y el pedido P'

$$\begin{cases} 3 = \frac{2 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 2 + x_{P'} = 6 \Rightarrow x_{P'} = 4 \\ 0 = \frac{1 + y_{P'}}{2} \Rightarrow 1 + y_{P'} = 0 \Rightarrow y_{P'} = -1 \Rightarrow P'(4, -1, 5) \\ 2 = \frac{-1 + z_{P'}}{2} \Rightarrow -1 + z_{P'} = 4 \Rightarrow z_{P'} = 5 \end{cases}$$

b) Hallaremos un plano π' que contiene a P y que es perpendicular a la recta dada r , por ello el vector director de esta recta es el vector del plano; vector que es perpendicular al vector PG , siendo el producto escalar de ambos, al ser perpendiculares, nulo y la ecuación del plano buscada.

El punto de intersección Q' del plano hallado y la recta r es el punto medio entre P y P''

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi'} = \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (2, 1, -1) = (x-2, y-1, z+1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{\pi'} \perp \vec{PG} \Rightarrow \vec{v}_{\pi'} \cdot \vec{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1, 1, 1) \cdot (x-2, y-1, z+1) = 0 \Rightarrow x-2 + y-1 + z+1 = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + y + z - 2 = 0$$

Punto de intersección Q de la recta r con el plano π

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow (1 + \lambda) + (1 + \lambda) + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 2 - 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow Q' \begin{cases} x = 1 + 0 \\ y = 1 + 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{2 + x_{P''}}{2} \Rightarrow 2 + x_{P''} = 2 \Rightarrow x_{P''} = 0 \\ 1 = \frac{1 + y_{P''}}{2} \Rightarrow 1 + y_{P''} = 2 \Rightarrow y_{P''} = 1 \Rightarrow P''(0, 1, 1) \\ 0 = \frac{-1 + z_{P''}}{2} \Rightarrow -1 + z_{P''} = 0 \Rightarrow z_{P''} = 1 \end{cases}$$

Continuación del Problema 1 de la Opción B

c) Hallaremos una recta s , perpendicular al plano π , cuyo vector director es el del plano, que conjuntamente con el punto P definen la recta buscada

El punto de intersección Q'' de la recta s hallada con el plano π es el punto medio de P y P'''

$$\vec{v}_s = \vec{v}_\pi = (1, 1, 1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

Intersección Q'' entre la recta s y el plano π

$$(2 + \alpha) + (1 + \alpha) + (-1 + \alpha) = 3 \Rightarrow 3\alpha + 2 = 3 \Rightarrow 3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow Q'' \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3} \\ y = 1 + \frac{1}{3} \\ z = -1 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{3} = \frac{2 + x_{P''}}{2} \Rightarrow 6 + 3x_{P''} = 14 \Rightarrow 3x_{P''} = 8 \Rightarrow x_{P''} = \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} = \frac{1 + y_{P''}}{2} \Rightarrow 3 + 3y_{P''} = 8 \Rightarrow 3y_{P''} = 5 \Rightarrow y_{P''} = \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} = \frac{-1 + z_{P''}}{2} \Rightarrow -3 + 3z_{P''} = -4 \Rightarrow 3z_{P''} = -1 \Rightarrow z_{P''} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P''' \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función $f(x) = x^2 \sen x$, se pide:

a) (1 punto) Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.

b) (1 punto) Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.

c) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$.

Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

a) Nos apoyamos en el **Teorema de Bolzano**

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f(b)]$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = 0$$

La función $f(x) = x^2 \sen x$ es continua en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ y toma los valores siguientes en los extremos

$$\text{del intervalo } \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 = \frac{\pi^2}{4} > 0 \\ f(\pi) = \pi^2 \cdot \sen(\pi) = \pi^2 \cdot 0 = 0 \end{cases} \text{ Como los signos son iguales } [\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f(b)], \text{ entonces NO EXISTE, al menos, un punto } c \in (a, b) \text{ tal que}$$

$f(c) = 0$

$$f(c) = 0$$

Continuación del Problema 2 de la opción B

b)

$$I = \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx = -x^2 \cos(x) - \int [-\cos(x)] 2x dx = -2x \cos(x) + 2 \int x \cos(x)$$

$$\begin{cases} x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du \\ \operatorname{sen}(x) dx = dv \Rightarrow v = \int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) \end{cases} \quad \begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ \cos(x) dx = dv \Rightarrow v = \int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

$$I = -x^2 \cos(x) + 2 \left[x \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x) dx \right] = -2x \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) - 2 [-\cos(x)]$$

$$I = -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(x) dx &= \left[-x^2 \cos(x) \right]_0^{\pi} + 2 \left[x \operatorname{sen}(x) \right]_0^{\pi} + 2 \left[\cos(x) \right]_0^{\pi} = \\ &= \left[-\pi^2 \cos(\pi) - \{ -0^2 \cos(0) \} \right] + 2 \left[\pi \operatorname{sen}(\pi) - 0 \operatorname{sen}(0) \right] + 2 \left[\cos(\pi) - \cos(0) \right] = \\ &= \left[-\pi^2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \right] + 2 \left[\pi \cdot 0 - 0 \cdot 0 \right] + 2 \left[-1 - 1 \right] = (\pi^2 - 4) u^2 \end{aligned}$$

c)

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}(x) + x^2 \cos(x) \Rightarrow \begin{cases} f(\pi) = \pi^2 \operatorname{sen}(\pi) = \pi^2 \cdot 0 = 0 \\ m = f'(\pi) = 2\pi \operatorname{sen}(\pi) + \pi^2 \cos(\pi) = 2\pi \cdot 0 + \pi^2 \cdot (-1) = -\pi^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$m_n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{\pi^2} (x - \pi) \Rightarrow y = \frac{1}{\pi^2} x - \frac{1}{\pi} \Rightarrow \pi^2 y = x - \pi \Rightarrow x - \pi^2 y - \pi = 0$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$, vectores columna. Si $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -1$, $\det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) = 3$
 $\det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -2$, calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

a) (0,5 puntos) $\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b})$

b) (0,75 puntos) $\det(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, -\vec{d})$.

c) (0,75 puntos) $\det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d})$

a)

$$\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{a} & 3\vec{d} & \vec{b} \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{d} & \vec{b} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{d} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 3$$

b)

$$\begin{aligned} \det(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, -\vec{d}) &= \begin{vmatrix} \vec{a} - \vec{b} & \vec{c} & -\vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{c} & -\vec{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\vec{b} & \vec{c} & -\vec{d} \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -\vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix} = \\ &= (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix} = 2 + 1 \cdot (-2) = 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}) &= \begin{vmatrix} \vec{d} + 3\vec{b} & 2\vec{a} & \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{d} & 2\vec{a} & \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\vec{b} & 2\vec{a} & \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{d} & 2\vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{d} & 2\vec{a} & -3\vec{a} + \vec{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\vec{b} & 2\vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\vec{b} & 2\vec{a} & -3\vec{a} + \vec{d} \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{d} & \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{d} & 2\vec{a} & -3\vec{a} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{d} & 2\vec{a} & \vec{d} \end{vmatrix} + 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\vec{b} & 2\vec{a} & -3\vec{a} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\vec{b} & 2\vec{a} & \vec{d} \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{d} & \vec{b} \end{vmatrix} + 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} \vec{d} & \vec{a} & \vec{a} \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{d} & \vec{a} & \vec{d} \end{vmatrix} + 3 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{a} \end{vmatrix} + 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{d} \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1)(-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{d} \end{vmatrix} + 2 \cdot (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{d} \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1) + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{d} \end{vmatrix} = -2 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = -2 + 6 = 4 \end{aligned}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dado el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x - 2z = 2 \\ ax - y + z = -8 \\ 2x + az = 4 \end{cases}$$
 se pide:

- a) **(1,5 puntos)** Discutir el sistema según los valores de **a**.
 b) **(0,5 puntos)** Resolverlo para **a = -5**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1+2a \\ 0 & 0 & a+4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1+2a \\ 0 & a+4 \end{vmatrix} = -a-4 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -a-4 = 0 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \{-4\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $a = -4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas}$$

$\Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

b)

Si $a = -5 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & -5 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow -z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow -y - 9 \cdot 0 = 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x - 2 \cdot (-2) = 2 \Rightarrow$$

$x - 2 \cdot 0 = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (2, -2, 0)$