OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si} \quad x<0 \\ xe^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f y calcular $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b) (0.5 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en $x = 2$.

c) (1.5 puntos) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

SOLUCIÓN:

a) Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, *vemos que la función está perfectamente definida y por tanto es continua,* $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ *Así pues, el único problema que podría existir es en* $x = 0$. *Para que una función sea continua en* $x = x_0$ *ha de verificarse que* $f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

Así:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \cdot e^0 = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{\ln 1}{1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Luego } f \text{ es continua en } x=0 \text{ y por tanto } f(x) \text{ es continua}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aplicamos L'Hôpital}}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{-1}{1-x}}{-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

b) En primer lugar, $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$x_0 = 2$

$f(x_0) = 2e^{-2}$

$f'(x_0) \Rightarrow f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(2) = e^{-2} - 2 \cdot e^{-2} \Rightarrow f'(2) = -e^{-2}$

Luego:

$y - (2e^{-2}) = -e^{-2}(x-2) \Rightarrow \boxed{y = -e^{-2}x + 4e^{-2}}$

c) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$:

Las resolvemos por separado:

- $-\int_{-1}^{0} -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}dx = \left.\dfrac{-\ln^2(1-x)}{2}\right]_{-1}^{0} \underset{Barow}{=} 0 - \dfrac{-\ln^2(2)}{2} = \dfrac{\ln^2(2)}{2}$
- $\int_0^1 x\cdot e^{-x}\,dx$: *(aplicamos el método de integración por partes)*

$$\left\{\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{array}\right\}$$

$$\int_0^1 x\cdot e^{-x}\,dx = -x\cdot e^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx = \left(-x\cdot e^{-x} - e^{-x}\right)\Big]_0^1 \underset{Barow}{=} \left(-1\cdot e^{-1} - e^{-1}\right) - \left(0\cdot e^0 - e^0\right) = 1 - \frac{2}{e}$$

Finalmente: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \boxed{\dfrac{\ln^2(2)}{2} + 1 - \dfrac{2}{e}}$

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

a) (1.5 puntos) Despeje X en la ecuación matricial $X\ (CD)^{-1} = A + X\ (D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A, B, C, D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

b) (1.5 puntos) Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB = A$.

SOLUCIÓN:

a)

$$X(CD)^{-1} = A + X\left(D^{-1}C^{-1} - B\right) \Rightarrow \cancel{XD^{-1}C^{-1}} = A + \cancel{XD^{-1}C^{-1}} - XB \Rightarrow XB = A \Rightarrow \boxed{X = AB^{-1}}$$

b) En primer lugar despejamos la matriz: $YB = A \Rightarrow Y = AB^{-1}$. *A continuación hallamos la inversa de B*

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\left(B^t\right)^{adj}$$

$$|B| = 2$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) (0.5 puntos) Que π_1 y π_2 sean paralelos.
b) (0.5 puntos) Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.
c) (1 punto) Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

SOLUCIÓN:

$\vec{n}_1 = (a, \quad 1, \quad -1)$ *y* $\vec{n}_2 = (1, \quad a, \quad 1)$ *son los vectores normales de* π_1 *y* π_2 *respectivamente.*

a) Para que dos planos sean paralelos sus vectores normales han de ser iguales o proporcionales. Así: $\vec{n}_1 \propto \vec{n}_2 \Leftrightarrow \quad a = -1$
b) Para que sean perpendiculares, sus vectores normales han de ser ortogonales.

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow (a, \quad 1, \quad -1)\cdot(1, \quad a, \quad 1) = 0 \Rightarrow a + a - 1 = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

c) el vector director de la recta intersección de los dos planos es

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (1+a)\vec{i} - (1+a)\vec{j} + (a^2 - 1)\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_r = (a+1, \quad -a-1, \quad a^2-1)$$

$$\vec{v}_r = (a+1, \quad -a-1, \quad a^2-1) \approx (1, \quad -1, \quad a-1)$$

Que la recta sea perpendicular al plano implica que $\vec{v}_r \propto \vec{n}_\pi = (1, \quad -1, \quad 0)$. *Por tanto* $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

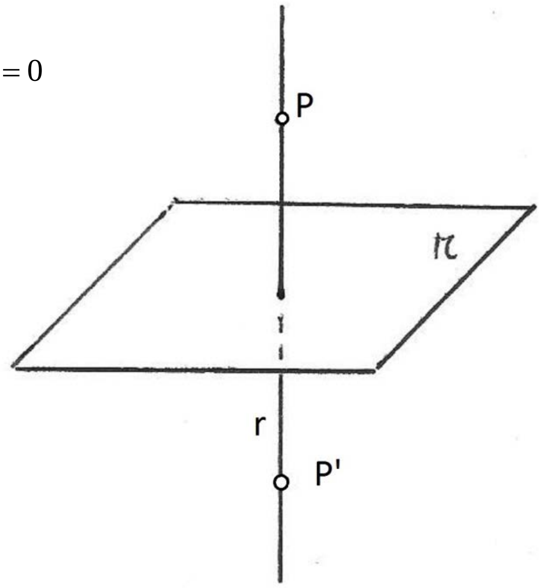
Dado el punto $P(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0, 2, -1)$, $B(1, -3, 0)$ y $C(2, 1, 1)$.

SOLUCIÓN:

En primer lugar calculamos el plano definido por los tres puntos:

$$\pi \equiv \begin{cases} A \in \pi \\ \vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (1, \quad -5, \quad 1) \\ \vec{v}_2 = \overrightarrow{AC} = (2, \quad -1, \quad 2) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -9x+9z+9=0 \approx x-z-1=0$$



Construimos la recta perpendicular a π *que pase por P. Así:*

$$P(2,1,-1), \quad r \equiv \begin{cases} P(2,\ 1,\ -1) \\ \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (1,\quad 0,\quad -1) \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1 \\ z = -1-\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Intersecamos la recta y el plano π *para obtener el punto Q que será el punto medio entre P y P´. Así:*

$$r \cap \pi \Rightarrow (2+\lambda)-(-1-\lambda)-1=0 \Rightarrow 2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-1.$$

Luego el punto Q es $(1,\quad 1,\quad 0)$

Finalmente:

$$\frac{P+P'}{2} = Q \Rightarrow P' = 2Q-P \Rightarrow P'(0,\quad 1,\quad 1)$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + y + mz = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z = 4 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 2$.

SOLUCIÓN:

Las matrices asociadas al sistema son:

$$A^* = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m+1 & 2 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{matrix}\right.\right);$$

Para discutir el sistema en función del parámetro a nos apoyaremos en el teorema de Rouché-Fröbenius que se basa en comparar los rangos de A y A permitiéndonos clasificar dicho sistema. En primer lugar, el rango de una matriz es el número de filas (coincidente con el número de columnas) linealmente independientes. Por tanto* $rgA \le rgA^* \le 3$. *Además, gracias a las propiedades de los determinantes, sabemos que* $|A|$ *es 0 si y sólo si en A alguna fila (o columna) es combinación lineal de las otras. Así que nos ayudaremos de determinantes para estudiar el rango de las matrices:*

$|A| = m^2 - 4 \Rightarrow m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = -2,\ m = 2$

a) Discutimos:

- *Si* $m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, *entonces* $|A| \ne 0$, *lo que implica que* F_1, F_2 *y* F_3 *son linealmente independientes y por tanto* $\text{rg}(A) = 3 \underset{\substack{\uparrow \\ rgA \le rgA^*}}{=} rg(A^*)$ *Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es* ***Compatible Determinado***.
- *Si* $m = -2$

  Rango de la matriz A

$$A^* = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{matrix}\right.\right) \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{hay al menos una combinación lineal}$$

$\Rightarrow rgA \ne 3$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \ne 0 \Rightarrow$ *Luego* F_2 *y* F_1 *son linealmente independientes y por tanto* $rgA = 2$

***Rango de la matriz Ampliada**:*
No vemos ninguna combinación lineal clara así que hallamos menores de orden 3:

$|A|=0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}\neq 0$ *luego existe no combinación lineal y por tanto* $rgA^*=3$

*Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es **Incompatible**.*

- *Si* $m=2$

Rango de la matriz A

$$A^*=\left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{matrix}\right.\right) \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \textit{hay al menos una combinación lineal} \Rightarrow rgA\neq 3$$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow$ *Luego* F_2 *y* F_1 *son linealmente independientes y por tanto* $rgA=2$

***Rango de la matriz Ampliada**:*
No vemos ninguna combinación lineal clara así que hallamos menores de orden 3:

$|A|=0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0$ *y* $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}=0$ *,luego existe combinación lineal y por tanto* $rgA^*\neq 3$ *y como* $rgA=2$ *concluimos que* $rgA^*=2$

*Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es **Compatible indeterminado**.*

b) $m=0$

$$A^*=\left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{matrix}\right.\right)$$

Estamos en el caso $m\in\mathbb{R}-\{-2,2\}$ *, luego por el apartado **a)**el sistema es Compatible Determinado, por tanto, resolviendo por Cramer:*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{8}{-4}=-2 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{-28}{-4}=7 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{-14}{-4}=\frac{7}{2}$$

Solución: $(x,y,z)=\left(-2,7,\frac{7}{2}\right)$

c) $m=2$, *por el apartado* ***a)*** *sabemos que el sistema es compatible indeterminado. Debemos eliminar una ecuación y parametrizar una incógnita. Así:*

$$\begin{cases} 3x+y+2z=1 \\ x-y+2z=-2 \\ 5x+3y+2z=4 \end{cases} \equiv \begin{cases} 3x+y+2z=1 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}.$$ *Parametrizamos z. Es decir* $z=\lambda$

$$\begin{cases} 3x+y+2\lambda=1 \\ x-y+2\lambda=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=1-2\lambda \\ x-y=-2-2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}}_{B}\left|\begin{matrix} 1-2\lambda \\ -2-2\lambda \end{matrix}\right.\right)$$

Aplicando el método de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1 \\ -2-2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{1+4\lambda}{-4}=-\lambda-\frac{1}{4} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-2\lambda \\ 1 & -2-2\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-7-4\lambda}{-4}=\lambda+\frac{7}{4}$$

Solución: $$\begin{cases} x=-\lambda-\dfrac{1}{4} \\ y=\lambda+\dfrac{7}{4} \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Se consideran los puntos $A(0,5,3)$, $B(0,6,4)$, $C(2,4,2)$ y $D(2,3,1)$ y se pide:

a) (1 punto) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.

b) (1 punto) Calcular el área de dicho paralelogramo.

c) (1 punto) Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.

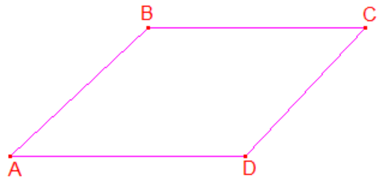
SOLUCIÓN:

a) *Hay varias maneras de comprobar que cuatro puntos son coplanarios. Una de ellas, es construir el plano que contenga a tres de los puntos y comprobar que el cuarto punto también pertenece a dicho plano. Otra manera más sencilla, es obtener los vectores* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *y* $\overrightarrow{AD}$ *y comprobar que uno de ellos es combinación lineal de los otros. Para ello, nos ayudamos del determinante formado por los tres vectores, pues sabemos que si es 0, existe combinación lineal.*

$\overrightarrow{AB}=(0,\ \ 1,\ \ 1)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{AC}=(2,\ \ -1,\ \ -1)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{AD}=(2,\ \ -2,\ \ -2)$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, *luego, efectivamente existe combinación lineal y por tanto los cuatro puntos son coplanarios.*

Para comprobar que es un paralelogramo basta con comprobar que se verifica $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *o* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$



$\overrightarrow{AB} = (0, \quad 1, \quad 1) = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BC} = (2, \quad -2, \quad -2) = \overrightarrow{AD}$

Luego efectivamente es un paralelogramo.

b) *El área del paralelogramo puede calcularse como:*

$$\text{Área} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0+4+4} = \boxed{2\sqrt{2}\,u^2}$$

c)*El punto medio del paralelogramo es el punto medio de una de sus diagonales, es decir,*

$$M = \frac{A+C}{2} = \left(1, \quad \frac{9}{2}, \quad \frac{5}{2}\right)$$

El lugar geométrico pedido es la recta perpendicular al plano que contiene el paralelogramo ($\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_\pi}$ *) y que pasa por el punto M.*

Obtenemos el vector normal del plano: $\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, \quad 2, \quad -2) \sim (0, \quad 1, \quad -1)$.

Finalmente, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{9}{2} + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \dfrac{5}{2} - \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.

a) (1 punto) Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y además verifica: $f(1) = 3$; $f'(1) = 1$; $f''(1) = 4$.

b) (1 punto) Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 5, \quad \int_0^2 g(x)\,dx = 14.$$

SOLUCIÓN:

a) *En primer lugar debemos determinar el grado del polinomio. Que* $f'''(x)=12$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$ *significa que es constante, por tanto* $f''(x)$ *es de grado uno ,* $f'(x)$ *es de grado dos, luego* $f(x)$ *es de grado tres. Así el polinomio pedido es* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *.*
Además:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$f''(x)=6ax+2b$$
$$f'''(x)=6a$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=3\Rightarrow a+b+c+d=3 \\ f'(1)=1\Rightarrow 3a+2b+c=1 \\ f''(1)=4\Rightarrow 6a+2b=4 \\ f'''(x)=12\Rightarrow 6a=12 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} a=2 \\ 12+2b=4\Rightarrow b=-4 \\ 6-8+c=1\Rightarrow c=3 \\ 2-4+3+d=3\Rightarrow d=2 \end{array}$$

El polinomio pedido es $\boxed{f(x)=2x^3-4x^2+3x+2}$.

b) *En primer lugar debemos determinar el grado del polinomio. Que* $g''(x)=6$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$ *significa que es constante, por tanto* $g'(x)$ *es de grado uno , luego* $g(x)$ *es de grado dos.*
Así el polinomio pedido es $g(x)=ax^2+bx+c$ *.*

$$g'(x)=2ax+b; \quad g''(x)=2a\Rightarrow 2a=6\Rightarrow a=3$$

$$\int_0^1\left(3x^2+bx+c\right)dx=\left.\frac{3x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_0^1 \underset{Barrow}{=} \left(1+\frac{b}{2}+c\right)-0=1+\frac{b}{2}+c\Rightarrow 1+\frac{b}{2}+c=5 \quad (1)$$

$$\int_0^2\left(3x^2+bx+c\right)dx=\left.\frac{3x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_0^2 \underset{Barrow}{=} (8+2b+2c)-0=8+2b+2c\Rightarrow 8+2b+2c=14 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2), obtenemos: $b=-2$ *y* $c=5$*. Por tanto:*

$\boxed{g(x)=3x^2-2x+5}$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x=0$ y en $x=1$ de $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\le 0 \\ |x\ln x| & \text{si } x>0 \end{cases}$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

En primer lugar vamos a deshacer el valor absoluto:

$$|x\cdot\ln x| \Rightarrow x\cdot\ln x=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ \ln x=0\Rightarrow x=1 \end{matrix}$$

Así:

$$|x\cdot\ln x|=\begin{cases} -x\cdot\ln x & si \quad 0<x<1 \\ x\cdot\ln x & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$

Luego $f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad 0\le x \\ -x\cdot\ln x & si \quad 0<x<1 \\ x\cdot\ln x & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

Para que una función sea continua en $x=x_0$ *ha de verificarse que* $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$. *Así:*

$x=0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0\cdot\ln 0=0\cdot\infty \ ind \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{resolvemos la indeterminación:}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-x\cdot\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{-x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aplicamos L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

Luego f es continua en $x=0$.

$x=1$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1\cdot 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1\cdot\ln 1=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1\cdot\ln 1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Luego } f \text{ es continua en } x=1 .$$

Estudiemos la derivabilidad. Para que una función sea derivable $x=x_0$, *además de ser continua en* $x=x_0$ *debe verificarse que* $f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$. *Ya hemos visto que en ambos puntos es continua. Estudiemos ahora las derivadas parciales, para ello derivamos la función:*

$$f'(x)=\begin{cases}0 & si \quad 0<x \\ -\ln x-1 & si \quad 0<x<1 \\ \ln x+1 & si \quad x>1\end{cases}$$

$x=0$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+)=-\ln 0^+-1=\infty \\ f'(0^-)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{ Por tanto f es no es derivable en } x=0 \text{ .}$$

$x=1$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^+)=\ln 1+1=1 \\ f'(1^-)=-\ln 1-1=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{ Por tanto f es no es derivable en } x=1 \text{ .}$$