# Límite de una función

## Idea intuitiva de límite

El límite de la función f(x) en el punto $x_0$, es el valor al que se acercan las imágenes (las y) cuando los originales (las x) se acercan al valor $x_0$. Es decir el valor al que tienden las imágenes cuando los originales tienden a $x_0$.

Vamos a estudiar el **límite de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x_0 = 2$.**

| x | f(x) |
|---|---|
| 1,9 | 3,61 |
| 1,99 | 3,9601 |
| 1,999 | 3,996001 |
| ... | ... |
| ↓ | ↓ |
| 2 | 4 |
| x | f(x) |
| 2,1 | 4.41 |
| 2,01 | 4,0401 |
| 2,001 | 4,004001 |
| ... | ... |
| ↓ | ↓ |
| 2 | 4 |

Tanto si nos acercamos a 2 por la izquierda (valores menores que 2) o la derecha (valores mayores que 2) las imágenes se acercan a 4.

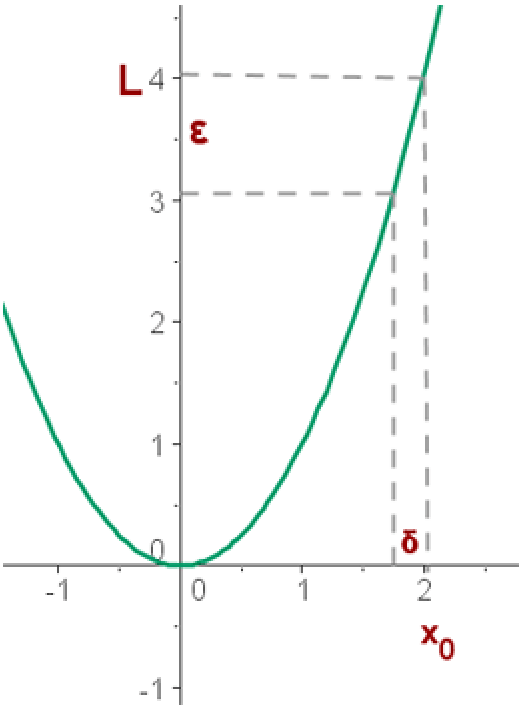
**Se dice que el límite cuando x tiende a 2 de la función $f(x) = x^2$ es 4**

**Se escribe** $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

**Def. de límite de una función en un punto**

Se dice que la función f(x) tiene como límite el número L, cuando x tiende a $x_0$, si fijado un número real positivo ε , mayor que cero, existe un numero positivo δ dependiente de ε , tal que, para todos los valores de x distintos de $x_0$ que cumplen la condición $|x - x_0| < \delta$ , se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$




**Límites laterales**

También podemos calcular el límite en un punto **a** tomando valores cada vez más próximos a **a** por su derecha (valores mayores que **a**) o por su izquierda (valores menores que **a**), hablamos entonces de límites laterales en el punto x: límite cuando x tiende a **a** por la derecha y por la izquierda.

La definición es la siguiente:

Diremos que el límite de una función f(x) cuando x tiende hacia a por la izquierda es L, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a+\delta, a)$ , entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \ x \in (a + \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

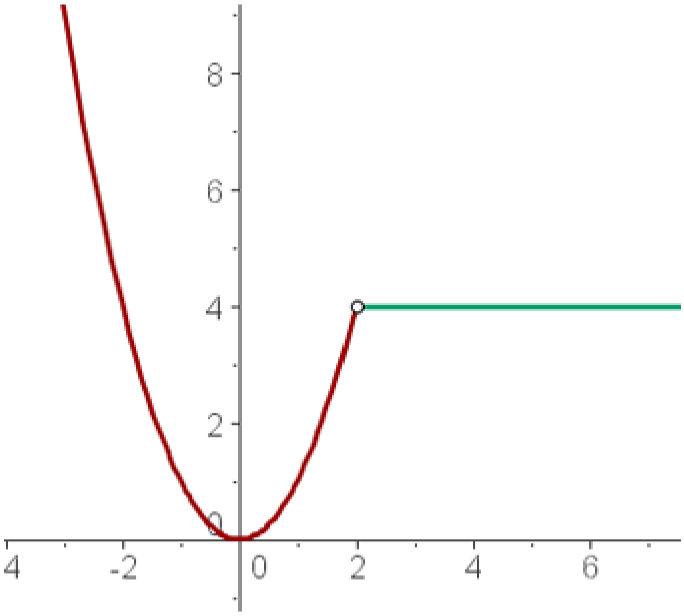
Diremos que el límite de una función f(x) cuando x tiende hacia a por la derecha es L , si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in$ $(a, a + \delta)$, , entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \ x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

**El límite de una función en un punto si existe, es único. Para que exista el límite de una función en un punto, tienen que existir los límites laterales en ese punto y coincidir.**

**<u>Ejemplo:</u>**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$




$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} 4 = 4$$

En este caso vemos que el límite tanto por la izquierda como por la derecha cuando x tiende a 2 es 4.

**El límite de la función es 4 aunque la función no tenga imagen en x = 2.**

Para calcular el límite de una función en un punto, no nos interesa lo que sucede en dicho punto sino a su alrededor.

**<u>Ejemplo</u>**

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} & x < 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \\ 1 & \text{si} & x > 0 \end{cases}$$

Hallar $\lim_{x \to 0} f(x)$.

$$\lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

Como no coinciden los límites laterales, la función no tiene límite en x = 0.

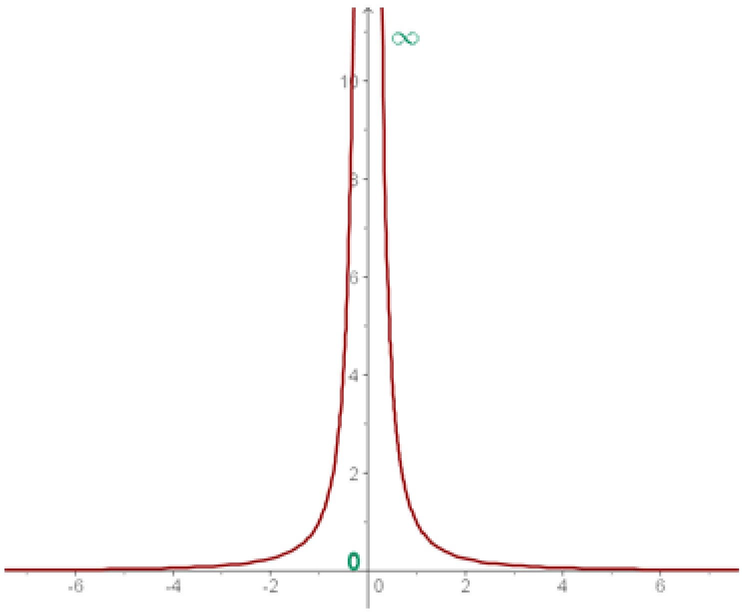
# Limites infinitos

A la hora de calcular el límite de una función en un punto también podemos obtener como resultado +∞ o - ∞

## Límite más infinito

**Ejemplo:**

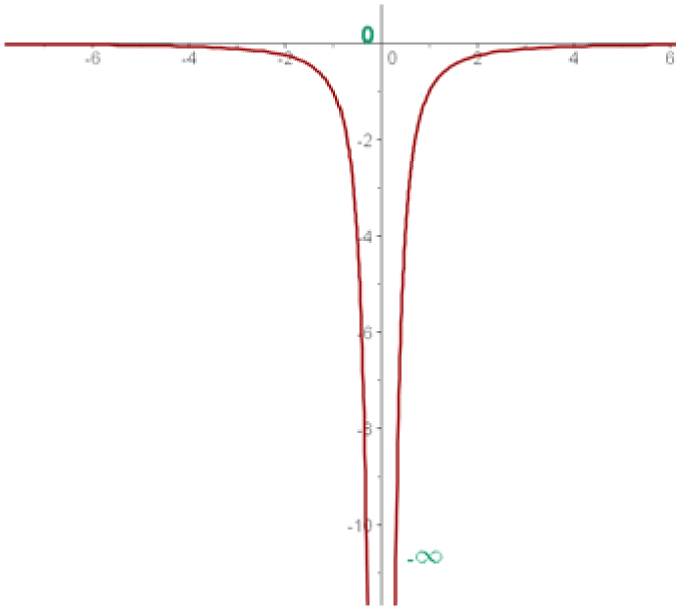
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$




## Límite menos infinito

**Ejemplo:**

$$\lim_{x \to 0} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

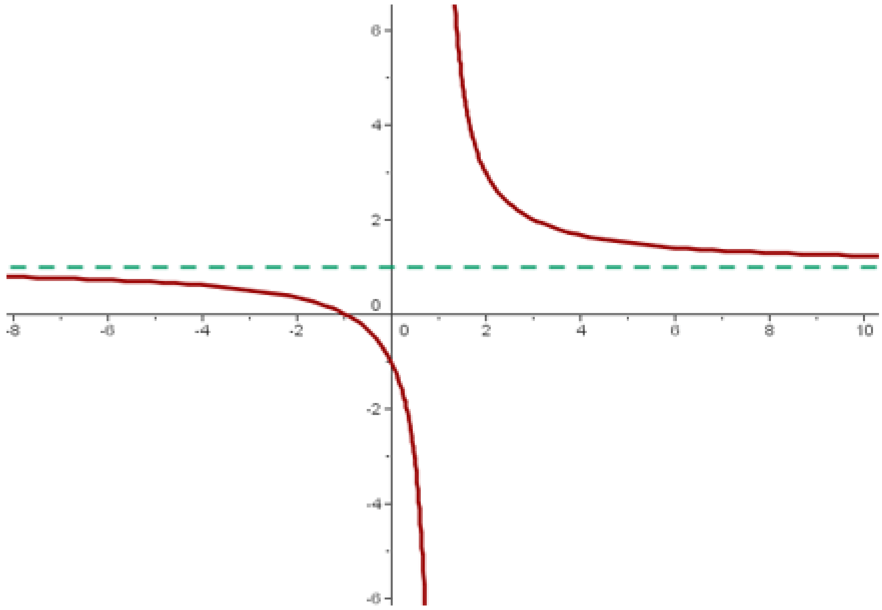


# Límites en el infinito

También podemos estudiar el comportamiento de una función para valores de x cada vez más próximos a infinito, tanto positivo como negativo (+∞ **o - ∞)**

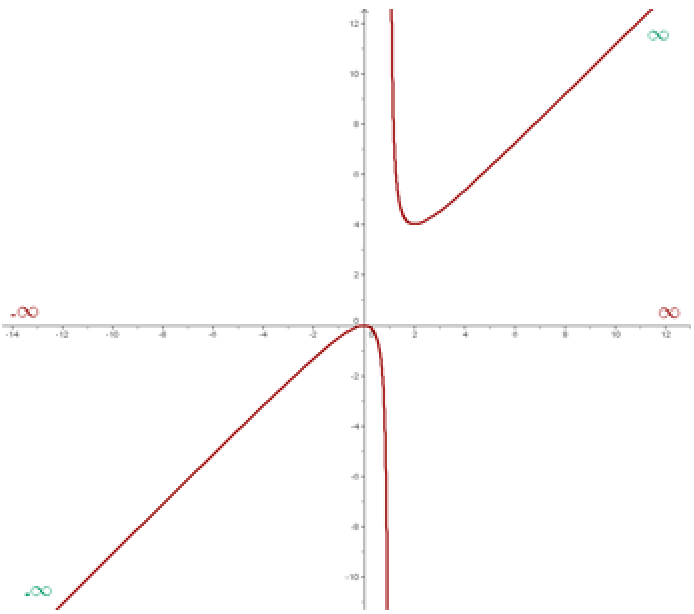
## Ejemplo 1:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$



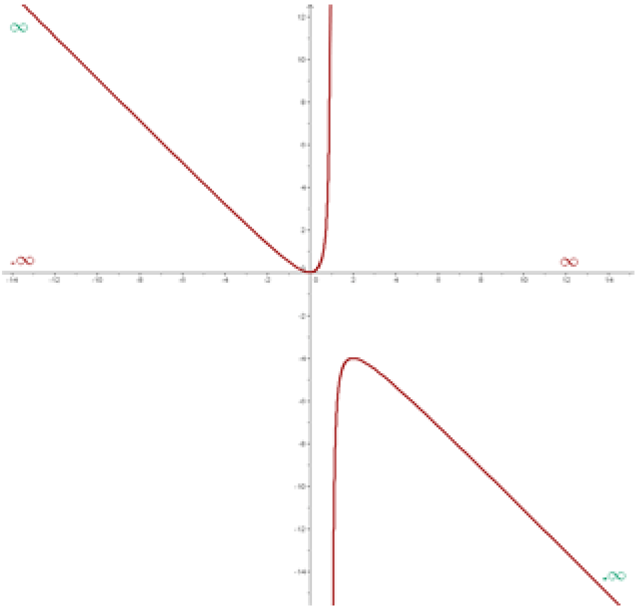

## Ejemplo 2:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$



**Ejemplo 3:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x-1}=-\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x-1}=\infty$$



# Asíntotas

## Asíntotas horizontales

Si se cumple que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=k \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=k \qquad y=k$$

Es una asíntota horizontal

**Ejemplo**

Calcular las asíntotas horizontales de la función:

$$f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-1}=2 \qquad\qquad y=2$$

# Asíntotas verticales

Si se cumple que

$$\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty \qquad x = k \qquad \text{Es una asíntota vertical}$$

Los valores de K hay que buscarlos entre los puntos que no pertenecen al dominio de la función

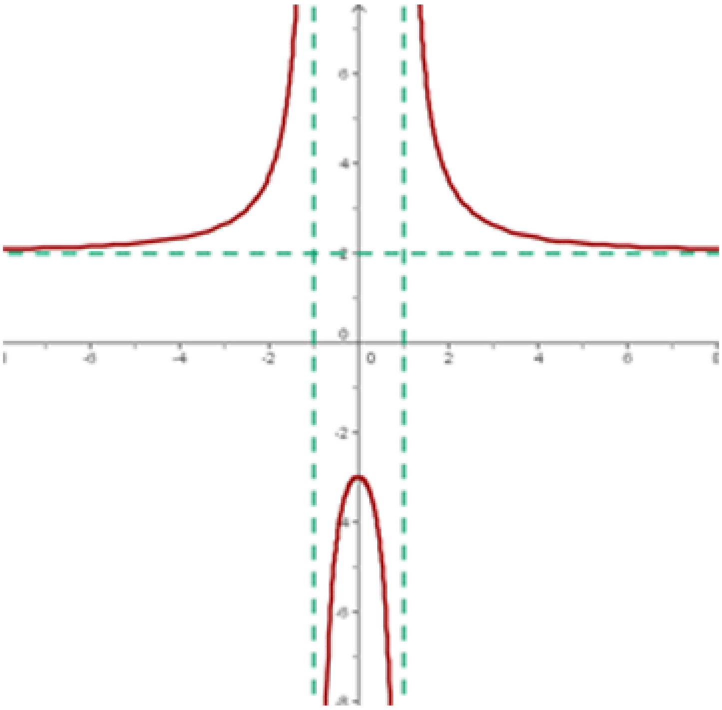
**Ejemplo**

Calcular las asíntotas horizontales y verticales de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1} = \infty \qquad x = -1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1} = \infty \qquad x = -1$$



**Ramas parabólicas**

Las ramas parabólicas se estudian sólo si:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \qquad ó \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

## *Rama parabólica en la dirección del eje OY*

Se dice que f tiene una rama parabólica en la dirección del eje OY cuando:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$$

Esto quiere decir que la gráfica se comporta como una parábola de eje vertical.

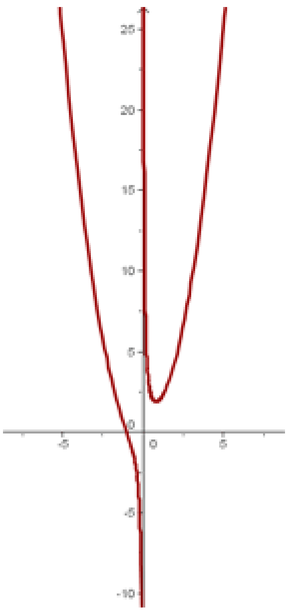
**Ejemplo**

Estudiar las ramas parabólicas de la función:

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x}}{x}=\frac{x^3+1}{x^2}=\infty$$

Tiene una rama parabólica en la dirección del eje OY.



## Rama parabólica en la dirección del eje OX

Se dice que f tiene una rama parabólica en la dirección del eje OX cuando:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Esto quiere decir que la gráfica se comporta como una parábola de eje horizontal.

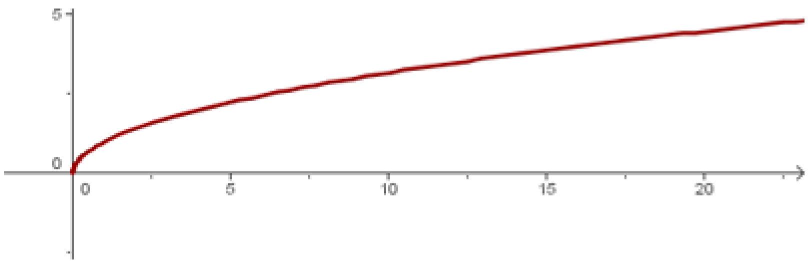
**Ejemplo**

Estudiar las ramas parabólicas de la función:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

Tiene una rama parabólica en la dirección del eje OX.




# Propiedades de los límites

### Límite de una constante

$$\lim_{x \to a} k = k$$

### Límite de una suma

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

### Límite de un producto

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

**Límite de un cociente**

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \qquad si \quad \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

**Límite de una potencia**

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \qquad si \quad f(x)>0$$

**Límite de un logaritmo**

$$\lim_{x\to a}[\log_a f(x)]=\log_a\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \qquad \text{Si } a>0 \text{ y } f(x)>0$$

## Operaciones con infinito: Indeterminaciones

***Infinito más un número***

$$\infty \pm k = \infty$$

***Infinito más infinito***

$$\infty + \infty = \infty$$

***Infinito menos infinito***

$$\infty - \infty \to Ind$$

***Infinito por un número***

$$\infty \cdot (\pm k) = \pm\infty \qquad Si \ k \neq 0$$

***Infinito por infinito***

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

***Infinito por cero***

$$0 \cdot \infty \to Ind$$

***Cero partido por un número***

$$\frac{0}{k}=0$$

***Un número partido por cero***

$$\frac{k}{0}=\infty$$

***Un número partido por infinito***

$$\frac{k}{\infty}=0$$

***Infinito partido por un número***

$$\frac{\infty}{k}=\infty$$

***Cero partido por infinito***

$$\frac{0}{\infty}=0$$

***Cero partido por cero***

$$\frac{0}{0}\rightarrow Ind$$

***Infinito partido por infinito***

$$\frac{\infty}{\infty}\rightarrow Ind$$

***Un número elevado a cero***

$$k^{0}=1$$

***Cero elevado a cero***

$$0^{0}\rightarrow Ind$$

***Infinito elevado a cero***

$$\infty^{0}\rightarrow Ind$$

***Cero elevado a un número***

$$0^{k}=\begin{cases}0 & \text{si } k>0\\ \infty & \text{si } k<0\end{cases}$$

***Un número elevado a infinito***

$$k^{\infty}=\begin{cases}\infty & \text{si } K>0\\ 0 & \text{si } k<0\end{cases}$$

***Cero elevado a infinito***

$0^{\infty} = 0$

***Infinito elevado a infinito***

$\infty^{\infty} = \infty$

***Uno elevado a infinito***

$1^{\infty} \rightarrow Ind$

No distinguimos entre +∞ y -∞ para no alargar excesivamente la lista. Nos basta con saber:

La regla de los signos y que $a^{-n} = 1/a^{n}$

# Las 7 Indeterminaciones

***1. Infinito partido por infinito***

$\frac{\infty}{\infty} \rightarrow Ind$

***2. Infinito menos infinito***

$\infty - \infty \rightarrow Ind$

***3. Cero partido por cero***

$\frac{0}{0} \rightarrow Ind$

***4. Cero por infinito***

$0 \cdot \infty \rightarrow Ind$

***5. Cero elevado a cero***

$0^{0} \rightarrow Ind$

***6. Infinito elevado a cero***

$\infty^{0} \rightarrow Ind$

*7. Uno elevado a infinito*

$1^{\infty} \to Ind$

# Cálculo de límites

## Cálculo del límite en un punto

Si f(x) es una función (polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas, etc.) y está definida en el punto a, entonces se suele cumplir que:

$$\lim_{x \to a} = f(a)$$

Es decir: para calcular el límite se sustituye en la función el valor al que tienden las x.

$$\lim_{x \to 1}(-x^2 - 5x + 6) = -1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 5x + 2} = \frac{3^2 - 2}{3^2 - 5 \cdot 3 + 2} = -\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x \to 1}\left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x}\right) = \left(\sqrt{1^2 + 3 \cdot 1} - \sqrt{1^2 + 1}\right) = 2 - \sqrt{2}$$

No podemos calcular $\lim_{x \to -2} \sqrt{x}$ porque el dominio de definición está en el intervalo [0, ∞), por tanto no puede tomar valores que se acerquen a -2.

Sin embargo si podemos calcular $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$, aunque 3 no pertenezca al dominio, D= $\mathbb{R} - \{2, 3\}$, si podemos tomar valores del dominio tan próximos a 3 como queramos.

## Cálculo del límite en una función definida a trozos

En primer lugar tenemos que estudiar los límites laterales en los puntos de unión de los diferentes trozos.

Si coinciden, este es el valor del límite.

Si no coinciden, el límite no existe

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}.$$

En x = -1, los límites laterales son:

Por la izquierda: $\lim_{x \to -1^-} 1 = 1$

Por la derecha: $\lim_{x \to -1^+} x^2 = 1$

Como en ambos casos coinciden, existe el límite y vale 1.

En x = 1, los límites laterales son:

Por la izquierda: $\lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$

Por la derecha: $\lim_{x \to 1^+} 2 = 2$

Como no coinciden los límites laterales no tiene límite en x = 1.

# Cálculo de límites cuando x $\to\infty$

Para calcular el límite de una función cuando x $\to\infty$ se sustituyen las x por ∞.

## Límite de funciones polinómicas en el infinito

El límite cuando x $\to\infty$ de una función polinómica es +∞ o -∞ según que el término de mayor grado sea positivo o negativo.

$$\lim_{x \to \infty} (3x^4 + x^3 - 2x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (-x^2 + 5x + 6) = -\infty$$

## Límite de la inversa de un polinomio en el infinito

Si P(x) es un polinomio, entonces:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{P(x)} = 0$$

.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{3x^4 + x^3 - 2x} = 0$$

## Cálculo de límites cuando $x \to -\infty$

Utilizamos la siguiente propiedad: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(-x)$

$$\lim_{x \to -\infty} (3x^4 + x^3 - 2x) = \lim_{x \to \infty} (-3x^4 - x^3 + 2x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^2 + 5x + 6) = \lim_{x \to \infty} (x^2 - 5x - 6) = \infty$$

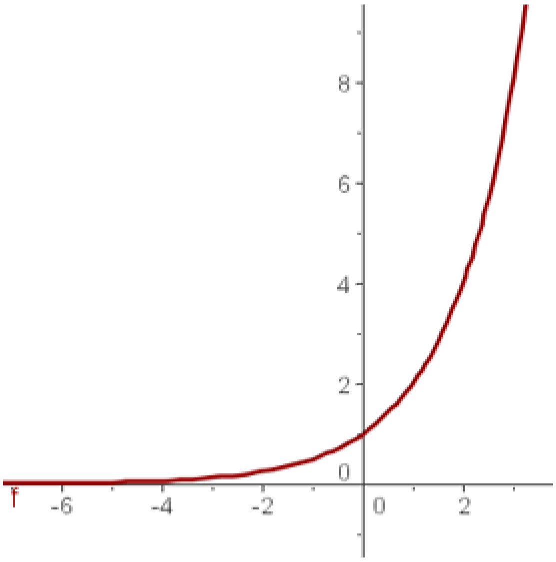
$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2 - 8x - 3} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{2(-x)^2 - 8(-x) - 3} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^3 - 5x} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{(-x)^3 - 5(-x)} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{-x^3 + 5x}$$

No existe el límite, porque el radicando toma valores negativos.

## Límite de la función exponencial

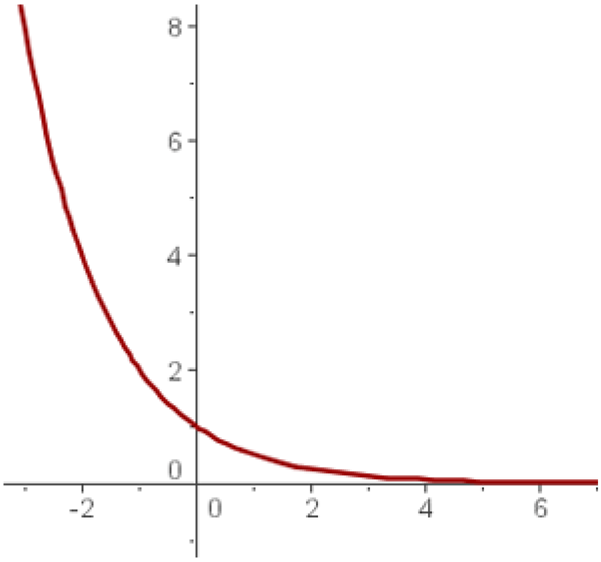
Si a > 0




$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Si 0 < a < 1




$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$$

**Ejemplo:**

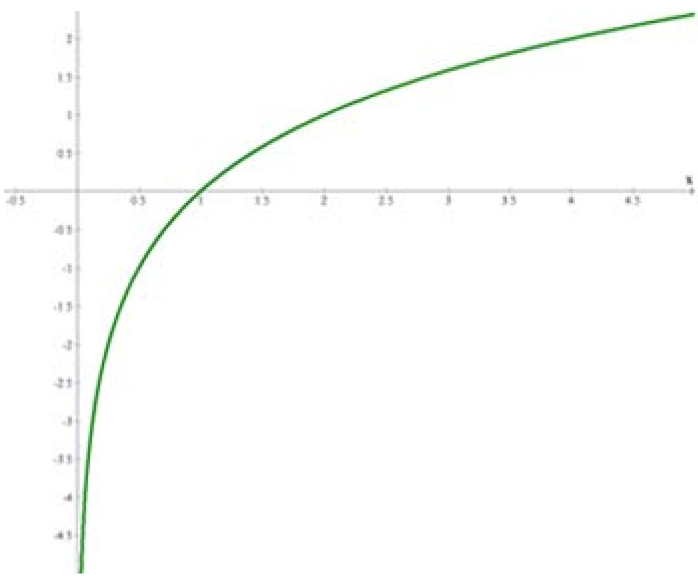
$$\lim_{x\to-\infty} 3^{x+2} = \lim_{x\to\infty} 3^{-x+2} = \lim_{x\to\infty} 3^{-(x-2)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3^{x-2}}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-(x-2)} = \lim_{x\to\infty} 3^{x-2} = \infty$$

## Límite de la función logarítmica

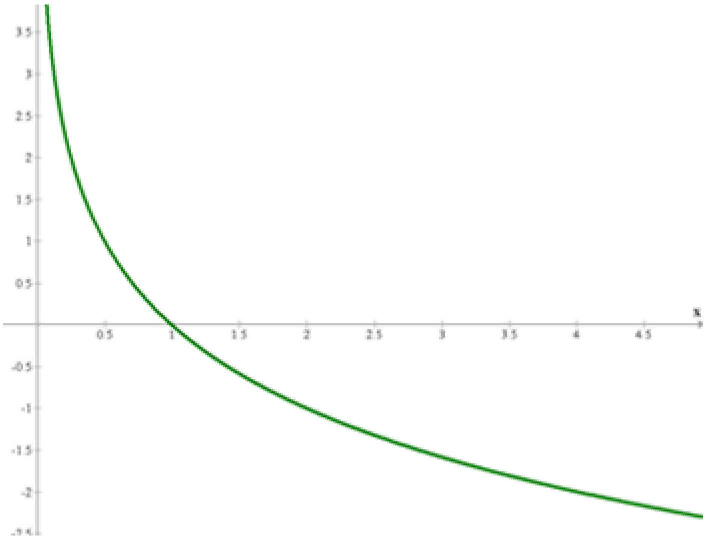
Si a > 0



$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$

Si 0 < a < 1

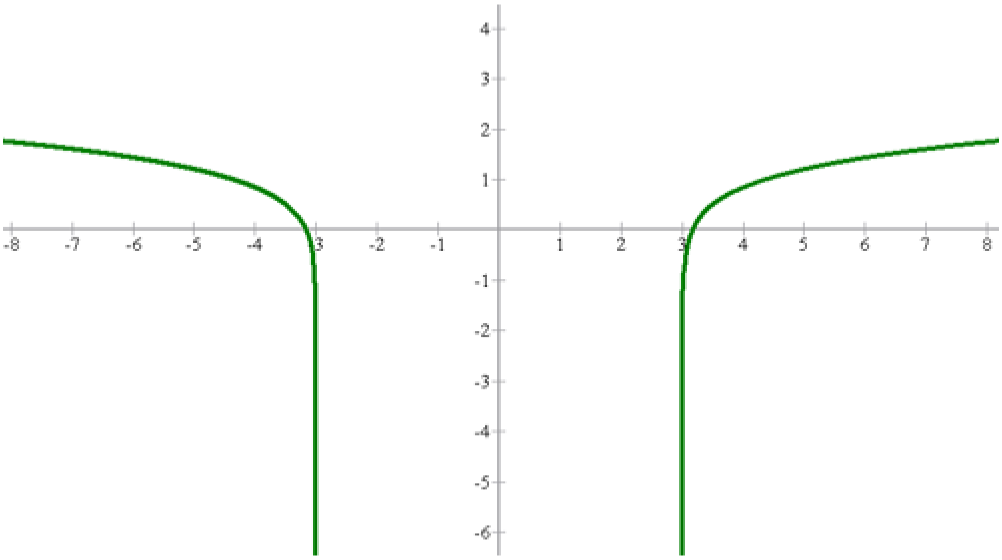


$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$$

$$f(x) = log(x^2 - 9)$$

$$D = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$



## Límites de logaritmos

$$\lim_{x\to -\infty} log(x^2-9) = \lim_{x\to\infty} log\left[(-x)^2-9\right] = log\left[\lim_{x\to\infty}(x^2-9)\right] = log\,\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to -3^-} log(x^2-9) = log\left[\lim_{x\to -3^-}(x^2-9)\right] = log\,0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} log(x^2-9) = log\left[\lim_{x\to 0}(x^2-9)\right] = log\,(-9) \qquad No\ existe$$

$$\lim_{x\to 3^+} log(x^2-9) = log\left[\lim_{x\to 3^+}(x^2-9)\right] = log\,0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} log(x^2-9) = log\Big[$$

## Límites del tipo $\frac{k}{0}$

El límite puede ser +∞, -∞ ó no tener límite.

**Ejemplo:**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0}$$

Tomamos los límites laterales para determinar el signo de ∞.

Si le damos a la x un valor que se acerque a -1 por la izquierda como -1,1; tanto el numerador como denominador son negativos, por lo que el límite por la izquierda será: +∞.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1} = \frac{(-)}{(-)} = \infty$$

Si le damos a la x un valor que se acerque a -1 por la derecha como -0,9. El numerador será positivo y el denominador negativo, por lo que el límite por la derecha será: - ∞.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1} = \frac{(+)}{(-)} = -\infty$$

Como no coinciden los límites laterales, la función no tiene límite cuando x $\rightarrow$-1.

**Ejemplo:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

**Ejemplo:**

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{0}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{(0^-)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{(0^+)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

## Indeterminación infinito partido infinito $\frac{\infty}{\infty}$

Podemos resolver esta indeterminación por dos métodos:

**1. Por comparación de infinitos.**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5 - 3x^2}{x^4 - x^3} = \infty$$

El numerador tiene mayor grado que el denominador.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5 - 3x^2}{x^7 - x^3} = 0$$

El denominador tiene mayor grado que el numerador.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5 - 3x^2}{3x^5 - x^3} = \frac{2}{3}$$

Al tener el mismo grado el límite es el cociente entre los coeficientes de mayor grado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x} = \infty$$

El numerador es un infinito de orden superior.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{3^x} = 0$$

El denominador es un infinito de orden superior.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^7 - 2}}{x^4 - 1} = 0$$

Como $4 > \frac{7}{2}$ el denominador tiene mayor orden.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^5 - 1)}{x^2 - 5} = 0$$

El denominador tiene mayor orden.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^{23}} = \infty$$

El numerador tiene mayor orden.

**2. Si se trata de funciones potenciales dividimos todos los sumandos por la x elevada al mayor exponente.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5 - 3x^2}{x^4 - x^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^5}{x^5} - \frac{3x^2}{x^5}}{\frac{x^4}{x^5} - \frac{x^3}{x^5}} = \frac{2 - \frac{3}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2-0}{0-0} = \infty$$

Si son funciones exponenciales dividimos por la exponencial de mayor base.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+2}+2^x}{3^{x-2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x.3^2+2^x}{3^x.3^{-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3^x.3^2}{3^x}+\frac{2^x}{3^x}}{\frac{3^x.3^{-2}}{3^x}}=\frac{9+0}{\frac{1}{9}}=81$$

# Indeterminación infinito menos infinito $\infty-\infty$

**Se pueden resolver de varias formas:**

## 1. Por comparación de infinitos

**Tomamos la mayor potencia y despreciamos las demás**.

$$\lim_{x\to\infty}(x^7-x^5+x^3-x^2)=\infty$$

Por tener $x^7$ mayor orden.

$$\lim_{x\to\infty}x^2-\sqrt{x+3}=\infty$$

Por tener $x^2$ mayor orden.

$$\lim_{x\to\infty}x^2-\sqrt{x^5+3}=-\infty$$

Porque $\frac{5}{2}>2$

$$\lim_{x\to\infty}(3^x-\sqrt{x^8-2})=\infty$$

$3^x$ tiene mayor orden

## 2. Con funciones racionales.

Ponemos a común denominador, y obtenemos . Resolvemos $\frac{\infty}{\infty}$ esta indeterminación.

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{x^2-4}\right)=\infty-\infty$$

Operando:

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1 - 2x(x+2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{-2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4} = -2$$

**3. Cuando se trata de funciones irracionales podemos multiplicar y dividir por el conjugado.**

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left[(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x})(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})\right]}{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2 - x^2 - x}{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2 - x}{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-2}{x} - \frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

## Indeterminación cero partido cero $\frac{0}{0}$

### 1. Función racional sin radicales:

Se descomponen en factores los polinomios y se simplifica la fracción.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)}{x - 1} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1} \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{-2}{0}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$$

No tiene límite en x = -1

## 2. Función racional con radicales:

En primer lugar multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de la expresión irracional.

Realizamos las operaciones y simplificamos la fracción.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} (1+\sqrt{1-x}) = 2$$

**Indeterminación cero por $0 \cdot \infty$ infinito**

Se transforma a $\frac{\infty}{\infty}$ ó a $\frac{0}{0}$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

**Ejemplo:**

$$\lim_{x \to \infty} (x+7) \cdot \sqrt{\frac{1}{4x^2+3}} = \infty \cdot 0$$

Introducimos el 1er factor en la raíz.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x+7)^2}{4x^2+3}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+14x+49}{4x^2+3}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

## Indeterminación uno elevado a infinito $1^\infty$

Se resuelve transformando la expresión en una potencia del número e.

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

### 1er Método:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=1^\infty$$

Sumamos y restamos 1

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{2x+1}{x+2}-1\right)^{\frac{1}{x-1}}=$$

Ponemos a común denominador los últimos sumando

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=$$

Sustituimos por el inverso del inverso

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}=$$

Elevamos al denominador y a su inverso

$$= \left[ \lim_{x\to 1} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \right)^{\frac{x+2}{x-1}} \right]^{\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-1}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

## 2º Método:

Utilizamos la siguiente propiedad $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x\to a} h(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{2x+1}{x+2}-1\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{2x+1-x-2}{x+2}\right)} = e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x+2}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+2}\right)} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$