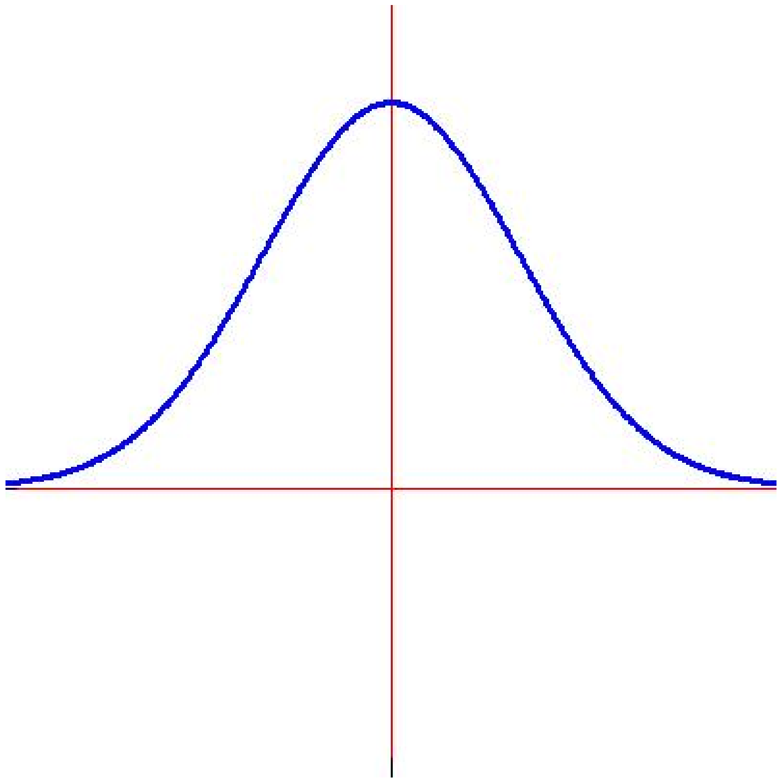
1.- INTRODUCCIÓN: DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(\mu, \sigma)$

La función de densidad $f(x)$ de una variable aleatoria continua X se caracteriza por:

- $f(x) \geq 0$ para todo valor de la variable aleatoria.
- El área de la región encerrada bajo la curva $f(x)$ es siempre 1.
- La probabilidad de que la variable tome valores en $[a, b]$ es el área de la región situada bajo el trozo de curva comprendido en dicho intervalo.

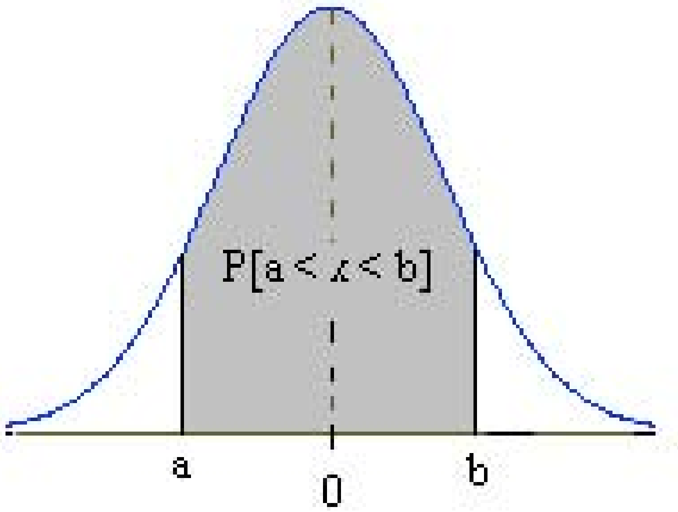
La función de densidad $f(x)$ de una **distribución normal** tiene como gráfica la **campana de Gauss** y está determinada cuando se conoce la media μ y la desviación típica σ. Se denota por $N(\mu, \sigma)$.



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

La función de densidad $f(x)$ está definida por $\mathbb{R}$, es continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$, simétrica respecto a la media μ, alcanza un máximo en $x = \mu$ y tiene como asíntota horizontal al eje OX.

El área de la región encerrada entre $f(x)$, OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ es la probabilidad de que la variable X esté en el intervalo $[a, b]$.

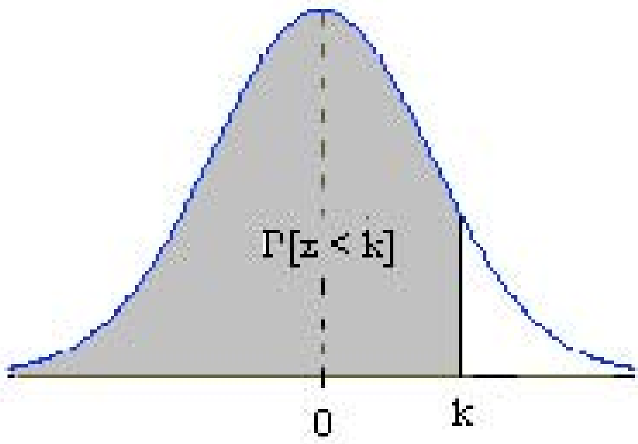


1.1 MANEJO DE LA TABLA $N(0, 1)$

En la distribución de la $N(0, 1)$, a la variable se le suele representar por la letra Z. La tabla con la que vamos a trabajar nos da las probabilidades $P[z \leq k]$ para valores de k de 0 a 4 centésimas. A estas probabilidades se les llama $F(k)$:

$$F(k) = P[x \leq k] \text{ z se distribuye según una } N(0, 1)$$

$F(k)$ es, pues, la función de distribución de esta variable aleatoria.



El valor de k se busca de la siguiente manera:

- Unidades y décimas en la columna de la izquierda.
- Centésimas en la fila de la arriba.
- El número que nos da la tabla es el valor de: $F(k) = P[z \leq k]$.

Ejemplos:

- $P[z \leq 0,45] = F(0,45) = 0,6736$
- $P[z \leq 1,2] = F(1,2) = 0,8849$
- $P[z \leq 1] = F(1) = 0,8413$

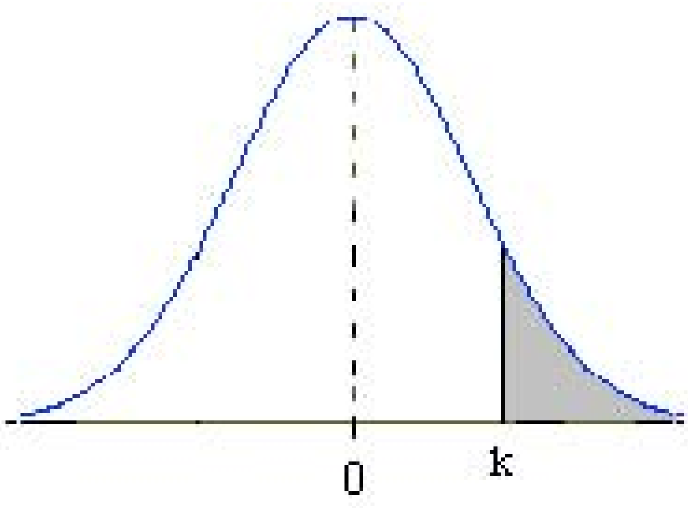
Reciprocamente, si conocemos el valor de la probabilidad $P[z \leq k]$, se puede saber el valor de k. Ejemplos:

- $P[z \leq k] = F(k) = 0,7190 \Rightarrow k = 0,58$
- $P[z \leq k] = F(k) = 0,8643 \Rightarrow k = 1,1$
- $P[z \leq k] = F(k) = 0,5560 \Rightarrow k = 0,14$

Recordemos que en la distribución de variable continua las probabilidades puntuales son nulas, $P[x = k] = 0$. Por tanto, $P[x \leq k] = P[z < k]$

1.2.- CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN $N(0,1)$.

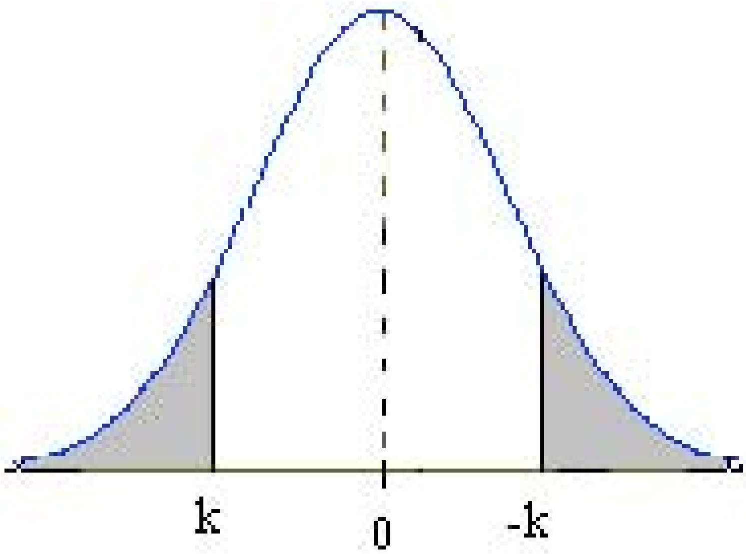
- Si $k \geq 0$, las probabilidades $P[z \leq k] = P[z < k]$ se encuentran directamente en la tabla.
- Si $k \geq 0$, $P[z \geq k] = 1 - P[z \leq k]$



Ejemplo:

$$P[z \geq 1,73] = 1 - P[z \leq 1,73] = 1 - 0,9582 = 0,0418$$

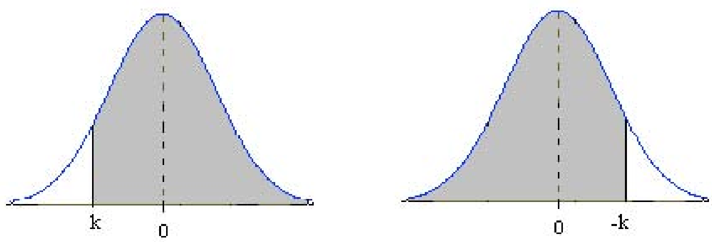
- Si $k < 0$, $P[z \leq k] = P[z \geq -k] = 1 - P[z \leq -k]$



Ejemplo:

$$P[z \leq -0,83] = P[z \geq 0,83] = 1 - P[z \leq 0,83] = 1 - 0,7967 = 0,2033$$

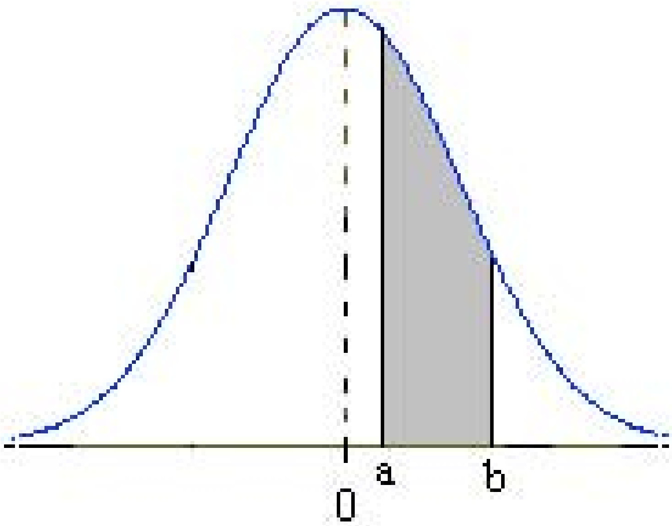
- Si $k < 0$, $P[z \geq k] = P[z \leq -k]$



Ejemplo:

$$P[z \leq -0,83] = P[z \geq 0,83] = 1 - P[z \leq 0,83] = -0,7967 = 0,2033$$

- $P[a \leq z \leq b] = P[z \leq b] - P[z \leq z]$



Ejemplo:

$$P[0,21 \leq z \leq 1,34] = P[z \leq 1,34] - P[z \leq 0,21] = 0,9099 - 0,5832 = 0,3267$$

2.- TIPIFICACIÓN DE LA VARIABLE.

Si X es $N(\mu, \sigma)$, para calcular la probabilidad $P[a \leq z \leq b]$ se procede del siguiente modo:

$$P[a \leq x \leq b] = P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right] = P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} \leq z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$

El cambio $x \to \frac{x-\mu}{\sigma} = z$ se llama **tipificación de la variable**.

La variable tipificada Z sigue una distribución $N(0,1)$

Ejemplo:En una $N(6,4)$, calcular $P[x < 3]$

$$P[x < 3] = P[z < \frac{3-6}{4}] = P[z < -0,75] = 1 - P[z < 0,75] = 1 - 0,7734 = 0,2266$$