

TEMA 5 – FUNCIONES EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

EJERCICIO 1 : Dadas las siguientes funciones : $f(x) = \frac{-3x+2}{4}$ y $g(x) = x^2 + 1$, halla :

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ g)(x)$

Solución:

$$a) (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[x^2 + 1\right] = \frac{-3(x^2 + 1) + 2}{4} = \frac{-3x^2 - 3 + 2}{4} = \frac{-3x^2 - 1}{4}$$

$$b) (g \circ g)(x) = g[g(x)] = g\left[x^2 + 1\right] = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

EJERCICIO 2 : Las funciones f y g están definidas por $f(x) = \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = x + 1$. Calcula :

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ g \circ f)(x)$

Solución:

$$a) (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x + 1] = \frac{(x + 1)^2}{3} = \frac{x^2 + 2x + 1}{3}$$

$$b) (g \circ g \circ f)(x) = g[g[f(x)]] = g\left[g\left(\frac{x^2}{3}\right)\right] = g\left(\frac{x^2}{3} + 1\right) = \frac{x^2}{3} + 1 + 1 = \frac{x^2}{3} + 2$$

EJERCICIO 3 : Sabiendo que: $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x+2}$ Explica cómo se pueden obtener por

composición, a partir de ellas, las siguientes funciones: $p(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$ $q(x) = \frac{1}{3x^2 + 2}$

Solución: $p(x) = (f \circ g)(x)$ $q(x) = (g \circ f)(x)$

EJERCICIO 4 : Explica cómo se pueden obtener por composición las funciones $p(x)$ y $q(x)$ a partir de $f(x)$ y $g(x)$, siendo: $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = \sqrt{x - 2}$, $p(x) = 2\sqrt{x - 2} - 3$ y $q(x) = \sqrt{2x - 5}$

Solución: $p(x) = (f \circ g)(x)$ $q(x) = (g \circ f)(x)$

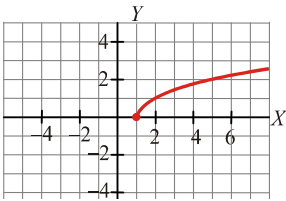
EJERCICIO 5 : Las funciones f y g están definidas por: $f(x) = \frac{x-1}{3}$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Explica cómo, a

partir de ellas, por composición, podemos obtener: $p(x) = \sqrt{\frac{x-1}{3}}$ y $q(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{3}$

Solución: $p(x) = (g \circ f)(x)$ $q(x) = (f \circ g)(x)$

INVERSA DE UNA FUNCIÓN

EJERCICIO 6 : Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:



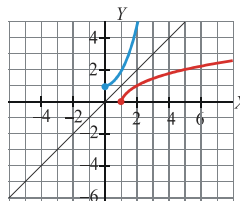
a) Calcula $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(2)$

b) Representa en los mismos ejes $f^{-1}(x)$ a partir de la gráfica de $f(x)$

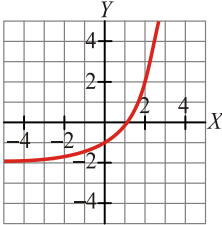
Solución:

- a) $f^{-1}(0) = 1$ porque $f(1) = 0$
 $f^{-1}(2) = 5$ porque $f(5) = 2$

b)



EJERCICIO 7 : Dada la gráfica de la función $y = f(x)$:



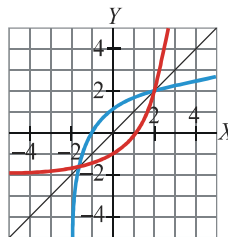
a) Calcula $f^{-1}(-1)$ y $f^{-1}(0)$

b) Representa gráficamente en los mismos ejes $f^{-1}(x)$ a partir de la gráfica de $f(x)$

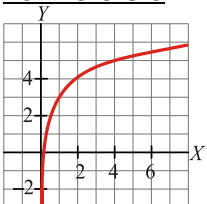
Solución:

- a) $f^{-1}(-1) = 0$ porque $f(0) = -1$
 $f^{-1}(0) = 1$ porque $f(1) = 0$

b)



EJERCICIO 8 : A partir de la gráfica de $y = f(x)$:



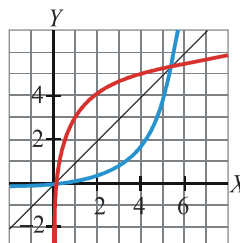
a) Calcula $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(5)$

b) Representa, en los mismos ejes, $f^{-1}(x)$.

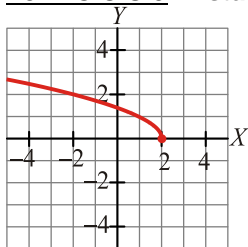
Solución:

- a) $f^{-1}(3) = 1$ porque $f(1) = 3$
 $f^{-1}(5) = 4$ porque $f(4) = 5$

b)



EJERCICIO 9 : Esta gráfica corresponde a la función $y = f(x)$:



A partir de ella:

a) Calcula $f^{-1}(2)$ y $f^{-1}(0)$.

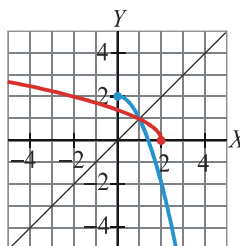
b) Representa, en los mismos ejes, la función $f^{-1}(x)$.

Solución:

a) $f^{-1}(2) = -2$ porque $f(-2) = 2$

$f^{-1}(0) = 2$ porque $f(2) = 0$

b)



EJERCICIO 10 : Halla la función inversa de:

a) $f(x) = \frac{2x-1}{3}$

b) $f(x) = \frac{2-3x}{4}$

c) $f(x) = \frac{-x+3}{2}$

d) $f(x) = \frac{-2x-1}{5}$

e) $f(x) = \frac{-2+7x}{3}$

Solución:

a) Cambiamos x por y , y despejamos la y :

$$x = \frac{2y-1}{3} \Rightarrow 3x = 2y-1 \Rightarrow 3x+1 = 2y \Rightarrow \frac{3x+1}{2} = y \Rightarrow \text{Por tanto: } f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2}$$

b) Cambiamos x por y y despejamos la y :

$$x = \frac{2-3y}{4} \Rightarrow 4x = 2-3y \Rightarrow 3y = 2-4x \Rightarrow y = \frac{2-4x}{3} \Rightarrow \text{Por tanto: } f^{-1}(x) = \frac{2-4x}{3}$$

c) Cambiamos x por y , y despejamos la y :

$$x = \frac{-y+3}{2} \Rightarrow 2x = -y+3 \Rightarrow y = 3-2x \Rightarrow \text{Por tanto: } f^{-1}(x) = 3-2x$$

d) Cambiamos x por y , y despejamos la y :

$$x = \frac{-2y-1}{5} \Rightarrow 5x = -2y-1 \Rightarrow 2y = -5x-1 \Rightarrow y = \frac{-5x-1}{2} \Rightarrow \text{Por tanto: } f^{-1}(x) = \frac{-5x-1}{2}$$

e) Cambiamos x por y y despejamos la y :

$$x = \frac{-2+7y}{3} \Rightarrow 3x = -2+7y \Rightarrow 3x+2 = 7y \Rightarrow \frac{3x+2}{7} = y \Rightarrow \text{Por tanto: } f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{7}$$

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICAS

EJERCICIO 11 : Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = 2^{1-x}$

b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

c) $y = 1 - \log_2 x$

d) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2}$

e) $y = 3^{x+1}$

Solución:

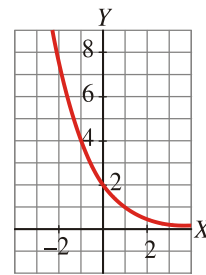
a)

• La función está definida y es continua en \mathbb{R} .

• La gráfica es:

• Hacemos una tabla de valores:

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
Y	$+\infty$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	0

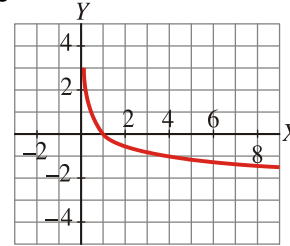


b)

- Dominio = $(0, +\infty)$
- Hacemos una tabla de valores:

X	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\infty}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^0$	$\left(\frac{1}{4}\right)^1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{+\infty}$
X	0	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$+\infty$
Y	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$

• La gráfica es:

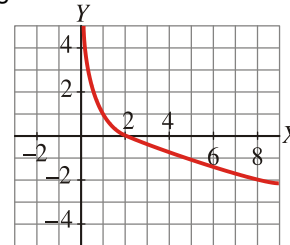


c)

- Dominio = $(0, +\infty)$
- Hacemos una tabla de valores.

X	$2^{-\infty}$	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	$2^{+\infty}$
X	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$+\infty$
Y	$+\infty$	3	2	1	0	-1	$-\infty$

• La gráfica será:

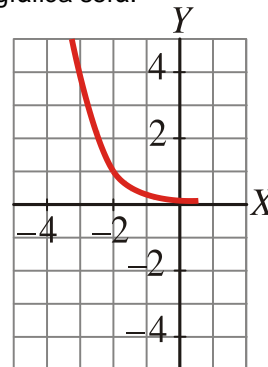


d)

- La función está definida y es continua en \mathbf{R} .
- Hacemos una tabla de valores:

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
Y	$+\infty$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1024}$	0

• La gráfica será:

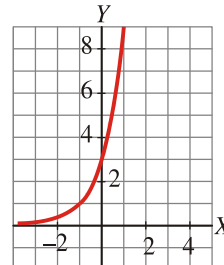


e)

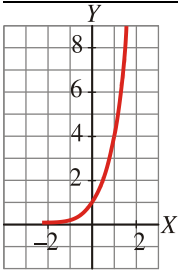
- La función está definida y es continua en \mathbf{R} .
- Hacemos una tabla de valores:

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
Y	0	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	$+\infty$

La gráfica es:



EJERCICIO 12 : Consideramos la gráfica:

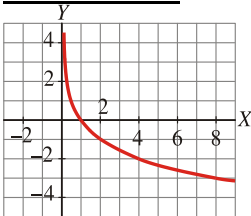


- a) Halla la expresión analítica de la función correspondiente.
- b) ¿Cuál es el dominio de dicha función?
- c) Estudia la continuidad y el crecimiento.

Solución:

- a) Es una función exponencial de base mayor que 1, que pasa por los puntos (0, 1), (1, 4)... Su expresión analítica es $y = 4^x$.
- b) Dominio = \mathbf{R}
- c) Es una función continua y creciente.

EJERCICIO 13 : Considera la siguiente gráfica:



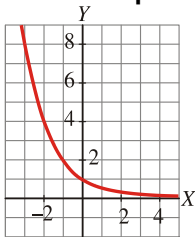
- a) Escribe la expresión analítica de la función correspondiente.
- b) Estudia la continuidad y el crecimiento de la función e indica cuál es su dominio de definición.

Solución:

- a) Es una función logarítmica con base menor que 1, que pasa por los puntos (1, 0), (2, -1), (4, -2), $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$... Su expresión analítica es: $y = \log_{\frac{1}{2}}x$
- b) • Es una función continua.
• Es decreciente.
• Dominio = $(0, +\infty)$

EJERCICIO 14 :

- a) ¿Cuál es la expresión analítica de la función correspondiente a esta gráfica?



- b) Indica cuál es el dominio de definición y estudia la continuidad y el crecimiento de la función.

Solución:

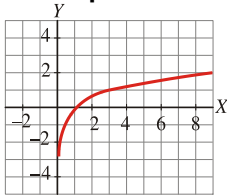
- a) Es una función exponencial con base menor que 1, que pasa por los puntos (-2, 4), (-1, 2), $\left(1, \frac{1}{2}\right)$...

Su expresión analítica será: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

- b) • Dominio = \mathbf{R}
• Es continua.
• Es decreciente.

EJERCICIO 15 :

a) Halla la expresión analítica de la función cuya gráfica es:



b) Estudia los siguientes aspectos de la función: dominio, continuidad y crecimiento.

Solución:

a) Es una función logarítmica que pasa por los puntos (1, 0), (3, 1), (9, 2)... Su expresión analítica será:

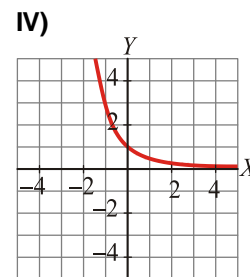
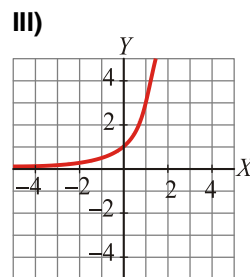
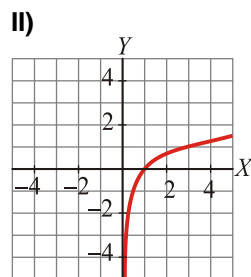
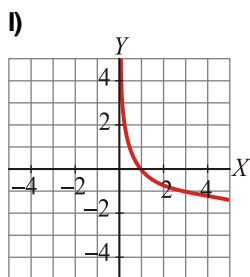
$$y = \log_3 x$$

b) • Dominio = $(0, +\infty)$

- Es continua.
- Es creciente.

EJERCICIO 16 : Asocia cada una de las siguientes gráficas con su expresión analítica:

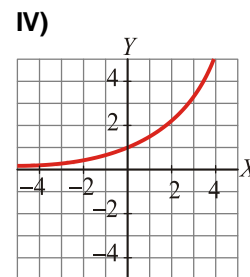
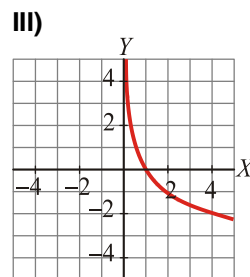
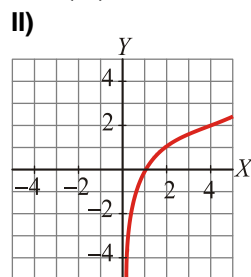
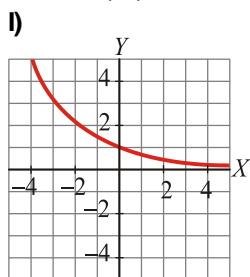
- a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $y = \log_3 x$ d) $y = \log_{1/3} x$



Solución: a) III b) IV c) II d) I

EJERCICIO 17 : Asocia a cada gráfica su ecuación:

- a) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ b) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ c) $y = \log_2 x$ d) $y = \log_{1/2} x$



Solución: a) I b) IV c) II d) III

PROBLEMAS FUNCIONES EXPONENCIALES

EJERCICIO 18 : Un trabajador va a ganar, durante el primer año, un sueldo de 15 000 euros, y el aumento del sueldo va a ser de un 2% anual.

- a) ¿Cuál será su sueldo anual dentro de un año? ¿Y dentro de dos años?
 b) Halla la expresión analítica que nos da su sueldo anual en función del tiempo (en años)

Solución:

- a) Dentro de un año ganará: $15\,000 \cdot 1,02 = 15\,300$ euros
 Dentro de dos años ganará: $15\,000 \cdot 1,02^2 = 15\,606$ euros.
 b) Dentro de x años su sueldo será de y euros, siendo: $y = 15\,000 \cdot 1,02^x$

EJERCICIO 19 : En un contrato de alquiler de una casa figura que el coste subirá un 2% cada año. Si el primer año se pagan 7 200 euros (en 12 recibos mensuales):

- a) ¿Cuánto se pagará dentro de 1 año? ¿Y dentro de 2 años?
 b) Obtén la función que nos dé el coste anual al cabo de x años.

Solución:

- a) Dentro de un año se pagarán $7\,200 \cdot 1,02 = 7\,344$ euros.
 Dentro de un año se pagarán $7\,200 \cdot 1,02^2 = 7\,490,88$ euros.
 b) Dentro de x años se pagarán: $y = 7\,200 \cdot 1,12^x$ euros

EJERCICIO 20 : Una población que tenía inicialmente 300 individuos va creciendo a un ritmo del 12% cada año.

- a) ¿Cuántos individuos habrá dentro de un año? ¿Y dentro de 3 años?
 b) Halla la función que nos da el número de individuos según los años transcurridos.

Solución:

- a) Dentro de un año habrá: $300 \cdot 1,12 = 336$ individuos
 Dentro de tres años habrá: $300 \cdot 1,12^3 \approx 421$ individuos
 b) Dentro de x años habrá y individuos, siendo: $y = 300 \cdot 1,12^x$ (tomando y entero)

EJERCICIO 21 : Un coche que nos costó 12 000 euros pierde un 12% de su valor cada año.

- a) ¿Cuánto valdrá dentro de un año? ¿Y dentro de 3 años?
 b) Obtén la función que nos da el precio del coche según los años transcurridos.

Solución:

- a) Dentro de un año valdrá: $12\,000 \cdot 0,88 = 10\,560$ euros
 Dentro de tres años valdrá: $12\,000 \cdot 0,88^3 = 8\,177,66$ euros
 b) Dentro de x años valdrá y euros, siendo: $y = 12\,000 \cdot 0,88^x$

EJERCICIO 22 : Colocamos en una cuenta 2 000 euros al 3% anual.

- a) ¿Cuánto dinero tendremos en la cuenta al cabo de un año? ¿Y dentro de 4 años?
 b) Halla la expresión analítica que nos da la cantidad de dinero que tendremos en la cuenta en función del tiempo transcurrido (en años).

Solución:

- a) Dentro de un año tendremos: $2\,000 \cdot 1,03 = 2\,060$ euros
 Dentro de cuatro años tendremos: $2\,000 \cdot 1,03^4 = 2\,251,02$ euros
 b) Dentro de x años tendremos y euros, siendo: $y = 2\,000 \cdot 1,03^x$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 23 : Representa la siguiente función:

- a) $y = 2 \operatorname{tg} x$ b) $y = 1 - \operatorname{sen} x$ c) $y = |\cos x|$ d) $y = 3 \cos x$ e) $y = 2 \operatorname{sen} x$

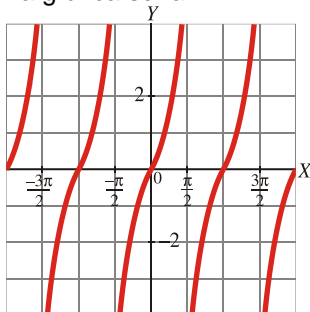
Solución:

a) Al igual que $y = \operatorname{tg} x$, esta función no está definida en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde k es un número entero.

En estos valores hay asíntotas verticales.
Además, es una función periódica de período π .
Hagamos una tabla con algunos valores:

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y = 2 \operatorname{tg} x$	-3,46	-2	-1,15	0	1,15	2	3,46

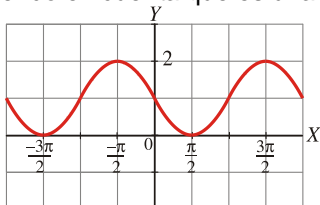
La gráfica sería:



b) Hacemos una tabla de valores:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = 1 - \operatorname{sen} x$	1	0	1	2	1

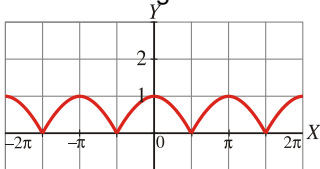
y, teniendo en cuenta que es una función periódica, la representamos:



c) La gráfica es como la de $y = \cos x$; pero la parte que estaba por debajo del eje X , ahora está por encima. Hagamos una tabla de valores:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x $	1	0	1	0	1

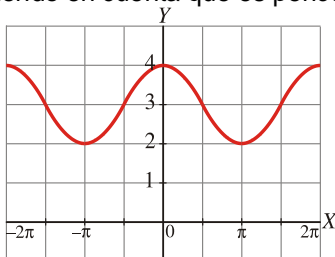
La gráfica será la siguiente:



d) Hacemos una tabla de valores:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = 3 + \cos x$	4	3	2	3	4

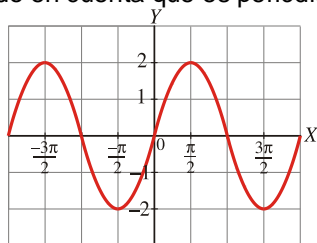
y, teniendo en cuenta que es periódica, la representamos:



e) Hacemos una tabla de valores:

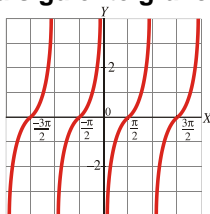
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = 2 \operatorname{sen} x$	0	2	0	-2	0

Teniendo en cuenta que es periódica, la representamos:



EJERCICIO 24

a) A la siguiente gráfica le corresponde una de estas expresiones analíticas. ¿Cuál?



$y = \operatorname{tg} x$
 $y = \operatorname{tg} 2x$
 $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
 $y = \operatorname{tg}(x + \pi)$
 $y = \cos x$
 $y = \operatorname{sen} x$

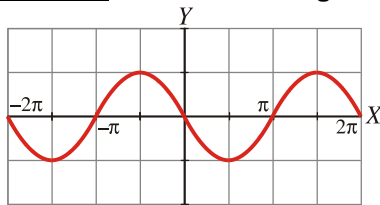
b) Di para qué valores está definida la función anterior, cuál es su periodo y estudia su continuidad.

Solución:

a) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

- b) • Está definida en todo \mathbf{R} , salvo en los múltiplos de π .
 • Es periódica de periodo π . • Es continua en los valores en que está definida.

EJERCICIO 25 : Considera la siguiente gráfica:



a) Di cuál de estas expresiones analíticas le corresponde:

$y = \cos(x + \pi)$ $y = \operatorname{sen}(x + \pi)$ $y = \cos 2x$ $y = \operatorname{sen} 2x$

b) Di cuál es su dominio de definición, cuál es su periodo y qué valores mínimo y máximo alcanza.

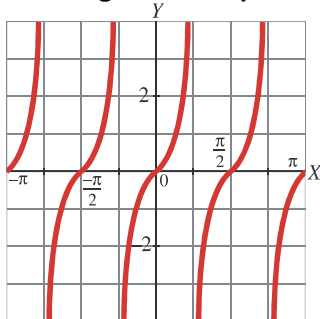
Solución:

a) $y = \operatorname{sen}(x + \pi)$

b) • Dominio = \mathbf{R} • Periodo = 2π • La función toma valores entre -1 y 1 .

EJERCICIO 26

a) Di cuál de las siguientes expresiones se corresponde con la gráfica:



$y = 2 \cos x$
 $y = 2 \operatorname{tg} x$
 $y = \operatorname{tg} 2x$
 $y = 2 + \cos x$
 $y = \cos 2x$

b) Para la función anterior, di cuál es su dominio, estudia su continuidad e indica cuál es su periodo.

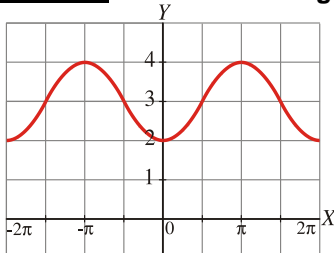
Solución:

a) $y = \operatorname{tg} 2x$

b) • Dominio = $\mathbf{R} - \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\}$, es decir, está definida en \mathbf{R} , salvo en las abscisas $\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$, siendo k números enteros.

• Es continua en los puntos en los que está definida. • Es periódica de periodo $\frac{\pi}{2}$.

EJERCICIO 27 : Considera la siguiente gráfica y responde:



a) ¿Cuál de estas es su expresión analítica?

$y = 3 - \operatorname{sen} x$ $y = 3 - \cos x$ $y = 3 + \cos x$ $y = 3 + \operatorname{sen} x$

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

c) ¿Es una función continua?

d) ¿Es periódica? ¿Cuál es su periodo?

e) ¿Qué valores mínimo y máximo alcanza?

Solución:

a) $y = 3 - \cos x$

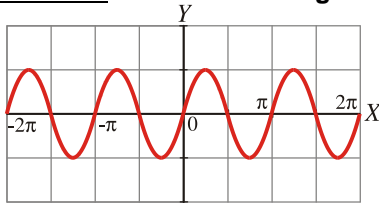
b) Dominio = \mathbf{R}

c) Sí, es continua.

d) Es periódica de periodo 2π , pues la gráfica se repite cada 2π unidad.

e) Los valores de la función están entre 2 y 4.

EJERCICIO 28 : Considera la siguiente gráfica:



a) ¿Cuál de estas expresiones analíticas le corresponde?

$y = \text{sen } 2x$ $y = 2\text{sen } x$ $y = \text{cos } 2x$ $y = \text{tg } 2x$

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

c) ¿Es una función continua?

d) ¿Cuál es su periodo?

e) ¿Qué valores mínimo y máximo alcanza?

Solución:

a) $y = \text{sen } 2x$

b) Dominio = \mathbb{R}

c) Sí, es continua.

d) Su periodo es π , pues la gráfica se repite cada π unidades.

e) Los valores están entre -1 y 1 .

EJERCICIO 29 : Obtén el valor de estas expresiones en grados:

a) $y = \text{arcsen} \frac{1}{2}$

b) $y = \text{arccos} \frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $y = \text{arccos} \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $y = \text{arctg} 1$

a) $y = \text{arcsen} \left(-\frac{1}{2} \right)$

b) $y = \text{arccos} 1$

a) $y = \text{arccos} (-1)$

b) $y = \text{arctg} (\sqrt{3})$

a) $y = \text{arcsen} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

b) $y = \text{arccos} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

Solución:

a) $y = 30^\circ$

b) $y = 45^\circ$

a) $y = 30^\circ$

b) $y = 45^\circ$

a) $y = -30^\circ$

b) $y = 0^\circ$

a) $y = 180^\circ$

b) $y = 60^\circ$

a) $y = -60^\circ$

b) $y = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$