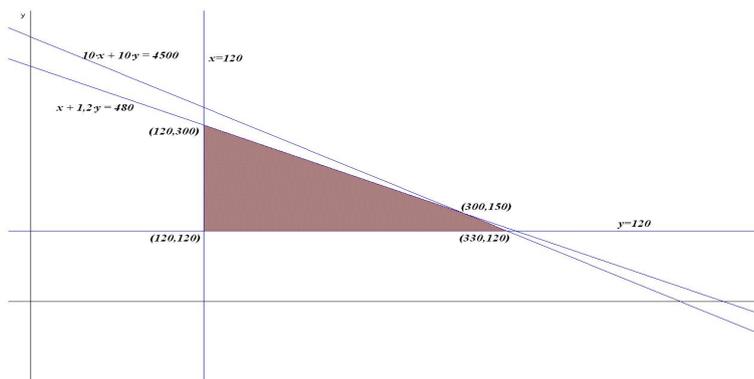


13.7. Septiembre 2012 - Opción A

Problema 13.7.1 (3 puntos) Un pintor dispone de dos tipos de pintura para realizar su trabajo. El primer tipo de pintura tiene un rendimiento de 3 m^2 por litro, con un coste de 1 euro por litro. El segundo tipo de pintura tiene un rendimiento de 4 m^2 por litro, con un coste de 1,2 euros por litro. Con ambos tipos de pintura se puede pintar a un ritmo de 1 litro cada 10 minutos. El pintor dispone de un presupuesto de 480 euros y no puede pintar durante más de 75 horas. Además, debe utilizar al menos 120 litros de cada tipo de pintura. Determinése la cantidad de pintura que debe utilizar de cada tipo si su objetivo es pintar la máxima superficie posible. Indíquese cuál es esa superficie máxima.

Solución:

LLamamos x al nº de litros de pintura del primer tipo e y al nº de litros de pintura del segundo tipo.



Función objetivo: $z(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x + 1,2y \leq 480 \\ 10x + 10y \leq 4500 \\ x, y \geq 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(120, 120) = 840 \\ z(120, 300) = 1560 \\ z(300, 150) = 1500 \\ z(330, 120) = 1470 \end{cases}$$

La cantidad óptima a utilizar sería: 120 litros de pintura del primer tipo y 300 de pintura del segundo tipo. Podrían pintarse 1560 m^2 .

Problema 13.7.2 (3 puntos) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \frac{x(2x-1)}{x-1}$.

- Determinense las asíntotas de f . Calcúlense los extremos relativos de f .
- Representese gráficamente la función f .
- Calcúlese $\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2} dx$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2x-1)}{x^2-x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x(2x-1)}{x-1} - 2x \right) = 1$$

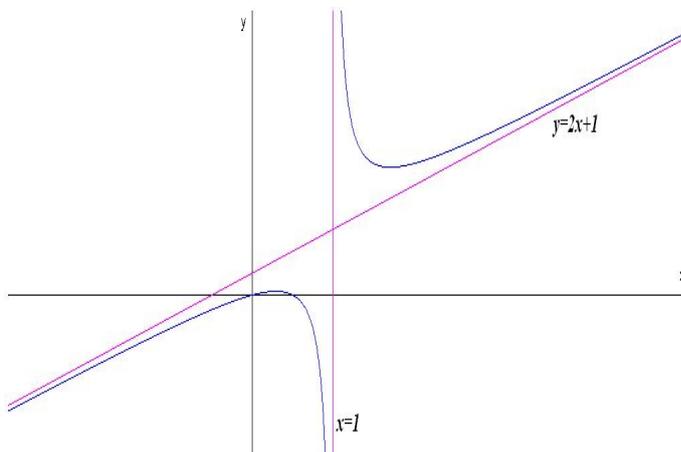
$$y = 2x + 1$$

Extremos:

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x-1)^2} = 0 \implies x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \implies \begin{cases} f''(x_1) > 0 \implies \text{en } x_1 \text{ hay un mínimo} \\ f''(x_2) < 0 \implies \text{en } x_2 \text{ hay un máximo} \end{cases}$$

b) Representación gráfica:



$$c) \int_2^5 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_2^5 \frac{2x-1}{x^2-x} dx = \ln |x^2-x| \Big|_2^5 = \ln 10.$$

Problema 13.7.3 (2 puntos) Se dispone de cinco cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada previamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde.

- Calcúlese la probabilidad de que el jugador gane.
- Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?

Solución:

Para que un jugador gane pueden ocurrir los siguientes sucesos: B , NB y NNB .

a)

$$P(\text{Ganar}) = P(B) + P(NB) + P(NNB) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \frac{1}{4} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

b)

$$P(\text{una caja} | \text{Perder}) = \frac{P(\text{Perder} \cap \text{una caja})}{P(\text{Perder})} = \frac{2/5}{2/3} = \frac{3}{5}$$

Problema 13.7.4 (2 puntos) La duración en kilómetros de los neumáticos de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3000 kilómetros.

- Se toma una muestra aleatoria simple de 100 neumáticos y se obtiene una media muestral de 48000 kilómetros. Determinése un intervalo de confianza con un nivel del 90% para μ .
- Calcúlese el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor o igual a 1000 kilómetros con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Solución:

- Tenemos $n = 100$, $\bar{X} = 48000$, $\sigma = 3000$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$IC = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (47506,5; 48493,5)$$

- Tenemos $E = 1000$, $\sigma = 3000$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = 34,577$$

Luego $n = 35$.

13.8. Septiembre 2012 - Opción B

Problema 13.8.1 (3 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + ky + 2z = 5 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

- Discútase el sistema según los diferentes valores de k .
- Resuélvase el sistema para $k = 0$.
- Resuélvase el sistema para $k = 2$.

Solución:

-

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 2 & 5 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = -k^2 + 3k - 2 = 0 \implies k = 1, \quad k = 2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) =$ n° de incógnitas \implies Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < \text{n}^\circ$ de incógnitas \implies sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

b) $k = 0$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2z = 5 \\ y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

c) $k = 2$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 13.8.2 (3 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Calcúlense los valores de a y b para los que la función f es continua y derivable.
- Para $a = 0$ y $b = 1$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en los puntos en los que dicha tangente es paralela a la recta $y - 8x = 1$.

- c) Sea g la función real de variable real definida por $g(x) = 1 - 2x^2$. Para $a = 1$ y $b = 0$, calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f y la gráfica de g .

Solución:

- a) f continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \implies a + b = 1$$

f no es derivable en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(1^-) = a \\ f'(1^+) = 1 \end{cases} \implies a = 1$$

Luego $a = 1$ y $b = 0$.

- b) $y - 8x = 1 \implies y = 8x - 1 \implies m = 8$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Las soluciones estarán cuando $x > 1 \implies 3x^2 - 2x = 8 \implies x = 2$ y $x = -4/3$, esta última solución no es válida, y el punto de tangencia es $(2, f(2)) = (2, 5)$. La ecuación de la recta tangente a la función f es $y - 5 = 8(x - 2)$.

- c)

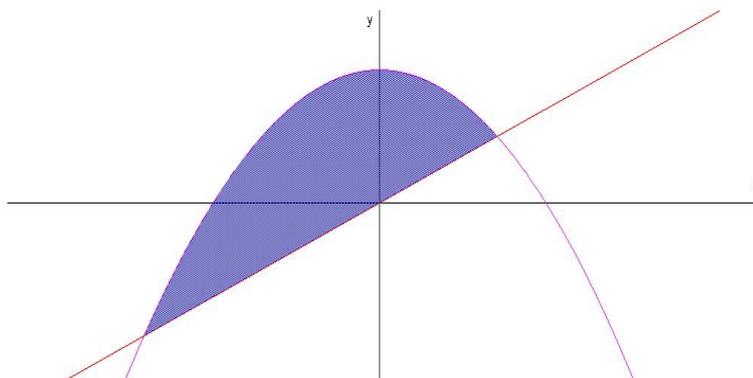
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = g(x) \implies \begin{cases} x = 1 - 2x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 = 1 - 2x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 + x^2 = 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1, x = 1/2 & \text{si } x \leq 1 \\ x = 0, x = -1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ No valen}$$

- d)

$$S = \int_{-1}^{1/2} (-2x^2 - x + 1) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{1/2} = \frac{9}{8} u^2$$



Problema 13.8.3 (2 puntos) Se consideran dos sucesos A y B tales que:

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad P(B|A) = \frac{1}{4} \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

Calcúlese razonadamente:

- $P(A \cap B)$.
- $P(B)$.
- $P(\bar{B}|A)$.
- $P(\bar{A}|\bar{B})$.

Nota: \bar{S} denota el suceso complementario del suceso S . $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T .

Solución:

a)

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

b)

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \implies P(B) = \frac{1}{4}$$

c)

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4}$$

d)

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{2}{3}$$

Problema 13.8.4 (2 puntos) El tiempo de espera para ser atendido en un cierto establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 121.

- a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea mayor que 0,5 minutos.
- b) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ , si la media de la muestra es igual a 7 minutos.

Solución:

a)

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq 5) = P(|Z| \geq \frac{5}{3/11}) = 2(1 - P(Z \leq 1,83)) = 0,0672$$

b) $N(\mu, 3)$, $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,5345454545 \quad IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (6,465; 7,535)$$