

### 8.1. Modelo 2007 - Opción A

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

### 8.2. Modelo 2007 - Opción B

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

### 8.3. Junio 2007 - Opción A

**Problema 8.3.1** (3 puntos) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + az = 8 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema para los distintos valores de  $a$ .
- b) Resolver el sistema para  $a = 4$ .

**Solución:**

a)

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array} \right) \implies |A| = 8a + 14 = 0 \implies a = -\frac{7}{4}$$

Si  $a \neq -\frac{7}{4} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = \text{n}^\circ$  de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si  $a = -\frac{7}{4}$

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -7/4 & 8 \end{array} \right)$$

tenemos que el  $\text{Rango}(A) = 2$ , ya que  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ , pero

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -22 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

En este caso  $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A})$ , luego el sistema será incompatible.

b) Si  $a = 4$  el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + 4z = 8 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

**Problema 8.3.2** (3 puntos) Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$$

- Determinar las asíntotas de la función.
- Calcular sus máximos y sus mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento.

**Solución:**

a) Asíntotas:

- Verticales:  $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[ \frac{36}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[ \frac{36}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- Oblicuas:  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x^2 + 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x-3)^2}{x+3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x+9}{x+3} = -9$$

$$y = x - 9$$

b)

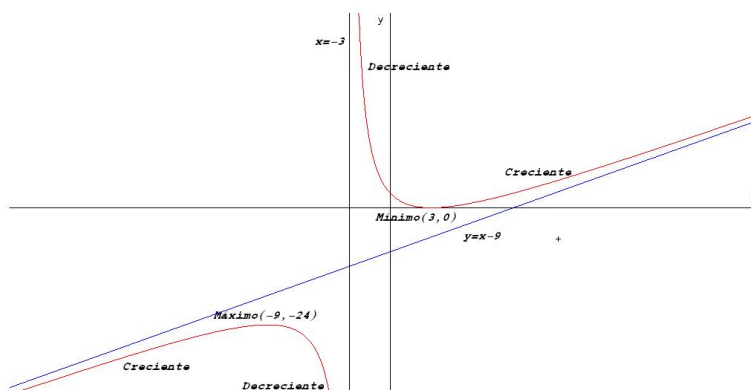
$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x - 27}{(x+3)^2} = 0 \implies x = 3, x = -9$$

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función crece en el intervalo:  $(-\infty, -9) \cup (3, \infty)$

La función decrece en el intervalo:  $(-9, -3) \cup (-3, 3)$

Presenta un máximo en el punto  $(-9, -24)$  y un mínimo en  $(3, 0)$



**Problema 8.3.3** (2 puntos) Según un cierto estudio, el 40% de los hogares europeos tienen contratado acceso a internet, el 33% tiene contratada televisión por cable, y el 20% disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

**Solución:**

Llamamos  $A = \{\text{Tiene contratado internet}\}$  y  $B = \{\text{Tiene contratado TV por cable}\}$

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,33, \quad P(A \cap B) = 0,2$$

a)

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,33 - 0,2 = 0,13$$

b)

$$P(\text{Ninguno}) = 1 - P(\text{Alguno}) = 1 - P(A \cup B) =$$

$$1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - 0,53 = 0,47$$

**Problema 8.3.4** (2 puntos) La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla de Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica de 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea  $\bar{X}$  la media muestral de la edad de casamiento.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de  $\bar{X}$ ?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

**Solución:**

a) Tenemos

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(35, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(35, 0,5)$$

Media 35 varianza  $0,5^2 = 0,25$ 

b)

$$P\left(36 \leq \bar{X} \leq 37\right) = P\left(\frac{36 - 35}{0,5} \leq Z \leq \frac{37 - 35}{0,5}\right) = P(2 \leq Z \leq 4) =$$

$$P(Z \leq 4) - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$