TEMA 7 – INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

TASA DE VARIACIÓN MEDIA DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

EJERCICIO 1 : Halla la tasa de variación media de la siguiente función en el intervalo [1, 2] e indica si f(x) crece o decrece en ese intervalo: $f(x)=2x^2-3x$

Solución: T.V.M. $[1,\ 2]=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2-(-1)}{1}=\frac{(2+1)}{1}=\frac{3}{1}=3$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en el intervalo [1, 2].

EJERCICIO 2 : Dada la función: $f(x)=(x-1)^3$

Calcula la tasa de variación media en el intervalo [0, 1]. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

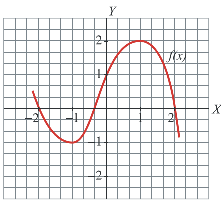
Solución: T.V.M. $[0,\ 1]=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{0-(-1)}{1}=\frac{1}{1}=1$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en este intervalo.

EJERCICIO 3 : Calcula la tasa de variación media de esta función, *f(x)*, en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos:

a) $[-1,\ 0]$

b) $[1,\ 2]$



Solución:

a) T.V.M. $[-1,\ 0]=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\frac{1-(-1)}{1}=\frac{1+1}{1}=2$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en [–1,0]. (También se puede apreciar directamente en la gráfica).

b) T.V.M. $[1,\ 2]=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{0-2}{1}=-2\Rightarrow$ La función decrece en este intervalo.

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO, APLICANDO LA DEFINICIÓN

EJERCICIO 4 : Halla la derivada de la siguiente función en $x = 1$, aplicando la definición de derivada:

$$f(x)=x^2+1$$

Solución: $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1).(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$

EJERCICIO 5 : Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(1)$ para la función $f(x)=\frac{x-1}{3}$.

Solución: $f'(1)=\lim_{x\to 1}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{3}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

EJERCICIO 6 : Halla la derivada de la función f(x)=(x – 1)^2 en x=2, aplicando la definición de derivada

Solución: $f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^2-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x=2$

EJERCICIO 7 : Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$, siendo $f(x)=\frac{2}{x}$.

Solución: $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{2}{x}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{2-2x}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2-2x}{(x-1)x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2(1-x)}{(x-1)x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-2}{x}=-2$

FUNCIÓN DERIVADA, APLICANDO LA DEFINICIÓN

EJERCICIO 8 : Halla *f´(x)*, aplicando la definición de derivada:

a) $f(x)=x^2+1$ **b)** $f(x)=\frac{x+1}{3}$ **c)** $f(x)=2x^2$ **d)** $f(x)=\frac{1}{x}$ **e)** $f(x)=\frac{2x}{3}$

Solución:

a) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{x^2+h^2+2xh+1-x^2-1}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{h^2+2xh}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{h(h+2x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}(h+2x)=2x$

b) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{x+h+1}{3}-\frac{(x+1)}{3}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{x+h+1-x-1}{3}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{h}{3}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{h}{3h}=\frac{1}{3}$

c) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{2(x+h)^2-2x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{2(x^2+h^2+2xh)-2x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{2x^2+2h^2+4xh-2x^2}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{2h^2+4xh}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{h(2h+4x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2h+4x)=4x$

d) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{-h}{hx(x+h)}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x^2}$

e) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{2(x+h)}{3}-\frac{2x}{3}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{2x+2h-2x}{3}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{2h}{3}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{2h}{3h}=\frac{2}{3}$

CÁLCULO DE DERIVADAS INMEDIATAS

EJERCICIO 9 : Halla la función derivada de:

a) $f(x)=3x^4-2x+5$ **b)** $f(x)=e^x$ **c)** $f(x)=2x^3-x^2+1$ **d)** $f(x)=\ln x$

e) $f(x)=2x^5+\frac{x}{3}$ **f)** $f(x)=sen\ x$ **g)** $f(x)=x^3-3x^2+\frac{1}{5}$ **h)** $f(x)=\cos x$

i) $f(x)=4x^3-3x^2+2$ **j)** $f(x)=tg\ x$ **k)** $f(x)=\frac{x^2+2}{2x+1}$ **l)** $f(x)=xe^x$

m) $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-2}$ **n)** $f(x)=x^2 sen\ x$ **ñ)** $f(x)=\frac{1-x^2}{x-3}$ **o)** $f(x)=x\ln x$

p) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{x}$ **q)** $f(x)=\frac{3x+1}{e^x}$ **r)** $f(x)=\frac{3x^2}{2x+3}$ **s)** $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot sen\ x$

Solución:

a) $f'(x)=12x^3-2$ b) $f'(x)=e^x$ c) $f'(x)=6x^2-2x$ d) $f'(x)=\frac{1}{x}$

e) $f'(x)=10x^4+\frac{1}{3}$ f) $f'(x)=\cos x$ g) $f'(x)=3x^2-6x$ h) $f'(x)=-senx$

i) $f'(x)=12x^2-6x$

j) $f'(x)=1+tg^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

k) $f'(x)=\dfrac{2x(2x+1)-(x^2+2)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\dfrac{4x^2+2x-2x^2-4}{(2x+1)^2}=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$

l) $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

m) $f'(x)=\dfrac{3(x^2-2)-(3x-1)2x}{(x^2-2)^2}=\dfrac{3x^2-6-6x^2+2x}{(x^2-2)^2}=\dfrac{-3x^2+2x-6}{(x^2-2)^2}$

n) $f'(x)=2x\ \operatorname{sen}x+x^2\cos x$

ñ) $f'(x)=\dfrac{-2x(x-3)-(1-x^2)}{(x-3)^2}=\dfrac{-2x^2+6x-1+x^2}{(x-3)^2}=\dfrac{-x^2+6x-1}{(x-3)^2}$

o) $f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

p) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x^2}$

q) $f'(x)=\dfrac{3e^x-(3x+1)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x(3-3x-1)}{(e^x)^2}=\dfrac{2-3x}{e^x}$

r) $f'(x)=\dfrac{6x(2x+3)-3x^2\cdot 2}{(2x+3)^2}=\dfrac{12x^2+18x-6x^2}{(2x+3)^2}=\dfrac{6x^2+18x}{(2x+3)^2}$

s) $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-2/3}\operatorname{sen}x+x^{1/3}\cdot\cos x=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{sen}x+\sqrt[3]{x}\cdot\cos x$

CÁLCULO DE DERIVADAS

EJERCICIO 10 : Halla la función derivada de:

a) $f(x)=(3x^2+x)^4$

b) $f(x)=\sqrt{4x^3+1}$

c) $f(x)=e^{4x^3-2x}$

d) $f(x)=\ln(3x^4-2x)$

e) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+1}{2x-3}\right)$

f) $f(x)=3x^4-\dfrac{9x^2}{3}$

g) $f(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^2-1}$

h) $f(x)=xe^x$

i) $f(x)=8x^5-2x^3+\dfrac{1}{3}$

j) $f(x)=(x^4-3x)e^x$

k) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$

l) $f(x)=\dfrac{3x^4}{2}-\dfrac{6x^3}{5}$

m) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x^3+1}$

n) $f(x)=\ln(x^4-2x)$

ñ) $f(x)=\dfrac{-2x^4+3x^2}{5}$

o) $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2+3x}$

p) $f(x)=\sqrt{2x^3-3}$

q) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{3}{5}x^7$

r) $f(x)=e^x\cdot\operatorname{sen}x$

s) $f(x)=\cos\left(\dfrac{3x}{x^2+2}\right)$

t) $f(x)=4x^5-\dfrac{2x}{3}$

u) $f(x)=(x^2-3x)e^x$

v) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$

w) $f(x)=-x^7+\dfrac{3}{4}x-1$

x) $f(x)=\dfrac{4x^3-3}{x^2-1}$

y) $f(x)=e^{7x^4-3}$

z) $f(x)=9x^2-3x^4+\dfrac{1}{3}$

1) $f(x)=\dfrac{3x^3}{4-x^2}$

2) $f(x)=\ln(2x^5+3x)$

3) $f(x)=\dfrac{-3x^5+2x}{7}$

4) $f(x)=x^4\cos x$

5) $f(x)=e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

6) $f(x)=\dfrac{4x^6}{3}-2x+5$

7) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

8) $f(x)=\sqrt{2x-3x^4}$

Solución:

a) $f'(x)=4(3x^2+x)^3\cdot(6x+1)$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{4x^3+1}}\cdot 12x^2=\dfrac{12x^2}{2\sqrt{4x^3+1}}=\dfrac{6x^2}{\sqrt{4x^3+1}}$

c) $f'(x)=e^{4x^3-2x}\cdot(12x^2-2)$

d) $f'(x)=\frac{1}{3x^4-2x}\cdot(12x^3-2)=\frac{12x^3-2}{3x^4-2x}$

e) $f'(x)=\cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)\cdot\frac{(2x-3)-(x+1)2}{(2x-3)^2}=\frac{2x-3-2x-2}{(2x-3)^2}\cdot\cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)=\frac{-5}{(2x-3)^2}\cdot\cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$

f) $f'(x)=12x^3-\frac{18x}{3}$

g) $f'(x)=\frac{6x(x^2-1)-(3x^2-2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{6x^3-6x-6x^3+4x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$

h) $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$ i) $f'(x)=40x^4-6x^2$

j) $f'(x)=(4x^3-3)e^x+(x^4-3x)e^x=(4x^3-3+x^4-3x)e^x=(x^4+4x^3-3x-3)e^x$

k) $f'(x)=\cos\left(\frac{x}{x^2-1}\right)\cdot\frac{x^2-1-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\cos\left(\frac{x}{x^2-1}\right)\cdot\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}\cdot\cos\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$

l) $f'(x)=\frac{12x^3}{2}-\frac{18x^2}{5}=6x^3-\frac{18x^2}{5}$

m) $f'(x)=\frac{2x(2x^3+1)-(x^2-3)\cdot 6x^2}{(2x^3+1)^2}=\frac{4x^4+2x-6x^4+18x^2}{(2x^3+1)^2}=\frac{-2x^4+18x^2+2x}{(2x^3+1)^2}$

n) $f'(x)=\frac{1}{x^4-2x}\cdot(4x^3-2)=\frac{4x^3-2}{x^4-2x}$

ñ) $f'(x)=\frac{-8x^3+6x}{5}$

o) $f'(x)=\frac{3(x^2+3x)-(3x-4)(2x+3)}{(x^2+3x)^2}=\frac{3x^2+9x-6x^2-9x+8x+12}{(x^2+3x)^2}==\frac{-3x^2+8x+12}{(x^2+3x)^2}$

p) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x^3-3}}\cdot 6x^2=\frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3-3}}=\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-3}}$

q) $f'(x)=2x^3-\frac{21}{5}x^6$

r) $f'(x)=e^x\cdot \text{sen}x+e^x\cdot\cos x=(\text{sen}x+\cos x)e^x$

s) $f'(x)=-\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)\cdot\frac{3(x^2+2)-3x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=-\left(\frac{3x^2+6-6x^2}{(x^2+2)^2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)=$

$=-\frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2}\cdot\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)=\frac{3x^2-6}{(x^2+2)^2}\cdot\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)$

t) $f'(x)=20x^4-\frac{2}{3}$

u) $f'(x)=(2x-3)e^x+(x^2-3x)e^x=e^x(2x-3+x^2-3x)=e^x(x^2-x-3)$

v) $f'(x)=\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2}=\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2}=\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}=$

$=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}\cdot\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$

w) $f'(x)=-7x^6+\frac{3}{4}$

x) $f'(x)=\frac{12x^2(x^2-1)-(4x^3-3)2x}{(x^2-1)^2}=\frac{12x^4-12x^2-8x^4+6x}{(x^2-1)^2}=\frac{4x^4-12x^2+6x}{(x^2-1)^2}$

y) $f'(x)=e^{7x^4-3}\cdot(28x^3)=28x^3\cdot e^{7x^4-3}$

z) $f'(x)=18x-12x^3$

1) $f'(x)=\frac{9x^2(4-x^2)-3x^3(-2x)}{(4-x^2)^2}=\frac{36x^2-9x^4+6x^4}{(4-x^2)^2}=\frac{36x^2-3x^4}{(4-x^2)^2}$

2) $f'(x)=\frac{1}{2x^5+3x}\cdot(10x^4+3)=\frac{10x^4+3}{2x^5+3x}$

3) $f'(x)=\frac{-15x^4+2}{7}$

4) $f'(x)=4x^3\cos x+x^4(-\mathrm{sen}x)=4x^3\cos x-x^4\mathrm{sen}x$

5) $f'(x)=e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\cdot\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\cdot\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\cdot\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

6) $f'(x)=\frac{24x^5}{3}-2=8x^5-2$

7) $f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

8) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x-3x^4}}\cdot(2-12x^3)=\frac{2-12x^3}{2\sqrt{2x-3x^4}}=\frac{2(1-6x^3)}{2\sqrt{2x-3x^4}}=\frac{1-6x^3}{\sqrt{2x-3x^4}}$

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA

EJERCICIO 11 : Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2+2x-1$ en el punto de abscisa $x=1$.

Solución: y – f(1) = f ‘ (1).(x – 1)

- f(1) = 1^2 + 2.1 – 1 = 2
- f ‘ (x) = 2x + 2 ⇒ f ‘ (1) = 2 + 2 = 4
- La recta será: $y-2=4(x-1)\Rightarrow y=4x-2$

EJERCICIO 12 : Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - 3x$ que tenga pendiente -7.

Solución: m = -7 = f ‘ (x) ⇒ f ‘(x) = 4x – 3 = -7 ⇒ x = -1

- y – f(-1) = f ‘ (-1).(x + 1)
- f(-1) = 2.$(-1)^2$ – 3.(-1) = 2 + 3 = 5
- f ‘ (-1) = -7
- La recta será: $y-5=-7(x+1)\Rightarrow y=-7x-2$

EJERCICIO 13 : Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\sqrt{x}$ que sea paralela a . la recta $y=\frac{1}{4}x+1$

Solución: • La pendiente de la recta es $m=\frac{1}{4}$

- La pendiente es igual a la derivada: ⇒ $\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{4}\Rightarrow x=4$
- y – f(4) = f’(4)(x - 4) ⇒ La recta será: $y-2=\frac{1}{4}(x-4)\Rightarrow y=\frac{1}{4}x+1$

ESTUDIO DE LA MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

EJERCICIO 14 : Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las siguientes funciones:

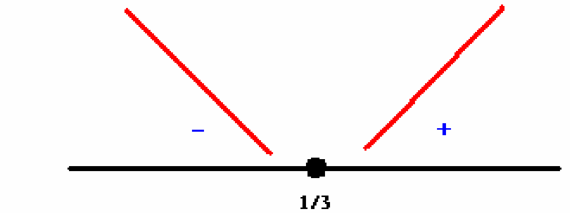
a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ **b)** $f(x) = 2x^3$ **c)** $f(x) = 3 + 12x - 3x^2$ **d)** $f(x) = (x+2)^2$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2}$

Solución:

a)

- D(f) = R
- $f'(x) = 6x - 2 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/3 \end{cases}$



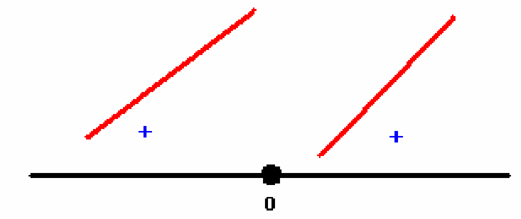
Creciente (1/3,+∞)

Decreciente (-∞,1/3)

Mínimo (1/3,f(1/3)) = (1/3,2/3)

b)

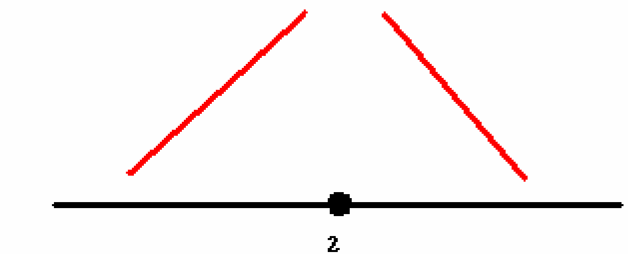
- D(f) = R
- $f'(x) = 6x^2 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$



Creciente en todo R

c)

- D(f) = R
- $f'(x) = 12 - 6x \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 6x = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$



Creciente (-∞,2)

Decreciente (2,+∞)

Máximo (2,f(2)) = (2,15)

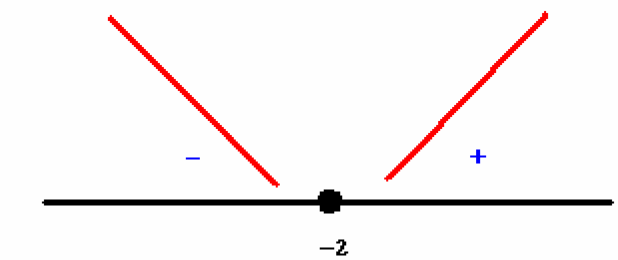
d)

- D(f) = R
- $f'(x) = 2(x+2) \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

Creciente (-2,+∞)

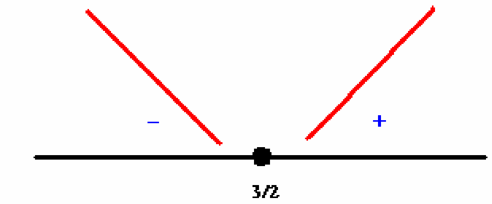
Decreciente (-∞,-2)

Mínimo (-2,f(-2)) = (-2,0)



e)

- D(f) = R
- $f'(x) = \dfrac{2x-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/2 \end{cases}$



Creciente (3/2,+∞)

Decreciente (-∞,3/2)

Mínimo (3/2,f(3/2)) = (3/2,-5/8)

EJERCICIO 15 : Dada la función: $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$?

b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

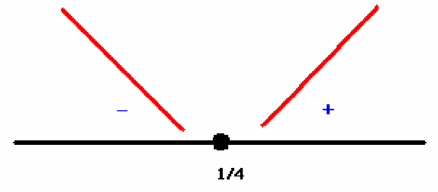
Solución: • $f'(x) = 8x - 2$

a) $f'(0) = -2 < 0 \;\Rightarrow\;$ Decreciente en $x = 0$

$f'(1) = 6 > 0 \;\Rightarrow\;$ Creciente en $x = 1$

b) • D(f) = R

- $f'(x) = 8x - 2 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 8x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/4 \end{cases}$



Creciente (1/4,+∞)
Decreciente (-∞,1/4)
Mínimo (1/4,f(1/4)) = (1/4,3/4)

EJERCICIO 16 : Consideramos la función: $f(x) = 5x^2 - 3x$

a) ¿Crece o decrece en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$?

b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

Solución:

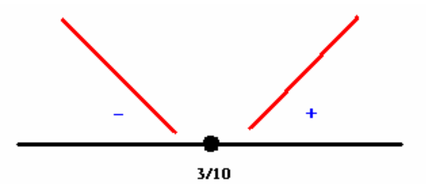
a) $f'(x) = 10x - 3$

$f'(-1) = -13 < 0 \;\Rightarrow\;$ Decreciente en $x = -1$

$f'(1) = 7 > 0 \;\Rightarrow\;$ Creciente en $x = 1$

b) • D(f) = R

- $f'(x) = 10x - 3 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/10 \end{cases}$



Creciente (3/10,+∞)

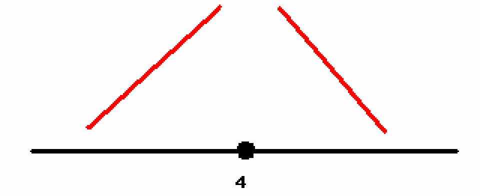
Decreciente (-∞,3/10)

Mínimo (3/10,f(3/10)) = (3/10,9/20)

EJERCICIO 17 : Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función: $f(x) = 8x - x^2$

Solución:

- D(f) = R
- $f'(x) = 8 - 2x \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$



Creciente $(-\infty,4)$

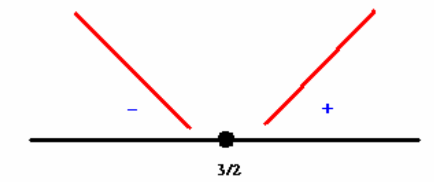
Decreciente $(4,+\infty)$

Máximo (4,f(4)) = (4,16)

EJERCICIO 18 : Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{4}$

Solución:

- D(f) = R
- $f'(x)=\dfrac{2x-3}{4} \Rightarrow \begin{cases} D(f')=R \\ f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{2x-3}{4}=0 \Rightarrow x=3/2 \end{cases}$



Creciente $(3/2,+\infty)$

Decreciente $(-\infty,3/2)$

Mínimo (3/2,f(3/2)) = (3/2,-9/16)

EJERCICIO 19 : Dada la siguiente función: $f(x)=14x-7x^2$

a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 4$?

b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

Solución:

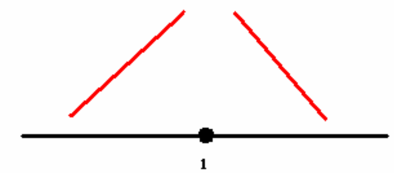
a) $f'(x)=14-14x$

$f'(0)=14>0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en $x=0$

$f'(4)=-42<0 \quad \Rightarrow \quad$ Decreciente en $x=4$

b)

- D(f) = R
- $f'(x)=14-14x \Rightarrow \begin{cases} D(f')=R \\ f'(x)=0 \Rightarrow 14-14x=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$



Creciente $(-\infty,1)$

Decreciente $(1,+\infty)$

Máximo (1,f(1)) = (1,7)

APLICACIONES DE LA DERIVADA

<u>EJERCICIO 20</u>

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x^3-3x^2+1$ en el punto de la abscisa $x=1$.

b) ¿Es creciente o decreciente $f(x)$ en $x=3$?

Solución:

a) y – f(1) = f '(1)(x – 1)

- f(1) = 1 – 3 + 1 = -1
- $f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow$ f ' (1) = 3 – 6 = -3
- La recta será: $y+1=-3(x-1) \Rightarrow y=-3x+2$

b) $f'(3)=9>0 \quad \Rightarrow \quad$ Es creciente en $x=3$.

EJERCICIO 21 : Dada la función: $f(x)=3x^2-x$

a) **Escribe la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 1$.**

b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

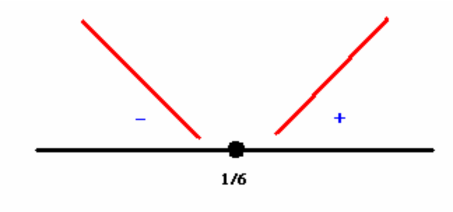
Solución:

a) y – f(1) = f ‘(1)(x – 1)

- f(1) = 3 – 1 = 2
- $f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow$ f ‘ (1) = 6 – 1 = 5
- La recta será: $y - 2 = 5(x-1) \Rightarrow y = 5x - 3$

b)

- D(f) = R
- $f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/6 \end{cases}$



Creciente (1/6,+∞)

Decreciente (-∞,1/6)

Mínimo (1/6,f(1/6)) = (1/6,-1/12)

EJERCICIO 22 : Consideremos la función: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$

a) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

Solución:

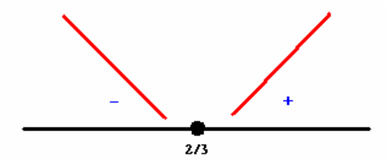
a) y – f(2) = f ‘(2)(x – 2)

- f(2) = 6 – 4 + 1 = 3
- $f'(x) = 3x - 2 \Rightarrow$ f ‘ (2) = 6 - 2 = 4

- La recta será: $y - 3 = 4(x-2) \Rightarrow y = 4x - 5$

b)

- D(f) = R
- $f'(x) = 3x - 2 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2/3 \end{cases}$



Creciente (2/3,+∞)

Decreciente (-∞,2/3)

Mínimo (2/3,f(2/3)) = (2/3,1/3)

PUNTOS DE TANGENTE HORIZONTAL

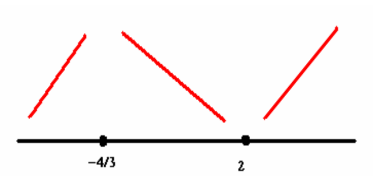
EJERCICIO 23 : Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

Solución:

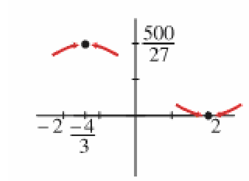
- $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} = \frac{2 \pm 10}{6} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3} \end{cases}$

Puntos: $(2,\ 0)$ y $\left(-\frac{4}{3},\ \frac{500}{27}\right)$



Máximo en $\left(\frac{-4}{3},\ \frac{500}{27}\right)$

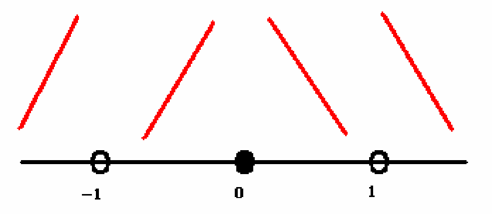
Mínimo en $(2,\ 0)$



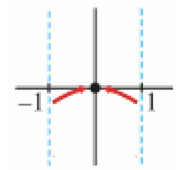
EJERCICIO 24 : Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$, halla sus puntos singulares y represéntalos

Solución:

- $f'(x)=\dfrac{4x\left(x^2-1\right)-2x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{4x^3-4x-4x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{-4x}{\left(x^2-1\right)}=0 \Rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}: (0,\ 0)$



Máximo en (0,0)

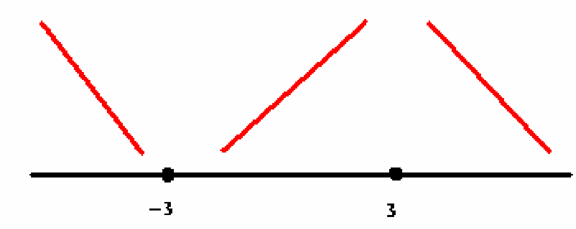


EJERCICIO 25: Averigua los puntos de tangente horizontal de la función $f(x)=\dfrac{9x}{x^2+9}$ y represéntalos

Solución:

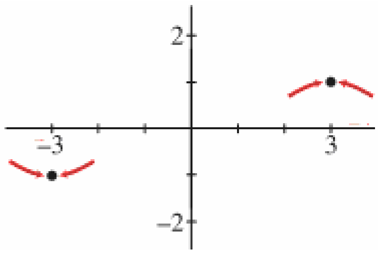
- $f'(x)=\dfrac{9\left(x^2+9\right)-9x\cdot 2x}{\left(x^2+9\right)^2}=\dfrac{9x^2+81-18x^2}{\left(x^2+9\right)^2}=\dfrac{-9x^2+81}{\left(x^2+9\right)^2}=0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad -9x^2+81=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=-3 \rightarrow \text{Punto}: \left(-3,\ \dfrac{-3}{2}\right) \\ x_2=\ \ 3 \rightarrow \text{Punto}: \left(3,\ \dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$



Mínimo en $\left(-3,\ \dfrac{-3}{2}\right)$

Máximo en $\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$.



EJERCICIO 26 : Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la siguiente función: *f(x)* $=(x-1)^2(x+5)$

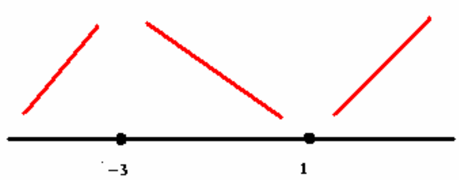
Solución:

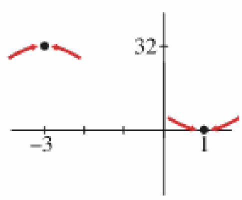
- $f'(x)=2(x-1)(x+5)+(x-1)^2=(x-1)[2(x+5)+(x-1)]=(x-1)(2x+10+x-1)=(x-1)(3x+9)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 & \rightarrow \quad \text{Punto}: \quad (1,\ 0) \\ x=-3 & \rightarrow \quad \text{Punto}: \quad (-3,\ 32) \end{cases}$$

Máximo en (–3, 32)

Mínimo en (1, 0).



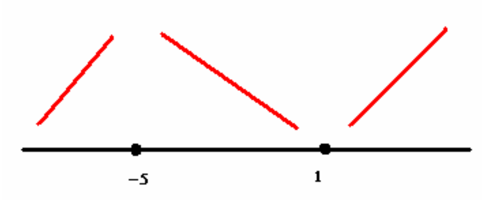


EJERCICIO 27 : Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos: $f(x)=x^3+6x^2-15x$

Solución:

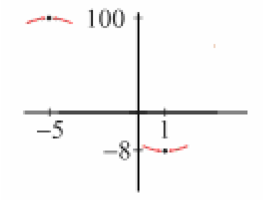
- $f'(x)=3x^2+12x-15=0\Rightarrow x^2+4x-5=0$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2};\ x=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2}\begin{cases}x=1 & \rightarrow \quad \text{Punto } (1,-8)\\ x=-5 & \rightarrow \quad \text{Punto } (-5,\ 100)\end{cases}$$



Máximo en $(-5{,}100)$

Mínimo en $(1,\ -8)$.



EJERCICIO 28 : Averigua los puntos de tangente horizontal de la función: $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$

Solución:

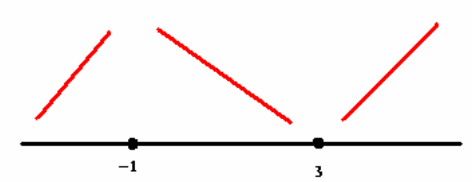
- $f'(x)=\dfrac{-2x(x+2)-(3-x^2)}{(x+2)^2}=\dfrac{-2x^2-4x-3+x^2}{(x+2)^2}=\dfrac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2}$
- $f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad -x^2-4x-3=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+4x+3=0 \quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}\begin{cases}x=-1 & \rightarrow \quad \text{Punto } (-1,\ 2)\\ x=-3 & \rightarrow \quad \text{Punto } (-3,\ 6)\end{cases}$$

EJERCICIO 29 : Halla y representa gráficamente los máximos y mínimos de la función:
$$\boldsymbol{y=x^3-3x^2-9x+1}$$

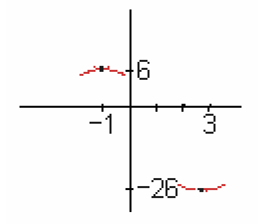
Solución: D(f) = D(f ') = R

- $y'=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=0 \Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}==\dfrac{2\pm 4}{2}\begin{cases}x=3 & \rightarrow \quad \text{Punto } (3,\ -26)\\ x=-1 & \rightarrow \quad \text{Punto } (-1,\ 6)\end{cases}$



Máximo en $(-1{,}6)$

Mínimo en $(3,\ -26)$.



EJERCICIO 30 : Determina los puntos de tangente horizontal de la función: $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$

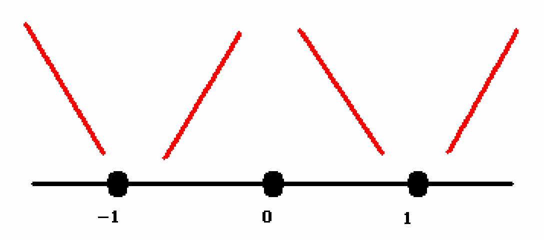
Solución:

- $f'(x)=\dfrac{3x^2(x+2)-x^3}{(x+2)^2}=\dfrac{3x^3+6x^2-x^3}{(x+2)^2}=\dfrac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}$
- $f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x^3+6x^2=0 \quad\Rightarrow\quad x^2(2x+6)=0\begin{cases}x=0 & \rightarrow \quad \text{Punto } (0,\ 0)\\ x=-3 & \rightarrow \quad \text{Punto } (-3,\ 27)\end{cases}$

EJERCICIO 31 : Halla y representa gráficamente los puntos singulares de la función: $f(x)=x^4-2x^2$

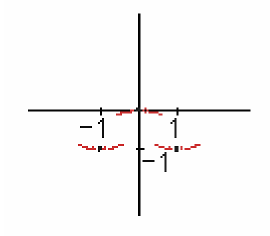
Solución:

- $f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)=0\begin{cases}x=-1 & \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (-1,\ -1)\\ x=0 & \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (0,\ 0)\\ x=1 & \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (1,\ -1)\end{cases}$



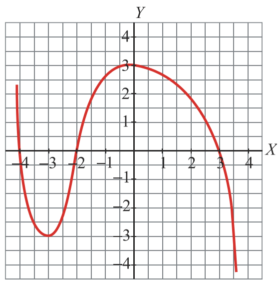
Máximo en $(0,0)$

Mínimo en $(-1,-1)$ y $(1,-1)$



REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

EJERCICIO 32 : La siguiente gráfica corresponde a la función *f*(*x*). A partir de ella, indica:



a) **Máximos y mínimos.**
b) **Puntos de corte con los ejes.**
c) **Ramas infinitas.**
d) **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} f'(-3)=0 \\ f(-3)=-3 \end{array}\right\}$ Hay un mínimo en $(-3,-3)$

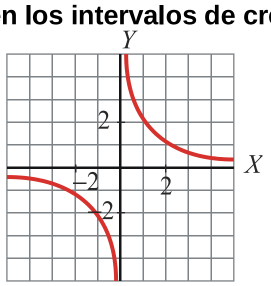
$\left.\begin{array}{l} f'(0)=0 \\ f(0)=3 \end{array}\right\}$ Hay un máximo en $(0,\ 3)$

b) $(-4,\ 0)$, $(-2,\ 0)$, $(3,\ 0)$ y $(0,\ 3)$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

d) Decrece en $(-\infty,\ -3)$ y en $(0,\ +\infty)$; crece en $(-3,\ 0)$.

EJERCICIO 33 : Dada la gráfica de *f*(x), di cuáles son sus asíntotas e indica la posición de la curva respecto a ellas. Halla también los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



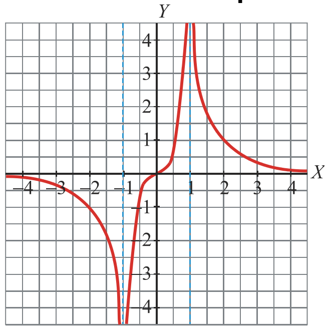
Solución:

- Asíntota vertical: $x=0 \Rightarrow$ Posición de la curva: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$; $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

  Asíntota horizontal: $y=0 \Rightarrow$ Posición de la curva: $\begin{cases} \text{Si} \quad x \to -\infty, \quad y<0 \\ \text{Si} \quad x \to +\infty, \quad y>0 \end{cases}$

- La función es decreciente en $(-\infty,\ 0)$ y en $(0,\ +\infty)$.

EJERCICIO 34 : A partir de la gráfica de $f(x)$:



a) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?
b) Di cuáles son sus asíntotas.
c) Indica la posición de la curva respecto a las asíntotas verticales.

Solución:

a) (0, 0)

b) Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$

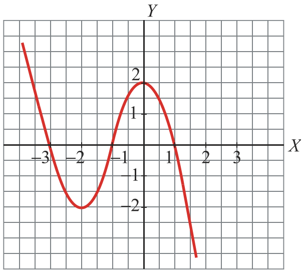
Asíntota horizontal: $y = 0$

c) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

EJERCICIO 35 : Representa una función polinómica $f(x)$, de la que sabemos que :

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es 0 en $(-2, -2)$ y en $(0, 2)$.**
- **Corta a los ejes en $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$.**

Solución:

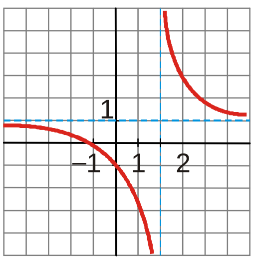


EJERCICIO 36 : Representa una función *f(x)*, de la que sabemos lo siguiente:

- **La derivada no se anula en ningún punto.**
- **La función es decreciente.**
- **Corta a los ejes en (-1, 0) y en (0,-1)**
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$
- **Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$. Además:**

$$\begin{cases} \text{Si } x \to -\infty,\ y < 1 \\ \text{Si } x \to -\infty,\ y > 1 \end{cases}$$

Solución:



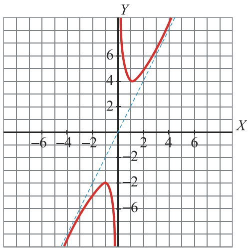
EJERCICIO 37 : Representa gráficamente una función $f(x)$, de la que conocemos lo siguiente :

- **Su derivada se anula en $(-1, -4)$ y en $(1, 4)$.**
- **No corta a los ejes.**
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

- **Tiene una asíntota oblicua, que es $y = 2x$. Además:**

$$\begin{cases} \textbf{Si} \quad x \to -\infty, & \textbf{la curva está por debajo de la asíntota.} \\ \textbf{Si} \quad x \to +\infty, & \textbf{la curva está por encima de la asíntota.} \end{cases}$$

Solución:



EJERCICIO 38 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = x^3 + 3x^2$

Solución:

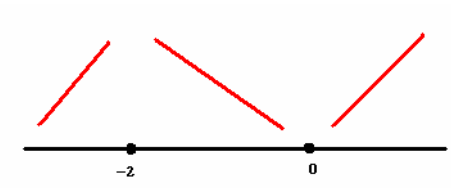
- Dominio: D(f) = R
- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \to \text{Punto } (0,0) \\ x = -2 \to \text{Punto } (-2,\ 4) \end{cases}$

Con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \to$ Punto $(0,\ 0)$

- Ramas infinitas: $\lim_{x\to+\infty} \left(x^3 + 3x^2\right) = +\infty;\qquad \lim_{x\to-\infty} \left(x^3 + 3x^2\right) = -\infty$
- Monotonía y extremos:
D(f) = R

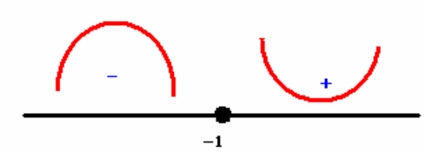
$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \to \text{Punto } (0,0) \\ x = -2 \to \text{Punto } (-2,\ 4) \end{cases} \end{cases}$$



Creciente: (-∞,-2) ∪ (0,∞)
Decreciente: (-2,0)
Máximo: (-2,4)
Mínimo: (0,0)

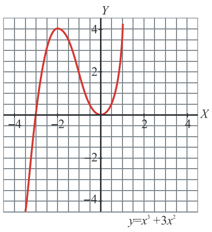
- Curvatura y puntos de inflexión:
D(f) = D(f ') = R

$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$



Cóncava: (-∞,-1)
Convexa: (-1,∞)
Punto de Inflexión: (-1,2)

- Gráfica:



EJERCICIO 39 : Estudia y representa la función: $f(x) = x^4 - 2x^2$

Solución:

- Dominio: D(f) = R
- Puntos de corte con los ejes:

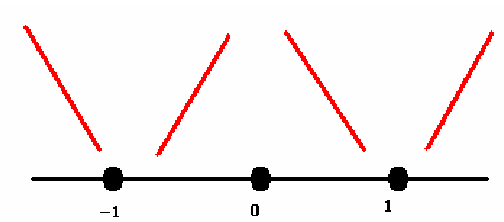
$$\text{Con el eje } X \to x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \to \text{Punto}(-\sqrt{2},\ 0) \\ x = 0 \to \text{Punto } (0,\ 0) \\ x = -\sqrt{2} \to \text{Punto}(-\sqrt{2},\ 0) \end{cases}$$

$$\text{Con el eje } Y \to x = 0 \to y = 0 \to \text{Punto } (0,0)$$

- Ramas infinitas: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4 - 2x^2) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4 - 2x^2) = +\infty$
- Monotonía y extremos:

D(f) = R

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

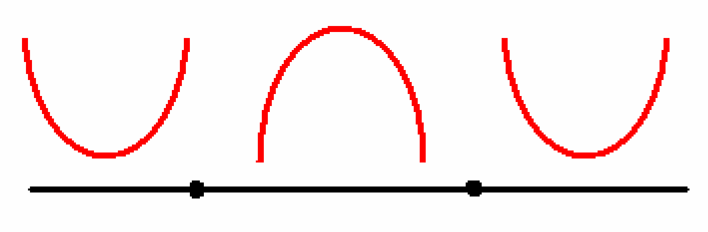


Creciente: (-1,0) ∪ (1,+∞)
Decreciente: (-∞,-1) ∪ (0,1)
Máximo: (0,0)
Mínimo: (-1,-1), (1,-1)

- Curvatura y puntos de inflexión:

D(f) = D(f ') = R

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = R \\ f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1/3} \end{cases}$$

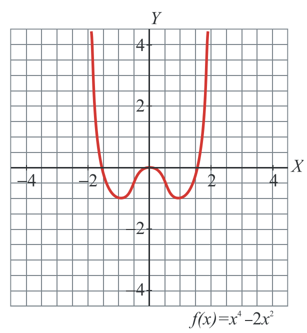


Cóncava: $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

Convexa: $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(+\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$

Punto de Inflexión: $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{5}{9}\right)$

- Gráfica:



EJERCICIO 40 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$

Solución:

- Dominio = **R**- {2}
- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{3x}{x-2}=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (0,\,0)$$

$$\text{Con el eje } Y \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (0,\,0)$$

- Asíntota vertical: $x=2$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

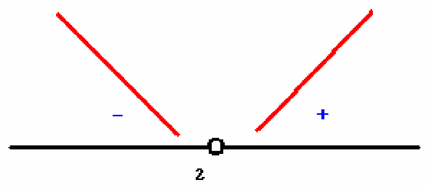
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x-2}=3, \text{ con } y>3$$

Asíntota horizontal: $y=3$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x-2}=3, \text{ con } y<3$$

- Monotonía y extremos:
D(f) = R – {2}

$$f'(x)=\frac{3(x-2)-3x}{(x-2)^2}=\frac{3x-6-3x}{(x-2)^2}=\frac{-6}{(x-2)^2}\Rightarrow\begin{cases}D(f')=R-\{2\}\\ f'(x)=\dfrac{-6}{(x-2)^2}=0\Rightarrow -6=0\Rightarrow \text{No tiene solución}\end{cases}$$



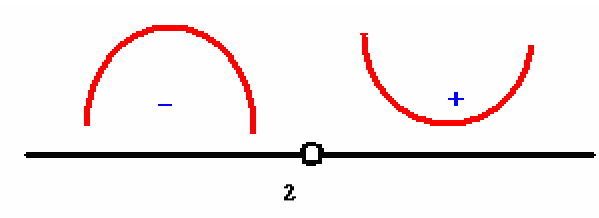
Creciente: (0,∞)

Decreciente: (-∞,0)

No existe ni máximo ni mínimo

- Curvatura y puntos de inflexión:
D(f) = D(f ') = R – {2}

$$f''(x)=\frac{0.(x-2)^2-(-6).2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{12}{(x-2)^3}\Rightarrow\begin{cases}D(f')=R-\{2\}\\ f''(x)=0\Rightarrow\dfrac{12}{(x-2)^3}=0\Rightarrow \text{No tiene solución}\end{cases}$$

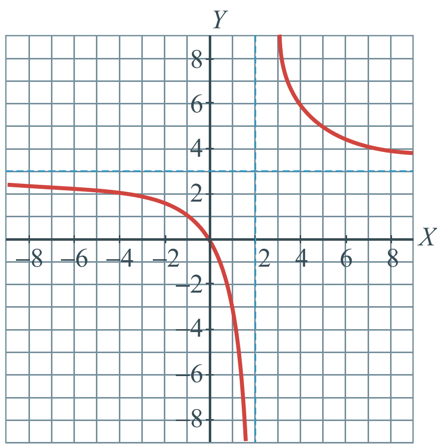


Cóncava: (-∞,0)

Convexa: (0,+∞)

Punto de Inflexión: No existe

- Gráfica:



$f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$

EJERCICIO 41 : Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes: $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

Solución:

- Dominio = **R** – {-1}
- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \to \quad y=0 \quad \to \quad \frac{x^2}{x+1}=0 \quad \to \quad x=0 \quad \to \quad \text{Punto } (0,\,0)$$

$$\text{Con el eje } Y \to \quad x=0 \quad \to \quad y=0 \quad \to \quad \text{Punto } (0,\,0)$$

- Asíntotas verticales: $x=-1$ $\quad \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty; \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=\pm\infty \Rightarrow$ No existe asíntota horizontal

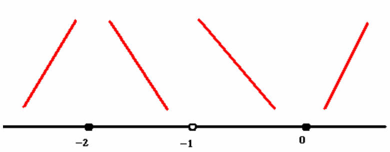
Asíntota oblicua: y = mx + n

$$\left\{\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+x}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{x+1}-1.x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{x+1}=\dfrac{-1}{1}=-1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow y=x-1 \Rightarrow \begin{cases} f(100)>A\sin t(100) \\ f(-100)<A\sin t(-100) \end{cases}$$

- Monotonía y extremos:
  D(f) = R – {-1}

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2.1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\Rightarrow\begin{cases} D(f')=R-\{-1\} \\ f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow x(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x+2=0\Rightarrow x=-2\end{cases}\end{cases}$$

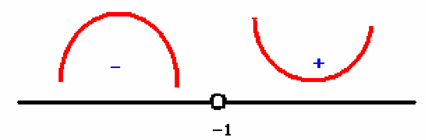


Creciente: (-∞,-2) ∪ (0,+∞)
Decreciente: (-2,-1) ∪ (-1,0)
Máximo (-2,-4) y Mínimo (0,0)

- Curvatura y puntos de inflexión:
  D(f) = D(f ') = R – {-1}

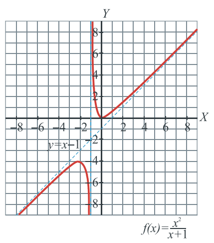
$$f''(x)=\frac{(2x+2).(x+1)^2-(x^2+2x).2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(2x+2).(x+1)-(x^2+2x).2}{(x+1)^3}=\frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} D(f')=R-\{-1\} \\ f''(x)=0\Rightarrow\dfrac{2}{(x+1)^3}=0\Rightarrow \text{No tiene solución}\end{cases}$$



Cóncava: (-∞,-1)
Convexa: (-1,+∞)
Punto de Inflexión: No existe

- Gráfica:



EJERCICIO 42 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^3}{x-2}$

Solución:

- Dominio = **R** – {2}
- Puntos de corte con los ejes:

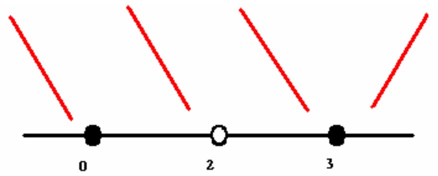
  Con el eje $X \to \quad y=0 \quad \to \quad \dfrac{x^3}{x-2}=0 \quad \to \quad x=0 \quad \to$ Punto $(0,\,0)$

  Con el eje $Y \to \quad x=0 \quad \to \quad y=0 \quad \to$ Punto $(0,\,0)$
- Asíntota vertical: $x=2$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

  Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el grado del denominador). $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$

- Monotonía y extremos:
  D(f) = R – {2}

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2}=\frac{3x^3-6x^2-x^3}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}\Rightarrow\begin{cases}D(f')=R-\{2\}\\ f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x^2(x-3)=0\Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=3\end{cases}\end{cases}$$



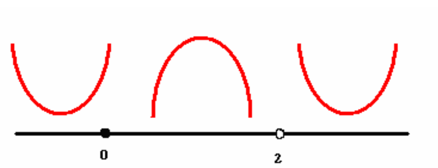
Creciente: (3,+∞)
Decreciente: (-∞,0) ∪ (0,2) ∪ (3,+∞)
Mínimo: (3,27)

- Curvatura y puntos de inflexión:
  D(f) = D(f ') = R – {2}

$$f''(x)=\frac{(6x^2-12x)(x-2)^2-(2x^3-6x^2)2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{(6x^2-12x)(x-2)-(2x^3-6x^2)2}{(x-2)^3}=$$

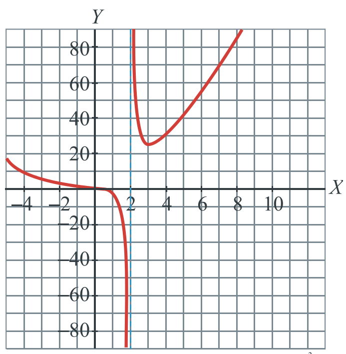
$$\frac{6x^3-12x^2-12x^2+24x-4x-2x^3+12x^2}{(x-2)^3}=\frac{4x^3-12x^2+20x}{(x-2)^3}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}D(f')=R-\{2\}\\ f''(x)=0\Rightarrow\dfrac{4x^3-12x^2+20x}{(x-2)^3}=0\Rightarrow 4x^3-12x^2+20x=0\Rightarrow 4x(x^2-3x+5)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x^2-3x+5=0\Rightarrow \text{Notienesolución}\end{cases}\end{cases}$$



Cóncava: (0,2)
Convexa: (-∞,0) ∪ (2,+∞)
Punto de Inflexión: (0,0)

- Gráfica:



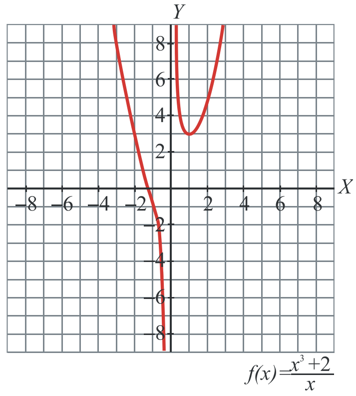
$f(x)=\dfrac{x^3}{x-2}$

EJERCICIO 43 : Representa gráficamente la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes: $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x}$

Solución:

- Dominio = **R** - {0}
- Puntos de corte con los ejes: (-1,26;0)
- Asíntota vertical: $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

  Rama parabólica: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$
- Monotonía y extremos:
  - Creciente (1,+∞)
  - Decreciente (-∞,0) ∪ (0,1)
  - Mínimo (1,3)
- Curvatura y puntos de inflexión
  - Cóncava: (-1,26;0)
  - Convexa: (-∞;-1,26) ∪ (0,+∞)
  - Punto de inflexión: (-1,26;0)
- Gráfica:

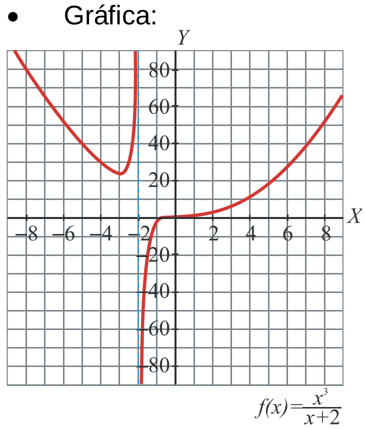


EJERCICIO 44 : Estudia y representa la función: $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$

Solución:

- Dominio = **R** - {-2}
- Puntos de corte con los ejes: (0,0)
- Asíntota vertical: $x = -2$ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

  Rama parabólica $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$
- Monotonía y extremos:
  - Creciente (-3,-2) ∪ (-2,+∞)
  - Decreciente (-∞,-3)
  - Mínimo (-3,27)
- Curvatura y puntos de inflexión: a un número entre -2 y 0
  - Cóncava: (-2,a)
  - Convexa: (-∞;-2) ∪ (a,+∞)
  - Punto de inflexión: (a,f(a))
- Gráfica:

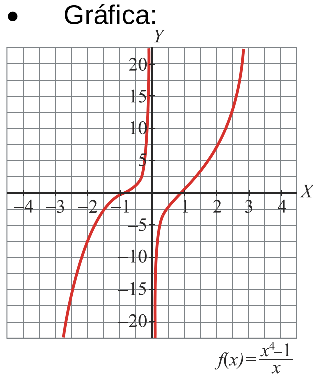


EJERCICIO 45 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x}$

Solución:

- Dominio = **R** - {0}
- Puntos de corte con los ejes: (1,0) y (-1,0)
- Asíntota vertical: $x = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\leftarrow 0^+} f(x) = -\infty$

  Rama infinitas: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
- Monotonía y extremos:
  - Creciente R – {o}
- Curvatura y puntos de inflexión:
  - Cóncava: (-∞;-0,58) ∪ (0;0,58)
  - Convexa: (--0,58;0) ∪ (0,+∞)
  - Punto de inflexión: (-0,58;1,54) y (0,58;-1,54)
- Gráfica:



EJERCICIO 46 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

Solución:

- Dominio = **R** - {-1,1}
- Puntos de corte con los ejes: (0,0)
- Asíntotas verticales: $x=-1,\ x=1$

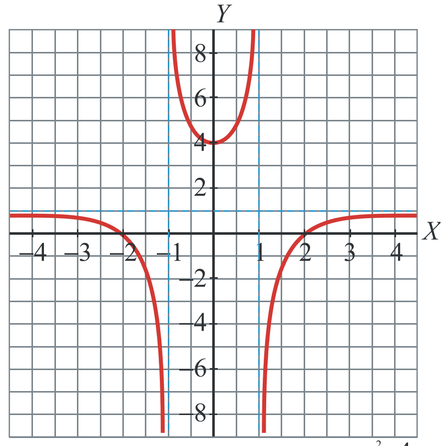
$$x=-1 \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

$$x=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

Asíntota horizontal: $y=1 \Rightarrow \begin{cases} f(100)<1 \\ f(-100)<1 \end{cases}$

- Monotonía y extremos:
  - Creciente $(0,1) \cup (1,+\infty)$
  - Decreciente $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$
  - Máximo: (0,4)
- Curvatura y puntos de inflexión:
  - Cóncava: $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$
  - Convexa: (-1,1)
  - Punto de inflexión: No existen

- Gráfica:



$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

EJERCICIO 47 : Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

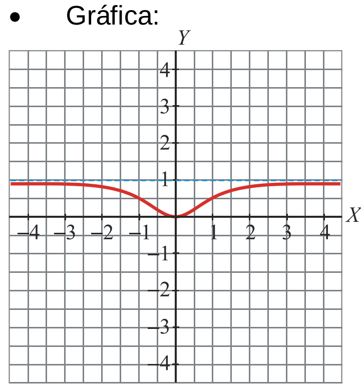
Solución:

- Dominio = **R**
- Puntos de corte con los ejes: (0,0)
- No tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal: $y=1 \Rightarrow \begin{cases} f(100)<1 \\ f(-100)<1 \end{cases}$

- Monotonía y extremos:
  - Creciente $(0,+\infty)$
  - Decreciente $(-\infty,0)$
  - Mínimo: (0,0)
- Curvatura y puntos de inflexión:
  - Cóncava: $(-\infty;-0{,}58) \cup (0{,}58;+\infty)$
  - Convexa: (-0,58;0,58)
  - Punto de inflexión: (-0,58;0,25) y (0,58;0,25)

- Gráfica:



$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

EJERCICIO 48 : Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2}$ estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

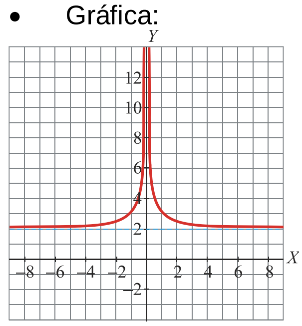
- Dominio = **R** – {0}
- Puntos de corte con los ejes: No existen
- Asíntota vertical: $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

Asíntota horizontal: $y=2 \Rightarrow \begin{cases} f(100)>2 \\ f(-100)>2 \end{cases}$

- Monotonía y extremos:
  - Creciente $(-\infty,0)$
  - Decreciente $(0,+\infty)$
  - Máximo y Mínimo: No existen
- Curvatura y puntos de inflexión:
  - Cóncava: R – {0}
  - Punto de inflexión: No existe

- Gráfica:



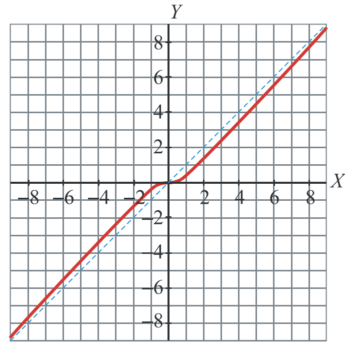
$f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2}$

EJERCICIO 49 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

Solución:

- Dominio = **R**
- Puntos de corte con los ejes: (0,0)
- Asíntota vertical: *No tiene*

  Asíntota oblicua: $y = x \Rightarrow \begin{cases} f(100) < A\sin t(100) \\ f(-100) > A\sin t(-100) \end{cases}$
- Monotonía y extremos:
  - Creciente R
  - Máximo y Mínimo: No existen
- Curvatura y puntos de inflexión:
  - Cóncava: $(-\infty,0)$
  - Convexa: $(0,+\infty)$
  - Punto de inflexión: (0,0)
- Gráfica:



$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$

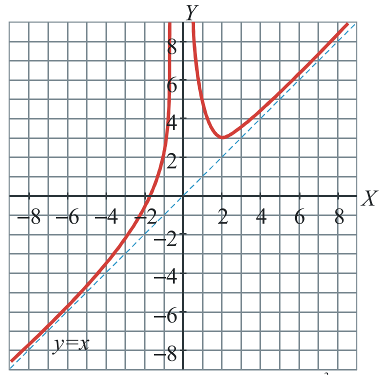
EJERCICIO 50 : Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ **estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.**

Solución:

- Dominio = **R** – {0}
- Puntos de corte con los ejes: (-1,6;0)
- Asíntota vertical: $x = 0$

  $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

  Asíntota oblicua: $y = x \Rightarrow \begin{cases} f(100) > A\sin t(100) \\ f(-100) > A\sin t(-100) \end{cases}$
- Monotonía y extremos:
  - Creciente $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$
  - Decreciente: (0,2)
  - Mínimo: (2,3)
- Curvatura y puntos de inflexión:
  - Convexa: R – {0}
  - Punto de inflexión: No tiene
- Gráfica:



$f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}$

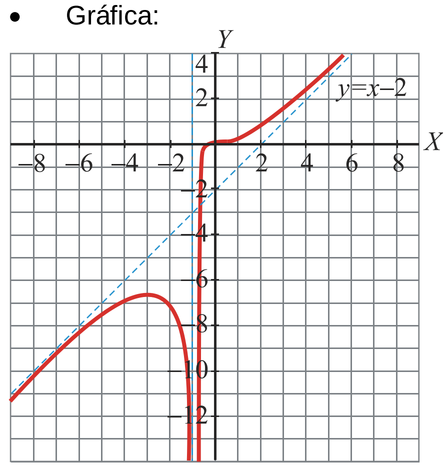
EJERCICIO 51 : Estudia y representa la función: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}$

Solución:

- Dominio = **R** – {-1}
- Puntos de corte con los ejes: (0;0)
- Asíntota vertical: $x = -1$

  $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$

  Asíntota oblicua: $y = x-2 \Rightarrow \begin{cases} f(100) > A\sin t(100) \\ f(-100) < A\sin t(-100) \end{cases}$
- Monotonía y extremos:
  - Creciente $(-\infty,-3) \cup (-1,+\infty)$
  - Decreciente: (-3,-1)
  - Máximo: (-3,-27/4)
- Curvatura y puntos de inflexión:
  - Cóncava: $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$
  - Convexa: $(0,+\infty)$
  - Punto de inflexión: (0,0)
- Gráfica:



$f(x)=\frac{x^3}{x^2+2x+1}$

EJERCICIO 52 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

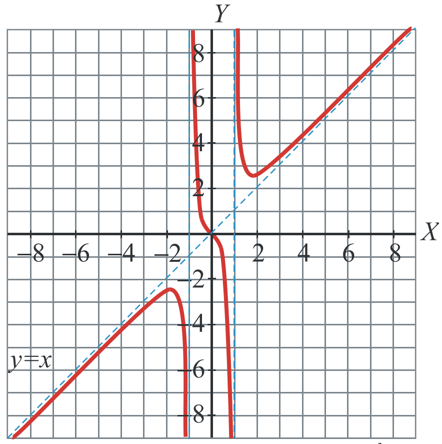
Solución:

- Dominio = **R** – {-1,1}
- Puntos de corte con los ejes: (0;0)
- Asíntotas verticales: $x=-1$, $x=1$

  $x=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty; \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$

  $x=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty; \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

  Asíntota oblicua: $y=x \Rightarrow \begin{cases} f(100) > A\sin t(100) \\ f(-100) < A\sin t(-100) \end{cases}$
- Monotonía y extremos:
  - Creciente (-∞;-1,73) ∪ (1,73;+∞)
  - Decreciente (-1,73;-1) ∪ (-1,1) ∪ (1;1,73)
  - Máximo (-1,73;-2,6)
  - Mínimo: (1,73;2,6)
- Curvatura y puntos de inflexión:
  - Cóncava: (-∞,-1) ∪ (0,1)
  - Convexa: (-1,0) ∪ (1,+∞)
  - Punto de inflexión: (0,0)
- Gráfica:



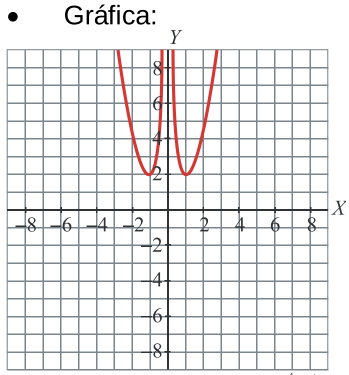
$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

EJERCICIO 53 : Estudia y representa la función: $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$

Solución:

- Dominio = **R** – {0}
- Puntos de corte con los ejes: No tiene
- Asíntota vertical: $x=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty; \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

  Rama parabólica $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$
- Monotonía y extremos:
  - Creciente (-1,0) ∪ (1,+∞)
  - Decreciente (-∞,-1) ∪ (0,1)
  - Mínimo: (-1,2) y (1,2)
- Curvatura y puntos de inflexión:
  - Convexa: R – {0}
  - Punto de inflexión: No tiene
- Gráfica:



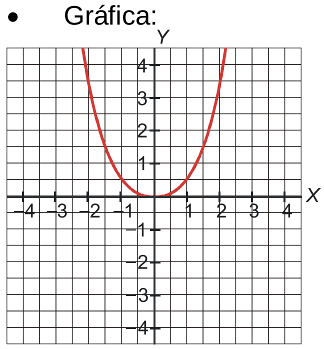
$f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$

EJERCICIO 54 : Estudia y representa la función: $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$

Solución:

- Dominio = **R**
- Puntos de corte con los ejes: (0,0)
- Asíntotas verticales: No tiene.

  Rama parabólica $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$
- Monotonía y extremos:
  - Creciente (0,+∞)
  - Decreciente (-∞,0)
  - Mínimo: (0,0)
- Curvatura y puntos de inflexión:
  - Convexa: R
  - Punto de inflexión: No tiene
- Gráfica:



$f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$

EJERCICIO 55 :

a) Dibuja la gráfica de la función: $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x$

b) Ayúdate de la gráfica para estudiar los siguientes aspectos de $f(x)$: dominio, continuidad e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución:

a)

- Dominio = **R**
- Puntos de corte con los ejes: (0,0), (4,86;0) y (-1,85;0)
- Asíntotas verticales: No tiene.

  Rama parabólica $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
- Monotonía y extremos:

  Creciente (-∞,-1) ∪ (3,+∞)

  Decreciente (-1,3)

  Máximo (-1,5/3)

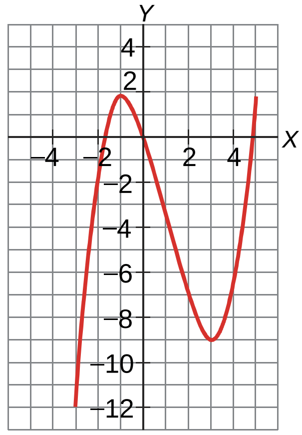
  Mínimo: (3,-9)
- Curvatura y puntos de inflexión:

  Cóncava: (-∞,-1)

  Convexa: (-1,+∞)

  Punto de inflexión: (-1,-11/3)

- Gráfica:



b) • Dominio = **R**

- Es una función continua.
- Creciente en $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ y decreciente en $(-1,3)$.