TEMA 3 – DETERMINANTES

Cálculo de determinantes

EJERCICIO 1 : Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-1 & b+2 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix}$ m) $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 10a & 10b & 10c \\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \end{vmatrix}$

ñ) $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$ o) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & -1 \\ x & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & x & -1 \\ -1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ p) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ q) $\begin{vmatrix} m & m & m & m \\ m & c & c & c \\ m & c & b & b \\ m & c & b & a \end{vmatrix}$ r) $\begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 1 & a & b+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

EJERCICIO 2 : Resuelve, enunciando las propiedades que utilices:

a) $\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} x & x & x & 5 \\ x & x & 5 & x \\ x & 5 & x & x \\ 5 & x & x & x \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} x+2 & 3 & 4 \\ 4 & x+2 & 3 \\ 4 & 3 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ x & 1 & 3 & 4 \\ x & 1 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Propiedades de los determinantes

EJERCICIO 3 : Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$. Halla el valor del determinante $\begin{vmatrix} 5a+b & 3a+4b \\ 5c+d & 3c+4d \end{vmatrix}$.

EJERCICIO 4 : Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3$ Calcular $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix}$

Enuncia, correctamente las propiedades de los determinantes que utilices.

EJERCICIO 5 : Aplicad las propiedades de los determinantes (o sea, no desarrolléis el determinante) para calcular una solución de la siguiente ecuación de tercer grado en x : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & 8 \\ 1 & 8 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

EJERCICIO 6 : Probar que, cualquiera que sean los valores a, b, c, d, los siguientes determinantes son nulos: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ b & c & d \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

EJERCICIO 7 : Determinar, justificando la respuesta cuáles de los siguientes determinantes son nulos y cuáles no:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 8 : Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular: $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$

EJERCICIO 9 : Demuestra, sin desarrollarlos, que los siguientes determinantes son múltiplos de 6.

a) $\begin{vmatrix} 9 & 1 & -7 \\ 3 & 5 & 2 \\ -6 & 4 & -8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 14 \end{vmatrix}$

EJERCICIO 10 : Probar sin desarrollarlo que

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

EJERCICIO 11 : El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para a = 3. Comprueba que es así sin desarrollarlo.

EJERCICIO 12 : Demuestra sin desarrollarlo que el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 13.

EJERCICIO 13 : Conociendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$, calcular, enunciando las propiedades que utilices:

a) $\begin{vmatrix} g+a & h+b & i+c \\ 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} i & h & g \\ 3f & 3e & 3d \\ c & b & a \end{vmatrix}$

EJERCICIO 14 : Conocido $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & a & -c \\ -1 & 4 & b \end{vmatrix} = 10$ Calcular: $\begin{vmatrix} 2b & -4 & 1 \\ 4c & 2a & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

EJERCICIO 15 : Sabiendo que |A| = -2 y |B| = 3 y que A y B son matrices de orden 3, calcular:
a) |2A| b) |AB| c) $|B^{-1}|$ d) $|A^t|$ e) $|B^2|$ f) |-A|

EJERCICIO 16 : Resolver la ecuación det(A– xI) = 0, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, I la matriz identidad de orden 3 y $x \in \Re$ la incógnita.

EJERCICIO 17 : Desarrolla dando el resultado en forma de producto de factores: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

EJERCICIO 18 : Prueba que:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = ab$ b) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

Rango de una matriz

<u>EJERCICIO 19</u> : Calcular el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 13 & -8 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 20</u> : Determina, según los valores de los parámetros, el rango de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2x \\ x & 1 & 3 \\ 1 & 7 & x \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 & 1 \\ 1 & -m & -5 & 2 \\ 0 & 1 & m-2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & x \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} -m & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & m & 2 \\ 3/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo de la inversa de una matriz por determinantes

<u>EJERCICIO 21</u> : ¿ Tiene inversa la siguiente matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$?

<u>EJERCICIO 22</u> : Calcular la inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 23</u> :¿Para qué valores del parámetro a tiene inversa la matriz A? Calcula la inversa para a=1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 24</u> : Estudia para qué valores de a no tiene inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 2 & a+1 & a-1 \\ -2a-1 & 0 & a \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 25</u>:¿Para qué valores de "k" existe la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ k & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calcularla para k = 1 si es posible.

<u>EJERCICIO 26</u> : Averiguar para que valores del parámetro k la matriz A tiene inversa. Calcularla, si es posible, para k = 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix}$

EJERCICIO 27 : Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de "t" para los que la matriz A tiene inversa.
b) Calcular la inversa de A para t = 1
c) Tomando la matriz A para t = 1, resolver el siguiente sistema matricial : $A.X + B^t = 2.C$

$$\text{siendo } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 28: Hallar los valores de k para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & k+1 & k \\ -k & -2k & 0 & k^2 \end{pmatrix}$

a) No tiene inversa b) Tiene rango 3

EJERCICIO 29 : Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$ averiguar para qué valores de a, la matriz no tiene inversa. Calcular la inversa de A cuando a = 2.

EJERCICIO 30 : ¿ Para que valores de t existe la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & t & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

Calcularla para t = 2.

EJERCICIO 31 : Halla los valores del parámetro "t" para los cuales no tiene inversa la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$. Calcula, si es posible, A^{-1} cuando t = 1

EJERCICIO 32 : Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores reales de x para los que A tiene inversa.
b) Halla la matriz Y cuadrada de orden 3 que es solución de la ecuación matricial AY + B = I siendo A la matriz anterior para x =3, I la matriz identidad de orden 3 y B la matriz: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolución de sistemas por la Regla de Cramer

EJERCICIO 33 : Resuelve, aplicando el método de Cramer, si es posible, los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 3y & - & 2z & = & -2 \\ x & + & y & & & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array}\right\}$ b) $\begin{cases} x+y-2z=-4 \\ 2x-3y-z=-5 \\ x-5z=-7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x-3y+5z=5 \\ -6x+2y-z=-5 \\ 2x-2y+3z=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-z=4 \\ -4x+4y+z=-6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-z=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-z=4 \\ -4x+4y+z=7 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

EJERCICIO 34 : Clasificar y resolver en función de los valores los parámetro los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

a) $\begin{cases} kx+y+z=5 \\ 2x+y-kz=-7 \\ kx+y+2z=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ -x+y/2=-2 \\ x+ky=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2z=1 \\ x+(a+1)y+3z=1 \\ x+az=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} mx+y=2-2m \\ x+my=m-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ ax+y-z=a-2 \\ 3x+ay+z=a-2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=4 \\ kx+y+3z=6 \\ x-2z=0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+ay+z=a+1 \\ (a+1)x+y-az=0 \\ 2x+y-z=1-a \end{cases}$ h) $\begin{cases} 4x-4z=0 \\ x-y+az=0 \\ -x-ay-z=0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} kx+y+z=4 \\ x-ky+z=1 \\ x+y+z=k+2 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ 2y+2z=-4+k \\ 2x+4y+k^2z=k+2 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 2x-3y-z=1 \\ x+y+2z=2 \\ ax-2y+z=3 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2x+3y+mz=0 \\ my-z=2 \\ mx+my+mz=m \end{cases}$

m) $\begin{cases} x+y+az=2 \\ x+ay+z=-1 \\ ax+y+z=-1 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 2x-y=a \\ ax+3y=4 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ ñ) $\begin{cases} x+y-az=1 \\ ax+y-z=1 \\ 2x+y-z=a \end{cases}$

EJERCICIO 35 : Discutir y resolver en los casos en que sea compatible determinado el siguiente sistema de ecuaciones lineales : $\begin{cases} (2+a)x+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ 2x-3y-z=a-2 \end{cases}$

EJERCICIO 36: Dado
$$\begin{array}{l} (a+1)x+y+z=3 \\ x+2y+az=4 \\ x+ay+2z=2a \end{array}$$

a) Discutirlo en función de los valores del parámetro a.
b) Resolverlo para a = 2