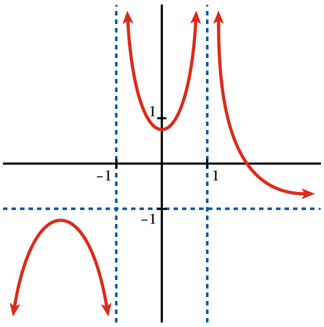
TEMA 5 – LÍMITES Y CONTINUIDAD

CÁLCULO DE LÍMITES: GRÁFICAMENTE

<u>EJERCICIO 1</u> : Halla, observando la gráfica de la función *f* (*x*), los siguientes límites:



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

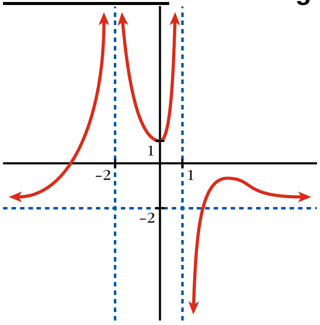
e) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ **g)** $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ c) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$ d) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ f) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ g) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{1}{2}$

<u>EJERCICIO 2</u> : Dada la gráfica de la función *f* (*x*), calcula los límites siguientes:



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$

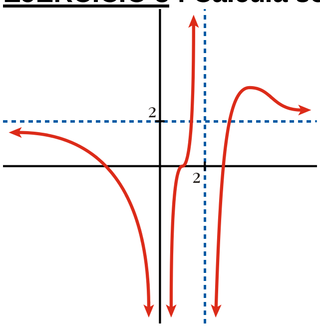
e) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ **g)** $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ c) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$ d) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ f) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ g) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$

<u>EJERCICIO 3</u> : Calcula sobre la gráfica de esta función:



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

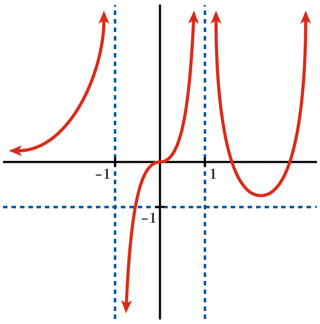
e) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ **g)** $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ c) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ d) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=+\infty$ f) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$ g) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$

EJERCICIO 4 : Halla los siguientes límites, observando la gráfica de la función $f(x)$:



a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to-1^-} f(x)$ **d)** $\lim_{x\to-1^+} f(x)$

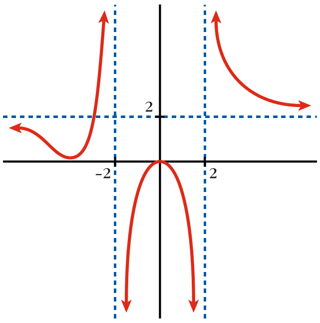
e) $\lim_{x\to1^-} f(x)$ **f)** $\lim_{x\to1^+} f(x)$ **g)** $\lim_{x\to0} f(x)$

Solución:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ c) $\lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ d) $\lim_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$

e) $\lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ f) $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ g) $\lim_{x\to0} f(x)=0$

EJERCICIO 5 : La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$. Calcula sobre ella:



a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to2^-} f(x)$ **d)** $\lim_{x\to2^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to-2^-} f(x)$ **f)** $\lim_{x\to-2^+} f(x)$ **g)** $\lim_{x\to0} f(x)$

Solución:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ c) $\lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ d) $\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$

e) $\lim_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$ f) $\lim_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$ g) $\lim_{x\to0} f(x)=0$

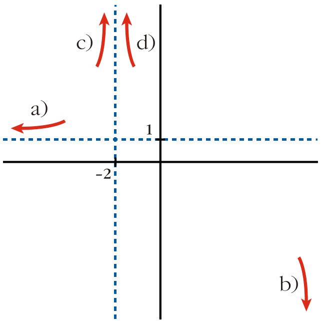
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LÍMITES

EJERCICIO 6 : Representa en una gráfica los siguientes resultados:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1 \ (f(x)>1 \text{ si } x\to-\infty)$ **b)** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

c) $\lim_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$ **d)** $\lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$

Solución:

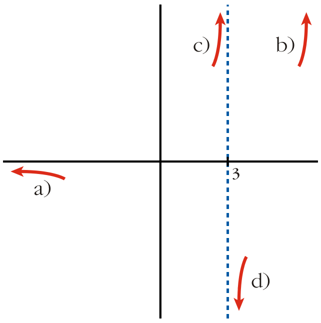


EJERCICIO 7 : Dibuja una gráfica en la que se reflejen los siguientes resultados:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \ (f(x)<0 \text{ si } x\to-\infty)$ **b)** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

c) $\lim_{x\to3^-} f(x)=+\infty$ **d)** $\lim_{x\to3^+} f(x)=-\infty$

Solución:

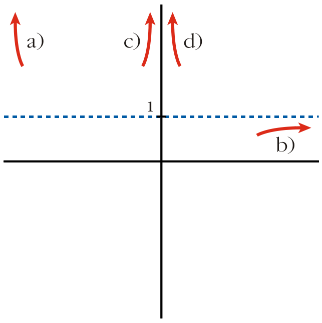


EJERCICIO 8 : Representa gráficamente estos resultados:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \ (f(x) < 1 \ \text{si} \ x \to +\infty)$

c) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Solución:

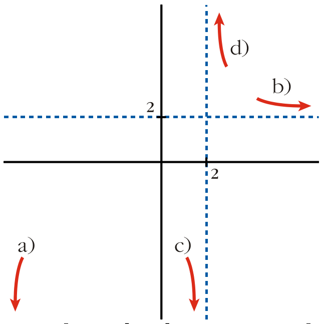


EJERCICIO 9 : Haz una gráfica en la que se reflejen estos resultados:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \ (f(x) > 2 \ \text{si} \ x \to +\infty)$

c) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ **d)** $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Solución:

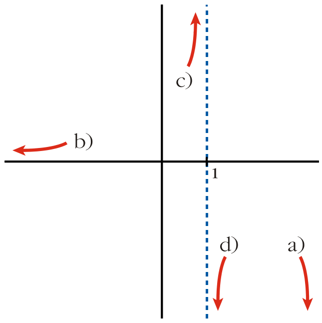


EJERCICIO 10 : Representa gráficamente los siguientes resultados:

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **b)** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \ (f(x) > 0 \ \text{si} \ x \to -\infty)$

c) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

Solución:



CÁLCULO DE LÍMITES

EJERCICIO 11 : **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(2^x - x^2 + 1\right)$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{\log x^2}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left[3x^2 - \sqrt{x^9 + 1}\right]$

d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x+1}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - 2}{\log x}$

f) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{2^x}$

g) $\lim_{x\to+\infty} \left(2^x - x^2\right)$

h) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$

i) $\lim_{x\to+\infty} \left(x^3 - \log x\right)$

j) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3^x}{x^2+1}$

k) $\lim_{x\to1} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^3 - 8x^2 + 7x - 2}$

l) $\lim_{x\to1} \left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^2-1}\right]$

m) $\lim_{x\to-1} \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1}$

n) $\lim_{x\to3} \left[\dfrac{2x}{x^2-9} - \dfrac{x+1}{x-3}\right]$

ñ) $\lim_{x\to2} \dfrac{2x^2 + x - 10}{x^3 - 3x^2 + 4}$

o) $\lim_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2}{2x+3} - \dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$

p) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{18x^4 + 3x^2}{2x^4 + 3}}$

q) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{6x+2}{3x+1}\right)^{x-1}$

r) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{8x^2 + 3x}{2x^2 + x}}$

s) $\lim_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2}{x+2} - \dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$

t) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)^{3x+1}$

u) $\lim_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2-2}{2x+1} - \dfrac{2x^2}{x+1}\right]$

v) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x+2}{\sqrt{9x^2+1}}$

w) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{3x+2}\right)^{x+1}$

x) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-1}$

y) $\lim_{x\to+\infty} \left[\dfrac{2x^2-1}{x+1} - \dfrac{x^2}{x+2}\right]$

z) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1+3x}{1+2x}\right)^{2x}$

1) $\lim_{x\to+\infty} \left[\dfrac{3x^2}{x+1} - \dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$

2) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x-4}{\sqrt{4x^2+1}}$

3) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{5x-2}\right)^{x^2}$

4) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-x^5 + 2x^4 + 3}{2x^5 + 3x}$

5) $\lim_{x\to3} \dfrac{x-3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$

6) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x^2+1}{2x+5}\right)^{5}$

7) $\lim_{x\to1} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1}$

8) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{4x^5 + 2x}$

9) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x-1}{4x+2}\right)^{x-5}$

10) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 + 3x}{x^2 + 2}$

11) $\lim_{x\to2} \left(\dfrac{3x}{x^2-4} - \dfrac{x+1}{x-2}\right)$

12) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5x-3}{3x+5}\right)^{2x}$

13) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - 2x}{x^2 + 2\sqrt{x}}$

14) $\lim_{x\to2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$

15) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{3x^2+2}\right)^{x+1}$

16) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$ **17)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{3x^3}{x^2-1}\right)$ **18)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+2}{5x+1}\right)^{3x+1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[e^x - x^2 + 1\right] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4-3x}{\log x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+3x}{\log x^2} = +\infty$

Porque una potencia es un infinito de orden superior a un logaritmo.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[3x^2 - \sqrt{x^9+1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-x^{\frac{9}{2}}\right] = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x+1} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2}{\log x} = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logartimos.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{2^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+1}{2^{-x}} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[2^x - x^2\right] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{-x} = 0$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x^3 - \log x\right] = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3^x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{-x}}{x^2+1} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x+1)(x-1)^2}{(3x-2)(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{3x-2} = 3$

l) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^2-1}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1-3}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-1}{0}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-2}{(x-1)(x+1)} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{(x-1)(x+1)} = -\infty \Rightarrow$ No existe el límite

m) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(3x-2)}{(x+1)^2(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{-5}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = +\infty \Rightarrow$ No existe el límite

n) $\lim\limits_{x\to 3} \left[\dfrac{2x}{x^2-9} - \dfrac{x+1}{x-3}\right] = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-\left(x^2+4x+3\right)}{(x+3)(x-3)} = = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{-18}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = -\infty \Rightarrow$ No existe el límite ñ) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^3-3x^2+4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+5}{(x+1)(x-2)}=\frac{9}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{2x+5}{(x+1)(x-2)}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x+5}{(x+1)(x-2)}=+\infty\Rightarrow$ No existe el límite

o) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2x+3}-\frac{x^3}{x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2(x^2+1)-x^3(2x+3)}{(2x+3)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2-2x^4-3x^3}{2x^3+3x^2+2x+3}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^4-3x^3+x^2}{2x^3+3x^2+2x+3}=-\infty$

p) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{18x^4+3x^2}{2x^4+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{18x^4+3x^2}{2x^4+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{18x^4}{2x^4}}=\sqrt{9}=3$

q) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x+2}{3x+1}\right)^{x-1}=\left(\frac{6}{3}\right)^{+\infty}=2^{+\infty}=+\infty$

r) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{8x^2+3x}{2x^2+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{8x^2+3x}{2x^2-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{8x^2}{2x^2}}=\sqrt{4}=2$

s) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x+2}-\frac{x^3}{x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2(x^2+1)-x^3(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2-x^4-2x^3}{x^3+2x^2+x+2}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+x^2}{x^3+2x^2+x+2}=-2$

t) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^{3x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}=0$

u) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-2}{2x+1}-\frac{2x^2}{x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2)(x+1)-2x^2(2x+1)}{(2x+1)(x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-2x-2-4x^3-2x^2}{2x^2+2x+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^3-x^2-2x-2}{2x^2+3x+1}=-\infty$

v) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{9x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{9x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x}{\sqrt{9x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x}{3x}=-1$

w) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{3x+2}\right)^{x+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty}=0$

x) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4}}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

y) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-1}{x+1}-\frac{x^2}{x+2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x^2-1)(x+2)-x^2(x+1)}{(x+1)(x+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+4x^2-x-2-x^3-x^2}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-x-2}{x^2+3x+2}=+\infty$

z) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{1+2x}\right)^{2x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}=+\infty$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2}{x+1}-\frac{x^3}{x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2(x^2+1)-x^3(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^4+3x^2-x^4-x^3}{x^3+x^2+x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^4-x^3+3x^2}{x^3+x^2+x+1}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x-4}{\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{4x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{2x}=-1$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{5x-2}\right)^{x^2}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{+\infty}=0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^5+2x^4+3}{2x^5+3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5+2x^4+3}{-2x^5-3x}=\dfrac{1}{-2}=\dfrac{-1}{2}$

5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^3-5x^2+3x+9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)^2\,(x+1)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)}=\dfrac{1}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)}=+\infty\Rightarrow$ No existe límite

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{2x+5}\right)^5=(+\infty)^5=+\infty$

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\,(x-1)\,(x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\,(x+1)}{x-1}=\dfrac{2}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x(x+1)}{x-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x(x+1)}{x-1}=+\infty\Rightarrow$ No existe límite

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{4x^5+2x}=+\infty$; porque la exponencial es un infinito de orden superior a cualquier polinomio.

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-1}{4x+2}\right)^{x-5}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{+\infty}=0$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3-3x}{x^2+2}=-\infty$

11) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{x+1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-(x+1)\,(x+2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-x^2-3x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-x^2-2}{x^2-4}=\dfrac{-6}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-x^2-2}{x^2-4}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{-x^2-2}{x^2-4}=-\infty\Rightarrow$ No existe el límite

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-3}{3x+5}\right)^{2x}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{+\infty}=+\infty$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x}{x^2+2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

14) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\,(x+3)}{(x-2)\,(x+1)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{5}{3}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{3x^2+2}\right)^{x+1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{+\infty}=0$

16) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\,(x+3)}{(x-2)\,(x+5)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+3}{x+5}=\dfrac{5}{7}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{3x^3}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2\,(x-1)-3x^3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-3x^2-3x^3}{x^2-1}==\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2}{x^2-1}=\dfrac{-3}{1}=-3$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{5x+1}\right)^{3x+1}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{+\infty}=0$

CONTINUIDAD

<u>EJERCICIO 12</u> : Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} 3x^2-2^x & \text{si } x<0 \\ x^2-x-1 & \text{si } 0\le x<1 \\ 1+\ln x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-1}{3} & \text{si } x<-1 \\ e^{x^2-1} & \text{si } -1\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>1 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 3^x & \text{si } x<0 \\ -x^2+x+1 & \text{si } 0\le x<1 \\ x+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

e) $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}$

f) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ 3x^2+1 & \text{si } 0\le x<1 \\ 4 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

g) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-5x-3}{x^2-1}$

h) $f(x)=\begin{cases} -2x-3 & \text{si } x<-1 \\ x^2-2 & \text{si } -1\le x<2 \\ 3x+1 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

Solución:

a)

- Si $x\neq 0$ y $x\neq 1$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(3x^2-2^x\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-x-1\right)=1 \\ f(0)=-1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x=0$

- En $x = 1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-x-1\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+\ln x\right)=1 \\ f(1)=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Hay una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

b) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}=\dfrac{x\,(x-3)\,(x+1)}{(x-3)\,(x+2)}$

- Dominio = **R** - {2, 3} $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en **R** - {2, 3}.

- En $x = 2$: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$ $\Rightarrow$ Hay una discontinuidad infinita en $x = 2$.

- En $x = 3$: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\,(x+1)}{x+2}=\dfrac{12}{5}$ $\Rightarrow$ Hay una discontinuidad evitable en $x = 3$.

c)

- Si $x\neq -1$ y $x\neq 1$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- En $x = -1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x^2-1}{3}=\dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} e^{x^2-1}=1 \\ f(-1)=1 \end{array}\right\}$ Hay una discontinuidad de salto finito en $x=-1$.

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} e^{x^2-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x} = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 1$.

d)

- *Dominio* = **R** ⇒Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \Rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 3^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(-x^2 + x + 1\right) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 0$

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(-x^2 + x + 1\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+2) = 3 \end{array}\right\}$ Hay una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$

e)

- Dominio: $x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{-3 \pm 7}{2} \quad \to \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \end{cases}$ ⇒ *Dominio* = **R** – {–5, 2}

- $f(x)$ es continua en **R** – {–5, 2}

- En x = -5: $\lim\limits_{x\to -5} f(x) = \lim\limits_{x\to -5} \dfrac{(3x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \lim\limits_{x\to -5} \dfrac{3x+4}{x+5} = \dfrac{-11}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$

Discontinuidad infinita en $x = -5$. Hay una asíntota vertical.

- En x = 2: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x+4}{x+5} = \dfrac{10}{7} \Rightarrow$ Discontinuidad evitable en $x = 2$.

f)

- *Dominio* = **R**

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \Rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(3x^2 + 1\right) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 0$

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(3x^2 + 1\right) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 4 = 4 \\ f(1) = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 1$

- Por tanto, $f(x)$ es continua en **R**.

g)

- *Dominio* = **R** – {–1, 1}⇒ $f(x)$ es continua en **R** – {–1, 1}

- En x = -1: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)^2(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \dfrac{0}{-2} = 0 \quad \to$

Discontinuidad evitable en $x = -1$

- En x = 1: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \dfrac{-4}{(0)}$. Hallamos los límites laterales.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ Discontinuidad infinita en $x = 1$. Hay una asíntota vertical.

h)
- *Dominio* = **R**
- Si $x \neq 1$ y $x \neq 2$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x = -1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (-2x-3) = -1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2-2) = -1 \\ f(-1) = -1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = -1$

- En $x = 2$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-2) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x+1) = 7 \end{array}\right\}$ $f(x)$ no es continua en $x = 2$, pues $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ $\Rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

<u>EJERCICIO 13</u> : Calcula el valor de *a* para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x^2 + a & \text{si } x < -1 \\ x^2 + ax + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 1 & \text{si } x < 1 \\ 3x - a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + ax & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3a + 2^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + a & \text{si } x \leq 1 \\ 4x^2 + ax + 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **f)** $f(x) = \begin{cases} 2^x + a & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 3a + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **g)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Solución:

a)
- Si $x \neq -1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x = -1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (2x^3 - x^2 + a) = a - 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2 + ax + 1) = 2 - a \\ f(-1) = 2 - a \end{cases}$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, ha de tenerse que: $a - 3 = 2 - a \rightarrow 2a = 5 \rightarrow a = \dfrac{5}{2}$

b)
- Si $x \neq 1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x = 1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-x^2 + ax - 1) = a - 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (3x - a) = 3 - a \\ f(1) = 3 - a \end{cases}$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de tenerse que: $a - 2 = 3 - a \rightarrow 2a = 5 \rightarrow a = \dfrac{5}{2}$

c)
- Si $x \neq 2$ $\Rightarrow$ La función es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 2$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x - a) = 6 - a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x^2 + ax) = 8 + 2a \\ f(2) = 8 + 2a \end{array}\right\}$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, ha de ser: $6-a=8+2a \;\rightarrow\; -2=3a \;\rightarrow\; a=\frac{-2}{3}$

d)

- Si x = 1 $\Rightarrow$ La función es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2+3x-1\right)=a+2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3a+2^x\right)=3a+2 \\ f(1)=a+2 \end{array}\right\}$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser: $a + 2 = 3a + 2 \;\Rightarrow\; -2a = 0 \;\Rightarrow\; a = 0$

e)

- Si $x \neq 1$ $\Rightarrow$ La función es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2-2x+a\right)=2a-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(4x^2+ax+6\right)=a+10 \\ f(1)=a-2 \end{array}\right\}$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser: $2a - 2 = a + 10 \;\Rightarrow\; a = 12$

f)

- Si $x \neq 1$ $\Rightarrow$ la función es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(2^x+a\right)=2+a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-3a+5\right)=6-3a \\ f(1)=2+a \end{array}\right\}$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser: $2 + a = 6 - 3a \;\Rightarrow\; 4a = 4 \;\Rightarrow\; a = 1$

g)

- Si $x \neq 2$ $\Rightarrow$ la función es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En x = 2 $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} k=k \\ f(2)=k \end{array}\right\}$

Por tanto, ha de ser $k = 3$.

<u>EJERCICIO 14</u> : Calcula los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea contínua:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-x^2+a & \text{si } x<-1 \\ x^2+bx+1 & \text{si } -1\le x<1 \\ ax & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

Solución:

- Si $x \neq 1$ y $x \neq 1$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x = -1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \left(2x^3 - x^2 + a\right) = a - 3 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(x^2 + bx + 1\right) = 2 - b \\ f(-1) = 2 - b \end{cases} \Rightarrow$

Para que sea continua en $x = -1$, ha de ser $a - 3 = 2 - b$.

- En $x = 1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 + bx + 1\right) = b + 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax) = a \\ f(1) = a \end{cases}$

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $a = b + 2$.

Uniendo las dos condiciones anteriores, $f(x)$ será continua si: $\begin{cases} a - 3 = 2 - b \\ a = b + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \dfrac{7}{2} \\ b = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

EJERCICIO 15 : Halla el valor de k para que la siguiente función sea continua en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Solución:

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, ha de tenerse que: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2 (3x+1)}{(x-2)^2 (4x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{4x+2} = \frac{7}{10}$$

$f(2) = k$

- Por tanto, ha de ser: $k = \dfrac{7}{10}$

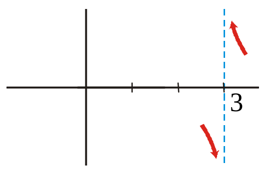
ASÍNTOTAS

EJERCICIO 16 : Calcula el límite de la siguiente función en el punto $x = 3$ y estudia su comportamiento por la izquierda y por la derecha: $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

Solución: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x - 3} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x - 3} = +\infty$

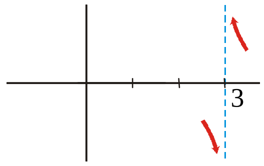


EJERCICIO 17 : Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha de $x = 3$: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x^2 - 9}$

Solución: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)(x+3)}$

Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x^2-9} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x^2-9} = +\infty$

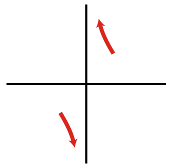


EJERCICIO 18 **: Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x = 0$:** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x^2+2x}$

Solución: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x(x+2)}$

Calculamos los límites laterales:

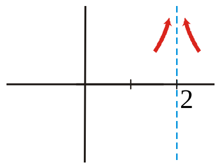
$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x+1}{x^2+2x} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+1}{x^2+2x} = +\infty$



EJERCICIO 19 **: Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x = 2$:** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$

Solución:

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = +\infty$

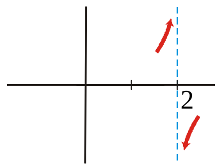


EJERCICIO 20 **: Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$, calcula el límite de $f(x)$ en $x = 2$. Representa la información que obtengas.**

Solución: $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6} = \dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)}$

Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x^2-5x+6} = -\infty$



EJERCICIO 21 **: Halla las asíntotas verticales de las siguientes funciones y sitúa las curvas respecto a ellas:**

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+1}$

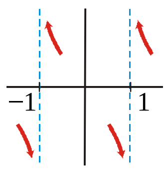
Solución:

a) • $x^2-1=0 \Rightarrow x=-1 \;;\; x=1. \Rightarrow$ Las asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=1$.

Posición de la curva respecto a ellas:

$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x+1}{x^2-1} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$

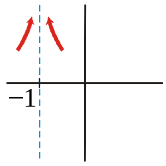


b) • $x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow$ Solo tiene una asíntota vertical: $x=-1$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{(x+1)^2}=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$$

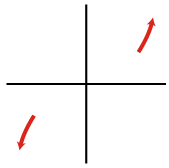


<u>EJERCICIO 22</u> : Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones y representa los resultados obtenidos:

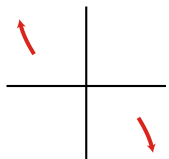
a) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+2x$ **b)** $f(x)=(3-x)^3$ **c)** $f(x)=\dfrac{1-x^4}{x^2}$ **d)** $f(x)=\dfrac{2x^3+x}{1-x}$

Solución:

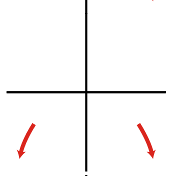
a)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)=-\infty$$



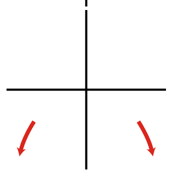
b) $\lim_{x\to+\infty}(3-x)^3=-\infty$ $\lim_{x\to-\infty}(3-x)^3=+\infty$



c)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^4}{x^2}=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^4}{x^2}=-\infty$$



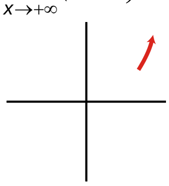
d)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x}{1-x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x}{1-x}=-\infty$$



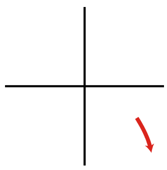
<u>EJERCICIO 23</u> : Halla las ramas infinitas, cuando $x\to+\infty$, de las siguientes funciones y representa la información que obtengas: a) $f(x)=(x+2)^4$ b) $f(x)=x-x^2$

Solución:

a) $\lim_{x\to+\infty}(x+2)^4=+\infty$



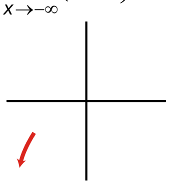
b) $\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\right)=-\infty$



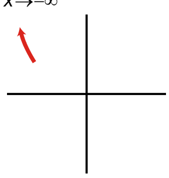
<u>EJERCICIO 24</u> : Halla las ramas infinitas, cuando $x\to-\infty$, de las siguientes funciones y representa los resultados que obtengas: a) $f(x)=(x-1)^3$ b) $f(x)=x^2-x$

Solución:

a) $\lim_{x\to-\infty}(x-1)^3=-\infty$



b) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-x\right)=+\infty$

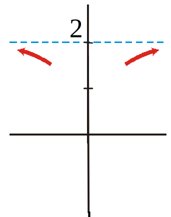


<u>EJERCICIO 25</u> : Calcular las asíntotas horizontales de estas funciones y representa los resultados que obtengas:

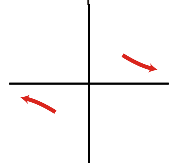
a) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+2}$

Solución:

a) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}=2\end{array}\right\}\Rightarrow \text{A.V.}y=2\Rightarrow\begin{cases}f(100)<2\\ f(-100)<2\end{cases}$$



b) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x^2+2}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{2x^2+2}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{A.V.}y=0\Rightarrow\begin{cases}f(100)>0\\ f(-100)<0\end{cases}$$



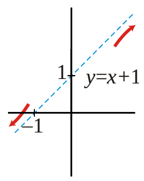
<u>EJERCICIO 26</u> : Las siguientes funciones tienen una asíntota oblicua. Hállala y sitúa las curvas respecto a ellas:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$

Solución: y = mx + n

a) $$\left.\begin{cases}m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2+2x}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2+x}=1\\ n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+2x}{x+1}-1.x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-x^2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{1}=1\end{cases}\right\}y=x+1\Rightarrow$$

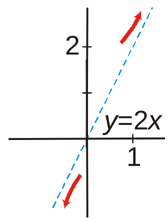
$$\text{Asíntota oblicua}: \ y=x+1\begin{cases}f(100)<\text{A sin t}(100)\\ f(-100)>\text{A sin t}(-100)\end{cases}$$



b) $$\left.\begin{cases}m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^3}{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^3-x}=2\\ n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^3}{x^2-1}-2.x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x^3+2x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=0\end{cases}\right\}y=2x\Rightarrow$$

Asíntota oblicua: $y=2x$

$$\begin{cases}f(100)>\text{A sin t}(100)\\ f(-100)<\text{A sin t}(-100)\end{cases}$$



<u>EJERCICIO 27</u> : Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa las curvas respecto a ellas:

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2}$

Solución:

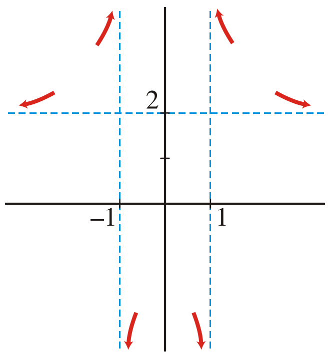
a)

- Asíntotas verticales: Puntos que anulan el denominador: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$$x \,\tilde{=}\, 1 \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = +\infty; \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = -\infty \end{cases} \qquad x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = -\infty; \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal: $\begin{matrix} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = 2 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = 2 \end{matrix} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(100) > 2 \\ f(-100) > 2 \end{cases}$

- Representación:



b)

- Asíntota vertical: Puntos que anulan el denominador $\Rightarrow$ $x^2 = 0 \Rightarrow$ $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-3}{x} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-3}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-3}{x} = +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal: $\begin{matrix} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-3x}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-3x}{x^2} = 1 \end{matrix} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(100) < 1 \\ f(-100) > 1 \end{cases}$

- Representación: