TEMA 8 – REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

<u>EJERCICIO 1</u> : Dibuja la gráfica de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$

Solución:

•Dominio = **R** – {0}

•Simetrías: $f(-x) = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen.

•Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\}$ $x=0$ es asíntota vertical.

•Asíntota horizontal: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0 \ \ (\text{si } x\to-\infty,\ f(x)<0) \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0 \ \ (\text{si } x\to+\infty,\ f(x)>0)\end{array}\right\}$ $y=0$ es asíntota horizontal.

•Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x^3-(x^2-1)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{2x^4-3x^4+3x^2}{x^6}=\frac{-x^4+3x^2}{x^6}=\frac{x^2(-x^2+3)}{x^6}=\frac{3-x^2}{x^4}$$

$f'(x)=0 \ \rightarrow\ 3-x^2=0 \ \rightarrow\ x=\pm\sqrt{3}$

Signo de $f'(x)$:

$f'<0$		$f'>0$		$f'>0$		$f'<0$
$\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$

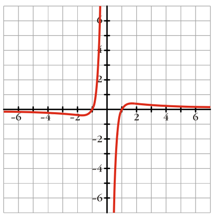
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$; es creciente en $(-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3})$.

Tiene un mínimo en $(-\sqrt{3};-0{,}38)$ y un máximo en $(\sqrt{3};0{,}38)$.

•Cortes con los ejes:

- No corta al eje Y, pues en $x=0$ no está definida.
- Con el eje $X \ \rightarrow\ y=0 \ \rightarrow\ x^2-1=0 \ \rightarrow\ x=\pm1 \ \rightarrow$ Puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

•Gráfica:



<u>EJERCICIO 2</u> : Representa gráficamente la función: $f(x)=\dfrac{x^3}{18}-\dfrac{x^2}{12}-2x$

Solución:

•Dominio = **R**

•Simetrías: $f(-x)=\dfrac{-x^3}{18}-\dfrac{x^2}{12}+2x$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

•Ramas infinitas: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• Puntos singulares: $f'(x)=\dfrac{3x^2}{18}-\dfrac{2x}{12}-2=\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x}{6}-2=\dfrac{x^2-x-12}{6}$

$$f'(x)=0 \ \rightarrow\ x^2-x-12=0 \ \rightarrow\ x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1\pm7}{2} \ \rightarrow\ \begin{cases}x=-3\\ x=4\end{cases}$$

Puntos singulares: $\left(-3,\dfrac{-15}{4}\right)$; $\left(4,\dfrac{-52}{9}\right)$

• Cortes con los ejes:

- Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ Punto $(0, 0)$

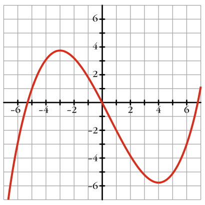
- Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $x\left(\frac{x^2}{18} - \frac{x}{12} - 2\right) = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2x^2 - 3x - 72 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 576}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{585}}{4} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x \approx -5{,}3 \\ x \approx 6{,}8 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(-5{,}3;\ 0)$ y $(6{,}8;\ 0)$

- Puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{2x - 1}{6}$; $f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow$ Punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{-73}{72}\right)$

- Gráfica:



<u>EJERCICIO 3</u> : Estudia la siguiente función y dibuja su gráfica: $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$
- Simetrías: $f(-x) = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen.
- Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = -1$ es asíntota vertical. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 1$ es asíntota vertical.
- Asíntota oblícua: $y = \frac{x^3}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1} \quad \rightarrow \quad y = x$ es asíntota oblícua.

Posición de la curva respecto a la asíntota: $\begin{cases} f(x) - x < 0 \text{ si } x \to -\infty \text{ (Curva por debajo)} \\ f(x) - x > 0 \text{ si } x \to +\infty \text{ (Curva por encima)} \end{cases}$

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento: $f'(x) = \frac{3x^2\left(x^2 - 1\right) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$

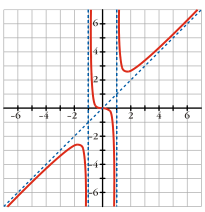
$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2\left(x^2 - 3\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0,\ x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	0	$\searrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$; es decreciente en $(-\sqrt{3},\ -1) \cup (-1,\ 0) \cup (0,\ 1) \cup (1,\ \sqrt{3})$. Tiene un máximo en $(-\sqrt{3};\ -2{,}6)$; un punto de inflexión en $(0,\ 0)$ y un mínimo en $(\sqrt{3};\ 2{,}6)$.

- Solo corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.
- Gráfica:



EJERCICIO 4 : Representa la función: $f(x)=\dfrac{3x^4-8x^3}{4}$

Solución:

- Dominio = **R**
- Simetrías: $f(-x)=\dfrac{3x^4-8x^3}{4}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.
- Ramas infinitas: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- Puntos singulares: $f'(x)=\dfrac{12x^3-24x^2}{4}=3x^3-6x^2=3x^2(x-2)$

$$f'(x)=0 \;\rightarrow\; 3x^2(x-2)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Puntos singulares: (0, 0) y (2, –4)

- Cortes con los ejes:

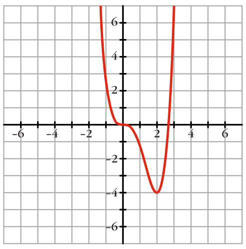
- Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow$ Punto (0, 0)

- Con el eje X $\rightarrow y=0 \rightarrow x^3(3x-8)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{8}{3} \end{cases} \rightarrow$ Puntos $(0,\ 0)$ y $\left(\dfrac{8}{3},\ 0\right)$

- Puntos de inflexión: $f''(x)=9x^2-12x=3x(3x-4)$

$$f''(x)=0 \;\rightarrow\; x=0,\ x=\frac{4}{3} \;\rightarrow\; \text{Puntos } (0,\ 0) \text{ y } \left(\frac{4}{3},\ \frac{-64}{27}\right)$$

- Gráfica:



EJERCICIO 5 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

Solución:

- Dominio = **R** – {–2, 2}
- Simetrías: $f(-x)=f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje *Y*.
- Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty \\ \lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}$ $x=-2$ es asíntota vertical. $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty \\ \lim_{x\to2^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\}$ $x=2$ es asíntota vertical.
- Asíntota horizontal: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1 \;\rightarrow\; y=-1$ es asíntota horizontal.

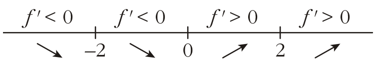
Si $x\to-\infty$ y si $x\to+\infty$, $f(x)<-1 \;\rightarrow\;$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{-2x\left(x^2-4\right)-\left(1-x^2\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{6x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$f'(x)=0 \;\rightarrow\; 6x=0 \;\rightarrow\; x=0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$; es creciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. Tiene un mínimo en $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

• Cortes con los ejes:

- Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{4} \rightarrow$ Punto $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

- Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x = -1;\ x = 1 \rightarrow$ Puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

• Gráfica: