3 Números reales

INTRODUCCIÓN

En la unidad anterior se estudiaron los números racionales o fraccionarios y se aprendió a compararlos, operar con ellos y utilizarlos para resolver problemas. En esta unidad se verán los números fraccionarios expresados en forma decimal.

Lo más importante de la unidad es conseguir que los alumnos identifiquen y trabajen con los distintos tipos de números que aparecen en la unidad, distinguiendo los diferentes números decimales: exacto, periódico puro, periódico mixto e irracional. El concepto de los números irracionales puede resultar complicado a los alumnos por la aparición de infinitas cifras que no se repiten, por lo que es importante practicar, poniendo ejemplos de racionales e irracionales y pidiendo a los alumnos que los clasifiquen.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Los *números irracionales* son números decimales no exactos y no periódicos.
- El conjunto de los *números reales* lo forman los números racionales e irracionales.
- *Truncar* las cifras decimales de un número hasta un orden determinado consiste en cambiar por ceros las cifras que vienen a continuación de dicho orden.
- *Redondear* un número decimal es estimar si se suma o no una unidad a la cifra que ocupa la posición a la que se va a redondear el número.
- *Raíz n-ésima de un número:* $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer e interpretar intervalos en la recta real.	• Intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos y semicerrados.	• Representación gráfica de intervalos en la recta real.
2. Aproximar un número decimal.	• Aproximación por truncamiento y redondeo.	• Truncamiento y redondeo de un número decimal hasta un orden.
3. Calcular el error que se comete al aproximar un número decimal.	• Error absoluto. • Cota o margen de error. • Error relativo.	• Obtención de los errores absoluto y relativo al aproximar un número decimal. • Determinación de la cota de error.
4. Operar con radicales.	• Transformación de radicales en potencias. • Multiplicación y división de radicales. • Racionalización de denominadores.	• Expresión de números escritos en forma de raíces en potencias. • Operaciones con radicales. • Multiplicación por el conjugado del denominador.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 OBJETIVO 1
RECONOCER E INTERPRETAR INTERVALOS EN LA RECTA REAL

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

1 **Halla un número racional que pertenezca al intervalo $\left[\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right]$.**

2 **Escribe cuatro intervalos encajados que definan los números.**

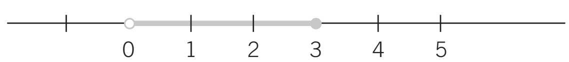
a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{11}$

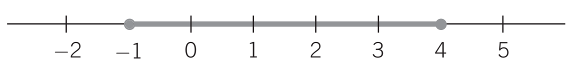
3 **Representa en la recta estos intervalos.**

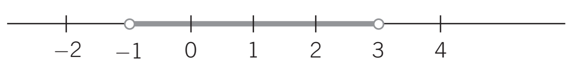
a) $(-2, 4]$ c) $x > 8$ e) $-3 < x \leq 1$ g) $|x| < 5$

b) $[-3, 5]$ d) $x \leq 3$ f) $-2 \leq x < 1$ h) $|x| \geq 3$

4 **Expresa los siguientes intervalos con paréntesis o corchetes.**

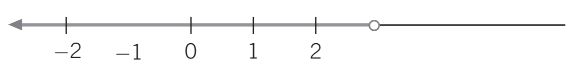
a) 

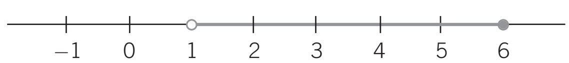
b) 

c) 

5 **Expresa con *x* y los signos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$ los intervalos.**

a) 

b) 

c) 

6 **Escribe cinco intervalos encajados que definan π.**

OBJETIVO 2

APROXIMAR UN NÚMERO DECIMAL

Para **truncar** las cifras decimales de un número hasta un orden determinado eliminamos las cifras que vienen a continuación de dicho orden.

EJEMPLO

5,751 truncado a las décimas es 5,7.
0,837 truncado a las centésimas es 0,83.
12,3146 truncado a las milésimas es 12,314.

1 **Trunca los números decimales a la cifra de las décimas, centésimas y milésimas.**

a) 0,2765	b) 12,34	c) 8,7521	d) 361,4938
0,2	______	______	______
0,27	______	______	______
0,276	______	______	______

Para **redondear** un número decimal hasta un orden determinado vemos si la cifra del siguiente orden es menor que 5 o mayor o igual que 5 y, en función de eso, dejamos la cifra anterior como está o la incrementamos en una unidad.

EJEMPLO

5,751 redondeado a las décimas es 5,8.
0,837 redondeado a las centésimas es 0,84.
12,3146 redondeado a las milésimas es 12,315.

2 **Redondea los números decimales a las décimas, centésimas y milésimas.**

a) 0,2765	b) 12,3453	c) 8,7521	d) 361,4932
0,3	______	______	______
0,28	______	______	______
0,277	______	______	______

3 **Efectúa las operaciones con números decimales, y redondea el resultado a las centésimas.**

a) $(1{,}367 + 4{,}875) \cdot 2 =$ ______ $\cdot\, 2 =$ ______ $= 12{,}48$

b) $(3{,}642 - 2{,}485) - (9{,}675 + 1{,}476) =$ ______ $-$ ______ $=$ ______ $= -9{,}99$

c) $\left(\dfrac{43{,}764}{2{,}15} \cdot 3{,}831\right) - \left(\dfrac{74{,}772}{13{,}57} \cdot 5{,}63\right) =$ ______ $-$ ______ $= 46{,}959 = 46{,}96$

d) $\sqrt{37} - \sqrt{22} =$ ______ $-$ ______ $=$ ______ $= 1{,}39$

e) $\dfrac{35{,}732 - 20{,}189}{63{,}562 - 18{,}987} =$ ____________ $= 0{,}349 = 0{,}35$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 OBJETIVO 3
CALCULAR EL ERROR QUE SE COMETE AL APROXIMAR UN NÚMERO DECIMAL

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El **error absoluto** que cometemos al aproximar un número decimal es igual al valor absoluto de la diferencia entre el número dado y el número aproximado. Se representa por E_a.

EJEMPLO

Sea el número 3,5765. ¿Qué error absoluto se comete al aproximarlo a las centésimas?

Podemos aproximar el número de dos maneras: truncándolo o redondeándolo.

Si lo truncamos a las centésimas, el número es 3,57; y el error absoluto sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}57| = 0{,}0065$$

Si lo redondeamos a las centésimas, el número es 3,58; y el error absoluto sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}58| = 0{,}0035$$

Como el error cometido al redondear es menor, esta forma de aproximación es mejor que el truncamiento.

1 **Calcula el error que cometemos al aproximar los siguientes números decimales a las milésimas.**

a) 35,3277

Por truncamiento queda 35,327.
$E_a = |35{,}3277 - \_\_\_\_\_\_| = 0{,}0007$

Por redondeo queda 35,328.
$E_a = |\_\_\_\_\_\_ - 35{,}3277| = 0{,}0003$

b) 107,8912

Por truncamiento queda: ______
$E_a = |107{,}8912 - \_\_\_\_\_\_| = 0{,}0002$

Por redondeo queda: ______
$E_a = |107{,}8912 - \_\_\_\_\_\_| = 0{,}0002$

El máximo error absoluto que cometemos al hacer una aproximación se llama **cota** o **margen de error**.

EJEMPLO

Al hallar con la calculadora el valor de $\sqrt{3}$, obtenemos:

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508$$

Pero esta es una aproximación por redondeo que hace la calculadora a 7 cifras decimales, por lo que no es el valor exacto de $\sqrt{3}$.

Como no podemos hallar el error absoluto, al no conocer el valor exacto, vamos a calcular una cota del error absoluto cometido. Si aproximamos, por ejemplo, a las centésimas:

$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$

El error que cometemos será menor o, como máximo, igual que la diferencia entre 1,73 y 1,74; es decir: $1{,}74 - 1{,}73 = 0{,}01$.

Así, resulta que 0,01 es una cota del error cometido al aproximar $\sqrt{3}$ a las centésimas.

2 **Halla una cota de error al aproximar $\sqrt{3}$ a las milésimas.**

$1{,}73\mathbf{2} < \sqrt{3} < 1{,}73\mathbf{3}$ $\qquad$ $1{,}73\mathbf{3} - 1{,}73\mathbf{2} = \_\_\_\_\_\_$

3 **Obtén la cota de error al aproximar los números a las décimas y a las centésimas.**

a) $\frac{3}{7}$ $\quad \frac{3}{7} = 0{,}42857\ldots$

Para la aproximación a las **décimas**:

$$0{,}4 < \frac{3}{7} < \_\_\_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$0{,}5 - 0{,}4 = \_\_\_\_\_\_$$

Para la aproximación a las **centésimas**:

$$0{,}42 < \frac{3}{7} < \_\_\_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$0{,}43 - 0{,}42 = \_\_\_\_\_\_$$

b) $\frac{3}{11}$ $\quad \frac{3}{11} = 0{,}272727$

Para la aproximación a las **décimas**:

$$0{,}2 < \frac{3}{11} < \_\_\_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$0{,}3 - 0{,}2 = \_\_\_\_\_\_$$

Para la aproximación a las **centésimas**:

$$0{,}27 < \frac{3}{11} < \_\_\_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$0{,}28 - 0{,}27 = \_\_\_\_\_\_$$

c) $2{,}3\widehat{5}$ $\quad 2{,}3\widehat{5} = 2{,}35555\ldots$

Para la aproximación a las **décimas**:

$$2{,}3 < 2{,}3\widehat{5} < \_\_\_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_\_\_ = 0{,}1$$

Para la aproximación a las **centésimas**:

$$2{,}35 < 2{,}3\widehat{5} < \_\_\_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$2{,}36 - 2{,}35 = 0{,}01$$

d) $\sqrt{7}$ $\quad \sqrt{7} = 2{,}64575$

Para la aproximación a las **décimas**:

$$2{,}6 < \sqrt{7} < \_\_\_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_\_\_ = 0{,}1$$

Para la aproximación a las **centésimas**:

$$2{,}64 < \sqrt{7} < \_\_\_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$2{,}65 - 2{,}64 = 0{,}01$$

El **error relativo** que cometemos al aproximar un número decimal es el cociente entre su error absoluto y el valor exacto de dicho número. Se representa por E_r.

EJEMPLO

Sea el número 3,5765. ¿Qué error relativo se comete al aproximarlo por truncamiento a las centésimas? ¿Y a las milésimas?

Si lo truncamos a las centésimas, el número es 3,57; y el error absoluto E_a sería:

$E_a = |3{,}5765 - 3{,}57| = 0{,}0065$

El error relativo, en este caso, es: $E_r = \left|\frac{0{,}0065}{3{,}5765}\right| = 0{,}001817$

Si lo truncamos a las milésimas, el número es 3,576; y el error absoluto E_a sería:

$E_a = |3{,}5765 - 3{,}576| = 0{,}0005$

El error relativo, en este caso, es: $E_r = \left|\frac{0{,}0005}{3{,}5765}\right| = 0{,}000139$

Otra forma de expresar el error relativo es mediante el tanto por ciento:

Para las centésimas: $E_r = 0{,}001817 = 0{,}18\,\%$ Para las milésimas: $E_r = 0{,}000139 = 0{,}01\,\%$

Observa que, en ambos casos, hemos redondeado el error, para expresar el tanto por ciento (%) con dos cifras decimales.

4 **Halla el error relativo que cometemos al aproximar por truncamiento a las centésimas.**

a) $\dfrac{5}{7}$ $\qquad \dfrac{5}{7} = 0{,}71428$

El error absoluto será:

$E_a = |0{,}71428 - 0{,}71| =$ ______

El error relativo será:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00428}{0{,}71428}\right| = 0{,}005992 = 0{,}60\ \%$$

b) $\dfrac{7}{9}$ $\qquad \dfrac{7}{9} = 0{,}77777$

El error absoluto será:

$E_a = |0{,}77777 - 0{,}77| =$ ______

El error relativo será:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00777}{0{,}77777}\right| = 0{,}00999 = 1\ \%$$

c) $3{,}87\widehat{5}$ $\qquad 3{,}87\widehat{5} = 3{,}87555\ldots$

El error absoluto será:

$E_a = |3{,}87555 - 3{,}87| = 0{,}00555$

El error relativo será:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00555}{3{,}87555}\right| = 0{,}001432 = \underline{\qquad}\ \%$$

d) $\sqrt{7}$ $\qquad \sqrt{7} = 2{,}64575$

El error absoluto será:

$E_a = |2{,}64575 - 2{,}64| = 0{,}00575$

El error relativo será:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00575}{2{,}64575}\right| = 0{,}00217 = \underline{\qquad}\ \%$$

5 **Al medir varias veces con una cinta métrica, graduada en centímetros, la altura de un compañero de clase, hemos obtenido los siguientes valores.**

MEDIDAS	177	173	175	174	177	174	174	173	175	172

Calcula la media de estas medidas y el error relativo cometido.

El valor medio de estas medidas será:

$$\text{Altura media} = \frac{177 + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad}{10} = \frac{1.744}{10} = 174{,}4 \text{ cm}$$

El error absoluto cometido en cada una de las medidas lo obtenemos restando la media de cada medida y obteniendo su valor absoluto:

MEDIDAS	177	173	175	174	177	174	174	173	175	172
ERROR ABSOLUTO	$\|177 - 174{,}4\| = 2{,}6$	$\|173 - 174{,}4\| = 1{,}4$	0,6	0,4	2,6	0,4	0,4	1,4	0,6	2,4

La media de los errores absolutos será:

$$\frac{2{,}6 + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad}{10} = \frac{12{,}8}{10} = 1{,}28 = 1{,}3$$

La altura del compañero es: $174{,}4 \pm 1{,}3$ cm, y el error relativo cometido es:

$$\left|\frac{1{,}3}{174{,}4}\right| = 0{,}00745 = 0{,}75\ \%$$

OBJETIVO 4

OPERAR CON RADICALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La raíz *n*-ésima de un número se puede poner en forma de potencia:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, a es el **radicando** y n es el **índice** de la raíz.

Es más fácil operar con potencias que con raíces, por lo que transformamos las raíces en potencias.

EJEMPLO

$$\sqrt{5} = 5^{1/2} \qquad \sqrt[7]{3^2} = 3^{2/7}$$

1 **Escribe los radicales en forma de potencias.**

a) $\sqrt[5]{7^3} = \underline{}^{3/5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{8^5}} = \dfrac{1}{8^{5/2}} = 8^{\square}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \underline{}$

MULTIPLICACIÓN (O DIVISIÓN) DE RADICALES

Para multiplicar o dividir radicales con el **mismo radicando**, los convertimos primero en potencias.

EJEMPLO

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = 2^{1/3} \cdot 2^{1/5} = 2^{1/3+1/5} = 2^{(5+3)/15} = 2^{8/15} = \sqrt[15]{2^8}$$

$$\sqrt[7]{3^5} : \sqrt[3]{3} = 3^{5/7} : 3^{1/3} = 3^{5/7-1/3} = 3^{(15-7)/21} = 3^{8/21} = \sqrt[21]{3^8}$$

2 **Calcula los siguientes productos de radicales.**

a) $\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt{7^3} = 7^{3/5} \cdot 7^{3/2} = 7^{3/5+3/2} = 7^{(\underline{}+\underline{})/\underline{}} = 7^{21/10} = \sqrt[10]{7^{21}}$

b) $\sqrt[7]{6^2} + 6 = 6^{\underline{}} \cdot 6 = 6^{\underline{}+\underline{}} = 6^{9/7} = \sqrt[7]{6^9}$

c) $\sqrt{3^3} \cdot \sqrt[5]{3^2} = 3^{\underline{}} \cdot 3^{\underline{}} = 3^{\underline{}+\underline{}} = 3^{19/10} = \sqrt[10]{3^{19}}$

d) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2^{3/4} \cdot 2^{2/3} \cdot 2^{1/2} = 2^{\underline{}} = 2^{\underline{}} = 2^{23/12} = \sqrt[12]{2^{23}}$

3 **Halla estos cocientes de radicales.**

a) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2} = 2^{1/2} : 2^{1/3} = 2^{1/2-1/3} = 2^{(3-2)/6} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[3]{8^5} : \sqrt[3]{8^2} =$

c) $\sqrt[7]{5} : \sqrt[4]{5^3} =$

d) $(\sqrt[3]{3^7} \cdot \sqrt[3]{3^4}) : \sqrt{3^2} = (3^{\underline{}} \cdot 3^{\underline{}}) : 3 = 3^{\underline{}} : 3 = 3^{8/3} = \sqrt[3]{3^8}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

RACIONALIZAR DENOMINADORES

Racionalizar un denominador es el proceso mediante el que hacemos desaparecer el radical del denominador de la fracción.

Este proceso consiste en multiplicar el numerador y el denominador por un número que haga que en el denominador se elimine la raíz.

EJEMPLO

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[5]{\mathbf{3^2}}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{3}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3} - \sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{1 \cdot (3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2})} = \frac{3 + \sqrt{2}}{7}$$

En este caso, utilizamos la propiedad de que una suma por una diferencia de dos números es igual a una diferencia de cuadrados:

$$(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$$

4 **Racionaliza los denominadores de las fracciones.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} =$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}} =$

c) $\dfrac{5}{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{5 \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = 10 - 5\sqrt{3}$

d) $-\dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = -\dfrac{1 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} = -\dfrac{\qquad}{\qquad} = -\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \dfrac{(1 + \sqrt{2}) \cdot (\qquad)}{(1 - \sqrt{2}) \cdot (\qquad)} = \dfrac{(\qquad)^2}{\qquad} = -(1 + \sqrt{2})^2$

f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\square \cdot \square}{\square \cdot \square} = \dfrac{\sqrt{15}}{10}$

g) $\dfrac{2}{1 - \sqrt{3}} =$