6 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

INTRODUCCIÓN

Para resolver ecuaciones de primer grado aprendemos a transponer términos, resolviendo ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores. Para resolver ecuaciones de segundo grado, distinguimos entre ecuaciones completas e incompletas.

A lo largo de la unidad se exponen los tres métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas: sustitución, igualación y reducción. Se deben dejar claros los pasos que hay que dar para resolver un sistema por cada uno de los métodos, así como señalar sus similitudes y diferencias.

Es importante que los alumnos asimilen el método general de resolución de problemas mediante ecuaciones y sistemas.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *ecuación de primer grado* es una expresión del tipo: $ax = b$. Su solución es $x = \frac{b}{a}$.
- Una *ecuación de segundo grado* es una expresión del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Sus soluciones son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Un *sistema* de dos *ecuaciones* con dos incógnitas x e y se expresa de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\}$$

- *Resolver un sistema* es encontrar dos números tales que, al sustituirlos en las dos ecuaciones, las verifiquen. Un sistema es *compatible* si tiene solución.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Resolver ecuaciones de primer grado.	• Transposición de términos. • Resolución de ecuaciones.	• Resolución de ecuaciones de 1.er grado transponiendo términos.
2. Resolver ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.	• Eliminación de paréntesis. • Eliminación de denominadores. • Resolución de ecuaciones de primer grado	• Resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores. • Comprobación de la solución de una ecuación.
3. Ecuaciones de segundo grado.	• Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas. • Resolución de ecuaciones de segundo grado completas.	• Identificación de una ecuación de segundo grado. • Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas y completas.
4. Resolver problemas con ecuaciones de primer y segundo grado.	• Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.	• Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.
5. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	• Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. • Coeficientes y términos independientes.	• Identificación de los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. • Representación gráfica de sistemas, para comprobar si son o no equivalentes.
6. Resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	• Método de sustitución. • Método de igualación. • Método de reducción.	• Resolución de un sistema por los métodos de sustitución, de igualación y de reducción.
7. Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones.	• Planteamiento, resolución y comprobación de un sistema de ecuaciones.	• Resolución de problemas mediante sistemas de dos ecuaciones. • Comprobación de la solución.

6 OBJETIVO 1
RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita que cumple la ecuación.

Para resolver una ecuación de primer grado, **transponemos términos**, lo que consiste en pasar a un miembro (normalmente, al izquierdo) todos los términos con x, y al otro miembro (el derecho), todos los números o términos independientes (términos sin x).

Se deberán tener en cuenta las siguientes reglas.

- **Regla de la suma:** un término que está **sumando** en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro **restando**, y si está **restando** pasa **sumando**.
- **Regla del producto:** un término que está **multiplicando** en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro **dividiendo**, y si está **dividiendo** pasa **multiplicando**.

EJEMPLO

Resuelve esta ecuación de primer grado por transposición: $5x - 3 = 3x + 11$

- Sumamos 3 en los dos miembros:

$$5x - 3 + 3 = 3x + 11 + 3 \rightarrow 5x = 3x + 14$$

- Para eliminar el término con x del segundo miembro, restamos $3x$ en ambos miembros:

$$5x - 3x = 3x + 14 - 3x \rightarrow 2x = 14$$

- Para despejar la incógnita x, dividimos ambos miembros de la ecuación entre 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2} \rightarrow x = 7$$

1 **Resuelve por transposición las siguientes ecuaciones de primer grado.**

a) $7x - 1 = 9 - 3x$

d) $75 - 37x + 25 - 12x = 318 + x - 10 + 2x$

b) $5 - 3x = 1 - x + 9 - 3x$

e) $4x - 18 + x - 7 = 25 - 5x$

c) $x - 10 = 3x - 7 + 8x - 13$

f) $5x - 30 + 35 - 10x = 45x - 20 + 65 - 10x$

■ MATEMÁTICAS 4.° A ESO ■ MATERIAL FOTOCOPIABLE © SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

RESOLVER ECUACIONES DE 1.er GRADO CON PARÉNTESIS Y DENOMINADORES 6

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON PARÉNTESIS

Para resolver una ecuación de primer grado que contiene paréntesis, en primer lugar hay que quitarlos, poniendo atención en los cambios de signo cuando haya un signo negativo delante del paréntesis.

EJEMPLO

Resuelve la siguiente ecuación de primer grado: $(2 + x) - 5(x - 1) = 3(x + 1) + (x - 4)$

- Quitamos los paréntesis: $2 + x - 5x + 5 = 3x + 3 + x - 4$
- Reducimos términos semejantes: $-4x + 7 = 4x - 1$
- Transponemos términos: $-4x - 4x = -1 - 7 \rightarrow -8x = -8$
- Despejamos la x: $x = \dfrac{-8}{-8} = 1$
- Comprobamos la solución:

$$(2 + x) - 5(x - 1) = 3(x + 1) + (x - 4)$$
$$(2 + 1) - 5(1 - 1) = 3(1 + 1) + (1 - 4)$$
$$3 - 0 = 3 \cdot 2 - 3 \rightarrow 3 = 6 - 3 = 3 \rightarrow 3 = 3$$

La solución es correcta, porque el resultado final de las operaciones es el mismo número en ambos miembros de la ecuación.

1 **Resuelve las ecuaciones de primer grado, comprobando la solución.**

a) $(3 - x) + 2(x - 1) = (x - 5) + 2x$

d) $7x - (5 - x) = 4 - (x + 3)$

b) $(7 - 6x) - 5(x + 2) = 3(x + 2) - 2x$

e) $2(x - 5) - 3(1 - x) = 17$

c) $2(5 - x) = 19 - 3(x + 5)$

f) $6(12x - 81) = 80x + 2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

6

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DENOMINADORES

Para eliminar los denominadores, hay que calcular su mínimo común múltiplo (m.c.m.) y multiplicar los dos miembros de la ecuación por dicho valor.

EJEMPLO

Resuelve la siguiente ecuación de primer grado: $\dfrac{x-5}{3} - 2 = \dfrac{x+1}{2} + 1$

- Calculamos el m.c.m. $(2, 3) = 6$
- Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por 6:

$$\frac{6(x-5)}{3} - 6 \cdot 2 = \frac{6(x+1)}{2} + 6 \cdot 1 \qquad 2(x-5) - 12 = 3(x+1) + 6$$

- Quitamos los paréntesis: $2x - 10 - 12 = 3x + 3 + 6$
- Reducimos términos semejantes: $2x - 22 = 3x + 9$
- Transponemos términos: $2x - 3x = 9 + 22 \rightarrow -x = 31 \rightarrow x = -31$
- Comprobamos la solución: $\dfrac{x-5}{3} - 2 = \dfrac{x+1}{2} + 1 \rightarrow \dfrac{-31-5}{3} - 2 = \dfrac{-31+1}{2} + 1$

$$\frac{-36}{3} - 2 = \frac{-30}{2} + 1 \rightarrow -12 - 2 = -15 + 1 \rightarrow -14 = -14$$

2 **Resuelve las siguientes ecuaciones, comprobando las soluciones.**

a) $\dfrac{3x-1}{5} = \dfrac{2x+1}{3}$

b) $\dfrac{x-1}{5} + \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x+4}{30}$

c) $\dfrac{x}{3} + 1 = \dfrac{x+2}{5} - \dfrac{x-3}{2} + \dfrac{2x}{6}$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores, y comprueba el resultado.**

a) $2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\left(x - \frac{3}{2}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{3}{2}\right)$

b) $\left(x + \frac{1}{5}\right) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{5}\left(\frac{7}{2}x + 1\right)$

c) $\frac{2x + 1}{3} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{x - 1}{6} - \frac{x}{4}$

d) $\frac{3x - 1}{2} + 2\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 3\left(\frac{x - 2}{5}\right) + 3$

6 OBJETIVO 3
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una ecuación que se expresa de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Si los coeficientes b y c son distintos de cero, la ecuación se llama **completa**; en caso contrario, es **incompleta**.

EJEMPLO

La ecuación $3x^2 - 4x + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado completa, ya que $a = 3$, $b = -4$ y $c = 1$.

La ecuación $3x^2 + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta, pues $a = 3$, $b = 0$ y $c = 1$.

La ecuación $3x^2 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta, porque $a = 3$, $b = 0$ y $c = 0$.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

- Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

  Dependiendo del valor que tenga c, la ecuación tendrá una, dos o ninguna solución.

- Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \; \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$

EJEMPLO

- La ecuación $2x^2 - 16 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 2$ y $c = -16$.

  Operando con ella, tenemos que: $2x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

  Luego tiene dos soluciones: $x_1 = \sqrt{8}$ y $x_2 = -\sqrt{8}$

  Comprobamos que son soluciones de la ecuación:

  Si $x = \sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$ Si $x = -\sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (-\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$

- La ecuación $5x^2 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 5$ y $c = 0$.

  Tiene una única solución, $x = 0$.

- La ecuación $2x^2 + 16 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 2$ y $c = 16$.

  Operando con ella, tenemos que: $2x^2 = -16 \rightarrow x^2 = -8 \rightarrow x = \pm\sqrt{-8}$

  Como no existe $\sqrt{-8}$, la ecuación no tiene solución.

1 **Halla, si es posible, las soluciones de las ecuaciones y comprueba el resultado.**

a) $4x^2 - 64 = 0$

b) $4x^2 + 64 = 0$

c) $4x^2 = 0$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETAS

La fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado completa es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Según sea el valor del discriminante se pueden dar tres casos:

- PRIMER CASO. Si $b^2 - 4ac > 0$, existirán dos soluciones: $x_1 = +\sqrt{b^2 - 4ac}$ y $x_2 = -\sqrt{b^2 - 4ac}$
- SEGUNDO CASO. Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una única solución, $x = \frac{-b}{2a}$.
- TERCER CASO. Si $b^2 - 4ac < 0$, la raíz $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no es un número real y la ecuación no tiene solución.

EJEMPLO

PRIMER CASO. En la ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -8$ y $c = 15$.

Como $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$, tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

- Para $x_1 = 5$: $x^2 - 8x + 15 = 5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 25 - 40 + 15 = 0$
- Para $x_2 = 3$: $x^2 - 8x + 15 = 3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$

SEGUNDO CASO. En la ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -10$ y $c = 25$.
Como $b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$, tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$$

Comprobamos la solución: $x^2 - 10x + 25 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$

TERCER CASO. En la ecuación $x^2 + 3x + 12 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = 3$ y $c = 12$.
Como $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 9 - 48 = -39$, y no existe $\sqrt{-39}$, la ecuación no tiene solución.

2 **Resuelve las ecuaciones de segundo grado y comprueba las soluciones.**

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 12x + 36 = 0$

c) $x^2 - 3x + 2 = 0$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones.**

a) $(x-1)(x+6)-4(3x-4)=0$

b) $x(x-1)+6(x+1)=0$

c) $(x+5)(x-1)-2(x+1)+(x+11)=0$

d) $(x+3)(x-5)+2(x-17)=0$

OBJETIVO 4

RESOLVER PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1.er Y 2.º GRADO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Recuerda los cuatro pasos que debes dar para resolver un problema correctamente:

a) **Leer** detenidamente el enunciado.
b) **Plantear** el problema, en este caso, la ecuación.
c) **Resolver** el problema, en este caso, la ecuación.
d) **Comprobar** el resultado.

EJEMPLO

Halla un número tal que si a sus dos terceras partes se les resta 1, obtenemos 11.

ENUNCIADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
El número	x
$\frac{2}{3}$ partes del número	$\frac{2x}{3}$
$\frac{2}{3}$ partes del número menos 1	$\frac{2x}{3} - 1$
$\frac{2}{3}$ partes del número menos 1 **es igual** a 11	$\frac{2x}{3} - 1 = 11$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{2x}{3} - 1 = 11 \rightarrow \frac{2x}{3} = 12 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

Comprobamos la solución:

$$\frac{2 \cdot 18}{3} - 1 = 11 \rightarrow \frac{36}{3} - 1 = 11 \rightarrow$$
$$\rightarrow 12 - 1 = 11 \rightarrow 11 = 11$$

1 **Calcula tres números consecutivos cuya suma vale 24.**
(Con los números** x**,** x + 1 **y** x + 2**, plantea la ecuación correspondiente.)

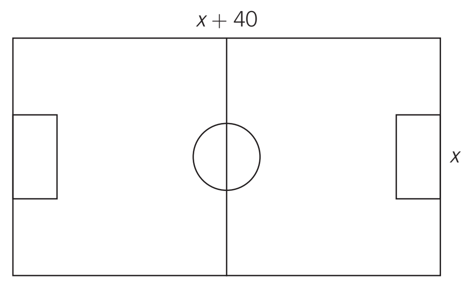
2 **Halla un número tal que su mitad es 5 unidades menor que su triple. A partir de la tabla, resuelve la ecuación.**

ENUNCIADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
El número	x
Su mitad	$\frac{x}{2}$
Su triple	$3x$
5 unidades menor que su triple	$3x - 5$
Su mitad es 5 unidades menor que su triple	$\frac{x}{2} = 3x - 5$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **El perímetro de un campo de fútbol es 280 m, y sabemos que mide 40 m más de largo que de ancho. Halla las dimensiones (largo y ancho).**

El perímetro de un polígono es igual a la suma de sus lados:
$P = x + (x + 40) + x + (x + 40) = 2x + 2\,(x + 40) = 280$



4 **Pepe tiene dos años más que su hermana María y tres años más que Juan. Sumando las edades de los tres, el resultado es 40. Halla la edad que tiene cada uno.**

Llamamos x = edad de Pepe, $x - 2$ = edad de María y $x - 3$ = edad de Juan

5 **El padre de los hermanos del ejercicio anterior tiene 46 años. Sabiendo que Pepe tiene 15 años, María tiene 13 años y Juan tiene 12 años, calcula cuánto tiempo ha de pasar para que la suma de las edades de los tres iguale a la edad de su padre.**

En los problemas en los que aparecen edades actuales y futuras conviene elaborar una tabla como la siguiente.

	EDAD ACTUAL	DENTRO DE x AÑOS
Pepe	15	$15 + x$
María	13	$13 + x$
Juan	12	$12 + x$
Padre	46	$46 + x$

Planteamos la ecuación:

$$15 + x + 13 + x + 12 + x = 46 + x$$

6 **La madre de Pepe, María y Juan tiene 42 años. Calcula cuántos años deben pasar para que la edad de Pepe sea la mitad que la edad de su madre.**

	EDAD ACTUAL	DENTRO DE x AÑOS
Pepe	15	$15 + x$
Madre	42	$42 + x$

Planteamos la ecuación:

$$15 + x = \frac{42 + x}{2}$$

7 **La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 61. Halla de qué números se trata.**

Si representamos los números por x y $x + 1$, sus cuadrados serán x^2 y $(x + 1)^2$.
Recuerda que el cuadrado de una suma es: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1^2$

8 **El abuelo de Pepe, María y Juan tiene una edad tal que elevada al cuadrado es igual a 160 veces la suma de las edades de sus tres nietos. Calcula la edad del abuelo.**

Tenemos en cuenta que las edades son: Pepe, 15 años; María, 13 años, y Juan, 12 años.

9 **Un campo de baloncesto tiene 1.000 m^2 de área. Halla sus dimensiones, sabiendo que mide 30 m más de largo que de ancho.**

Planteamos y resolvemos la ecuación de segundo grado que se obtiene al sustituir en la fórmula del área del rectángulo. Hay que tener en cuenta que la solución negativa no es válida, pues no tiene sentido una medida de longitud negativa.

10 **Si aumentamos el lado de un cuadrado en 2 m, su superficie aumenta en 16 m^2. Calcula lo que medía inicialmente el lado del cuadrado.**

	ANTES	DESPUÉS
Lado	x	$x + 2$
Superficie	x^2	$(x + 2)^2$

6 OBJETIVO 5
SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Un **sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones que se puede representar de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\}$$

- **Coeficientes** de las incógnitas: a, a', b, b'
- **Términos independientes:** k, k'
- Una **solución** de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifican las dos ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve este sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x - y = 3} \\ \mathbf{x + y = 3} \end{array}\right\}$

Las incógnitas son x e y.
Los coeficientes de las incógnitas son 2, −1, 1 y 1.
Los términos independientes son 3 y 3.

Las parejas de valores de la tabla cumplen la primera ecuación:

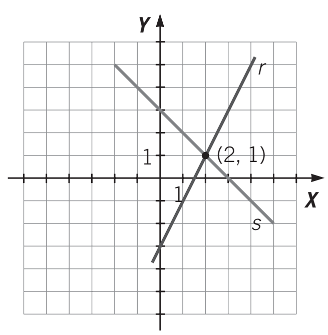
x	0	1	2	3	4	5
y	−3	−1	1	3	5	7

Como vemos, la pareja de valores (2, 1) cumple las dos ecuaciones, por lo que será la solución del sistema.

Si representamos las parejas de valores (x, y) de las tablas anteriores, obtenemos dos rectas, r y s, que se cortan en el punto (2, 1), que es la solución del sistema.

Las parejas de valores de la tabla cumplen la segunda ecuación:

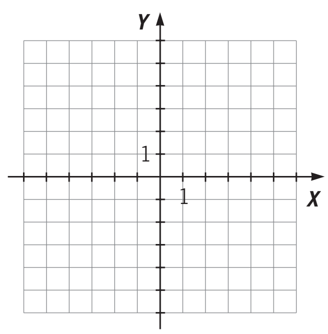
x	0	1	2	3	4	5
y	3	2	1	0	−1	−2



1 **Halla las parejas de valores que son soluciones de las ecuaciones del sistema, y determina cuál es la solución.**

Representa las rectas correspondientes a cada una de las ecuaciones, comprobando que el punto en el que se cortan es la solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + 5y = 8} \\ \mathbf{3x - 2y = 7} \end{array}\right\}$$



103028 _ 0301-0362.qxd 29/7/08 19:17 Página 313

Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

EJEMPLO

Los sistemas $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{r} x - y = -2 \\ 2x + y = 8 \end{array}\right\}$ son equivalentes, ya que tienen la misma solución: $x = 2$, $y = 4$

Si representamos gráficamente ambos sistemas, obtenemos:

Recta r: $3x - y = 2$

x	0	1	2	3
y	−2	1	4	7

Recta s: $x + y = 6$

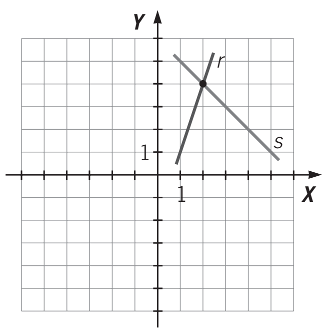
x	0	1	2	3
y	6	5	4	3

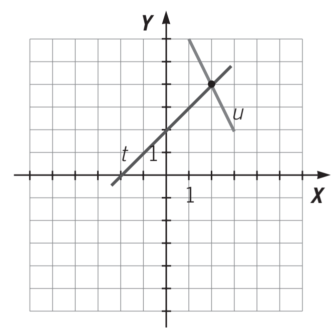
Recta t: $x - y = -2$

x	0	1	2	3
y	2	3	4	5

Recta u: $2x + y = 8$

x	0	1	2	3
y	8	6	4	2





El punto donde se cortan los dos pares de rectas es el mismo: (2, 4), que es la solución de ambos sistemas. Son sistemas equivalentes.

2 **Representa gráficamente las dos ecuaciones de los sistemas. ¿Son equivalentes?**

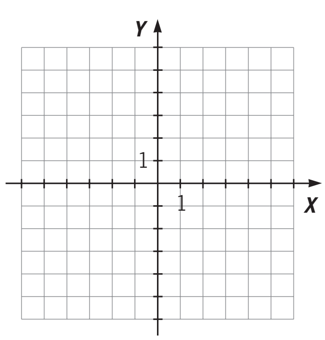
a) $\left.\begin{array}{r} x - 3y = 4 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$

Recta r: $x - 3y = 4$

x	0	1	2	3
y				

Recta s: $x + y = 0$

x	0	1	2	3
y				



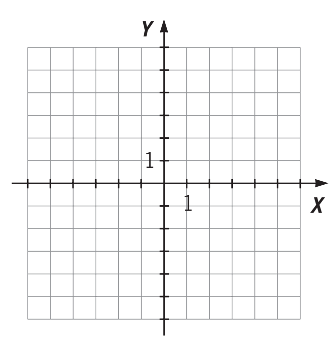
b) $\left.\begin{array}{r} 5x - y = 6 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$

Recta t: $5x - y = 6$

x	0	1	2	3
y				

Recta u: $x + y = 2$

x	0	1	2	3
y				



6 OBJETIVO 6
RESOLVER SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifica las dos ecuaciones. Si un sistema tiene solución, se dice que es **compatible**.
- **Resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas** es encontrar la solución o las soluciones de dicho sistema.

EJEMPLO

Estudia si el par de números (2, 3) es solución del sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x - y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 8} \end{array}\right\}$.

Para ver si el par de números (2, 3) es solución del sistema, hay que comprobar si cumplen o no las dos ecuaciones. Sustituyendo en ambas ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 \\ \rightarrow 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

Por tanto, el par de números (2, 3) es una solución del sistema, y el sistema es compatible.

Para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas hay tres métodos de resolución:

(I) Método de **sustitución**.
(II) Método de **igualación**.
(III) Método de **reducción**.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de sustitución**:

- **Despejar** la incógnita en una de las ecuaciones.
- **Sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.
- **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución: $\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x - y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 8} \end{array}\right\}$

- **Elegimos** para despejar la incógnita x de la segunda ecuación: $x = 8 - 2y$
- **Sustituimos** esta incógnita en la primera ecuación:

  $$2x - y = 1 \rightarrow 2 \cdot (8 - 2y) - y = 1$$
- **Resolvemos** la ecuación con la incógnita y obtenida:

  $$16 - 4y - y = 1 \rightarrow 16 - 5y = 1 \rightarrow -5y = 1 - 16 = -15 \rightarrow y = \frac{-15}{-5} \rightarrow y = 3$$
- **Sustituimos** el valor $y = 3$ en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera:

  $$2x - y = 1 \rightarrow 2x - 3 = 1 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$
- **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hemos de sustituir el par de valores (2, 3) en las dos ecuaciones:

  $$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 \\ \rightarrow 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

  Por tanto, el par de valores $x = 2$, $y = 3$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

1 **Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución y comprueba las soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 9 \\ 2x - 9y = 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 0 \\ 3x - y = 14 \end{array}\right\}$

2 **Resuelve por el método de sustitución, y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{5x+3}{6} + y = 2 \\ \dfrac{2x}{3} + 3y = -1 \end{array}\right\}$$

Para resolverlo, seguimos estos pasos.

1.° En cada ecuación reducimos a común denominador:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{5x+3}{6} + \dfrac{6y}{6} = \dfrac{6 \cdot 2}{6} \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y \cdot 3}{3} = -\dfrac{1 \cdot 3}{3} \end{array}\right\}$$

2.° Quitamos los denominadores:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 3 + 6y = 12 \\ 2x + 9y = -3 \end{array}\right\}$$

3.° Resolvemos por sustitución el sistema resultante, comprobando la solución:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 6y = 9 \\ 2x + 9y = -3 \end{array}\right\}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Resuelve por el método de sustitución y comprueba la solución de los sistemas de ecuaciones con fracciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x+3}{2} + \dfrac{y}{4} = 1 \\ \dfrac{5x-1}{2} - \dfrac{4y+39}{5} = -1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{5x+3}{6} + \dfrac{y-1}{4} = 2 \\ \dfrac{x-2}{5} - \dfrac{y+5}{10} = 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x-6}{3} - \dfrac{2y-3}{7} = -1 \\ x + \dfrac{3y}{2} = -3 \end{array}\right\}$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de igualación**:

- **Sustituir** la misma incógnita en las dos ecuaciones.
- **Igualar** las expresiones obtenidas.
- **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x - y = 3} \\ \mathbf{x + y = 12} \end{aligned}\right\}$$

- **Elegimos** para despejar la incógnita y de las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ y &= 12 - x \end{aligned}\right\}$$

- **Igualamos** las expresiones obtenidas: $2x - 3 = 12 - x$
- **Resolvemos** la ecuación con la incógnita x obtenida:

$$2x + x = 12 + 3 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$$

- **Sustituimos** el valor $x = 5$ en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera:

$$2x - y = 3 \rightarrow 2 \cdot 5 - y = 3 \rightarrow 10 - 3 = y \rightarrow y = 7$$

- **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hemos de sustituir el par de valores (5, 7) en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 12 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2 \cdot 5 - 7 = 10 - 7 = 3 \\ 5 + 7 = 12 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

Por tanto, el par de valores $x = 5$, $y = 7$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

4 **Resuelve por el método de igualación, y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.**

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2} + \frac{2y+2}{3} &= 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{y-4}{6} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

1.º Reducimos a común denominador las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3(x+1)}{6} + \frac{2(2y+2)}{6} &= \frac{12}{6} \\ \frac{2x}{6} - \frac{y-4}{6} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

2.º Quitamos los denominadores:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 3 + 4y + 4 &= 12 \\ 2x - y + 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3.º Resolvemos por igualación el sistema resultante:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 5 \\ 2x - y &= -4 \end{aligned}\right\}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

5 **Resuelve por el método de igualación, y comprueba la solución de los sistemas de ecuaciones con fracciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y+4}{3} = 1 \\ x - \dfrac{y-1}{3} = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{y+1}{5} - y = -2 \\ \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y}{5} = -\dfrac{1}{15} \end{array}\right\}$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de reducción**:

- **Buscar un sistema equivalente** en el que los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos.
- **Restar** o **sumar** las dos ecuaciones obtenidas, eliminando una incógnita.
- **Resolver** la ecuación con una sola incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x - 2y = 1} \\ \boldsymbol{5x + 3y = 18} \end{array}\right\}$$

- Obtenemos un **sistema equivalente**. Para ello, **elegimos** la incógnita que sea más sencilla para reducir, en este caso x. Multiplicamos la primera ecuación por 5:

$$5(x - 2y = 1) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x - 10y = 5 \\ 5x + 3y = 18 \end{array}\right\}$$

- **Restamos** las dos ecuaciones del sistema para eliminar los términos con x y reducir el sistema:

$$\begin{array}{rl} 5x - 10y = & 5 \\ -\ (5x + \ \ 3y = & 18) \\ \hline -\ 13y = & -13 \end{array}$$

- **Resolvemos** la ecuación obtenida:

$$-13y = -13 \rightarrow y = 1$$

- **Sustituimos** el valor obtenido en una de las dos ecuaciones del sistema, en la que resulta más sencilla para operar, en este caso la primera:

$$x - 2y = 1 \rightarrow x - 2 \cdot 1 = 1 \rightarrow x = 3$$

- **Comprobamos** el resultado. Para ello hemos de sustituir el par de valores (3, 1) en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 5x + 3y = 18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3 - 2 \cdot 1 = 1 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 = 1 \\ 18 = 18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

Por tanto, el par de valores $x = 3$, $y = 1$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

■ MATEMÁTICAS 4.° A ESO ■ MATERIAL FOTOCOPIABLE © SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

6 **Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba la solución.**

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{3x - 2y = 7}\\ \mathbf{2x + 3y = 9}\end{array}\right\}$$

- Obtenemos un **sistema equivalente**:

  En este caso, la variable x o la variable y no aparecen multiplicadas por 1 en ninguno de los términos de las ecuaciones, así que podemos elegir una u otra. Elegimos, por ejemplo, la variable y.

  Para lograr que los dos términos con variable y tengan el mismo coeficiente, hay que multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 2, de forma que:

$$\left.\begin{array}{r}3 \cdot (3x - 2y = 7)\\ 2 \cdot (2x + 3y = 9)\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}9x - 6y = 21\\ 4x + 6y = 18\end{array}\right\}$$

- **Sumamos** las dos ecuaciones para eliminar los términos con y:

$$\begin{array}{rl} & 9x - \cancel{6y} = 21 \\ + & 4x + \cancel{6y} = 18 \\ \hline & 13x \quad\quad = 39 \end{array}$$

- **Resolvemos** la ecuación obtenida: $x = \ldots$
- **Sustituimos** este valor en cualquiera de las dos ecuaciones para hallar el valor de y:

- **Comprobamos** la solución:

7 **Resuelve por el método de reducción los sistemas y comprueba las soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r}7x + 3y = 2\\ 5x + 2y = 1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}3x - 3y = 3\\ 2x + 5y = 72\end{array}\right\}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

6

8 **Resuelve los siguientes sistemas por los tres métodos. Comprueba la solución y decide cuál de los métodos es más sencillo para resolver cada sistema.**

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - 5y = 0 \\ 3x - 4y = -1 \end{array}\right\}$

- Por sustitución:
- Por igualación:
- Por reducción:

En este caso, el método más adecuado es ____________________

b) $\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 2x - y = 19 \end{array}\right\}$

- Por sustitución:
- Por igualación:
- Por reducción:

En este caso, el método más adecuado es ____________________

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

OBJETIVO 7

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para resolver un problema mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas hay que realizar los siguientes pasos.

1.º **Comprender** el problema.
2.º **Plantear** las ecuaciones y formar el sistema de ecuaciones.
3.º **Resolver** el sistema de ecuaciones mediante cualquiera de los tres métodos.
4.º **Comprobar** que la solución cumple las condiciones del enunciado.

EJEMPLO

La suma de los goles marcados por dos equipos es 30, y cuando ambos equipos hayan marcado 5 goles más, la diferencia entre ambos equipos será de 2 goles. Halla los goles marcados por cada equipo.

1.º Lee el problema las veces que sea necesario hasta comprender su enunciado.

2.º Plantea las ecuaciones y forma el sistema:

- Elegir las incógnitas: $x =$ número de goles marcados por el equipo A
  $y =$ número de goles marcados por el equipo B
- Plantear el problema:

		AHORA		CUANDO HAYAN MARCADO 5 GOLES MÁS
Equipo A	→	x	→	$x + 5$
Equipo B	→	y	→	$y + 5$
		$x + y = 30$		$(x + 5) - (y + 5) = 2$

- Formar el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ (x+5) - (y+5) &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

3.º Resuelve el sistema por el método que creas más conveniente, en este caso por reducción.
Sumamos ambas ecuaciones, para eliminar los términos con y:

$$\begin{array}{r} x + y = 30 \\ + \quad x - y = 2 \\ \hline 2x = 32 \end{array} \rightarrow x = 16$$

Sustituyendo en la primera ecuación: $16 + y = 30 \rightarrow y = 14$
Por tanto, el equipo A ha marcado 16 goles, y el equipo B, 14 goles.

4.º Comprobamos la solución:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 16 + 14 &= 30 \\ 16 - 14 &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 30 &= 30 \\ 2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Ambas ecuaciones se cumplen, y la solución obtenida es correcta.

1 **Calcula dos números cuya suma es 15 y su diferencia es 1.**

6

2 **En un corral, entre gallinas y ovejas hay 27 animales, y contando las patas hay 76 patas en total. ¿Cuántas gallinas y ovejas hay?**

3 **En un aparcamiento hay 90 vehículos, entre coches y motos. Si salieran 40 coches y 10 motos, el número de coches igualaría el número de motos. Halla el número de coches y de motos que hay en el aparcamiento.**

4 **Una chica compra 2 refrescos y 3 bolsas de pipas por 3,50 €, y un chico compra 3 refrescos y 5 bolsas de pipas por 5,50 €. Halla lo que cuesta cada refresco y cada bolsa de pipas.**