

3 Polinomios y fracciones algebraicas

INTRODUCCIÓN

Son múltiples los contextos en los que aparecen los polinomios: fórmulas económicas, químicas, físicas..., de ahí la importancia de comprender el concepto de polinomio y otros conceptos asociados a él.

Después de comprender y practicar cada uno de estos conceptos, se estudiará cómo operar con polinomios. Las dificultades pueden surgir en la multiplicación (en la colocación correcta de los términos) y en la división (en la determinación de cada término del cociente y en la resta de los productos obtenidos).

Conviene seguir los ejemplos resueltos, dejar claro el proceso seguido y hacer hincapié en la necesidad de colocar correctamente cada término para operar sin cometer errores.

Asimismo, es importante que los alumnos aprendan a deducir por sí mismos el desarrollo de las fórmulas de las igualdades notables.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *polinomio* es una suma de monomios.
- Un *polinomio reducido* no tiene monomios semejantes. Su grado es el grado del término de mayor grado.
- El *valor numérico de un polinomio*, para $x = a$, se obtiene sustituyendo la variable x por a y operando.
- *Sumamos dos polinomios* sumando los términos semejantes de ambos.
- *Restamos dos polinomios* sumando al primer polinomio el opuesto del segundo.
- *Multiplicamos dos polinomios* multiplicando cada uno de los monomios de uno por todos los monomios del otro.
- *División de polinomios*: $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
- *Igualdades notables*.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer el grado, los términos y los coeficientes de un polinomio.	<ul style="list-style-type: none"> • Grado, término independiente y coeficientes de un polinomio. • Polinomio ordenado. • Polinomio reducido. • Polinomio completo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Identificación del grado, el término independiente y los coeficientes de un polinomio. • Reducción de polinomios. • Ordenación de los términos de un polinomio. • Distinción de polinomios completos e incompletos.
2. Determinar el valor numérico de un polinomio.	<ul style="list-style-type: none"> • Valor numérico de un polinomio. 	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo del valor numérico de un polinomio.
3. Realizar operaciones con polinomios: sumas y restas.	<ul style="list-style-type: none"> • Suma y resta de polinomios. 	<ul style="list-style-type: none"> • Suma y resta de polinomios.
4. Realizar operaciones con polinomios: multiplicación.	<ul style="list-style-type: none"> • Multiplicación de polinomios. 	<ul style="list-style-type: none"> • Multiplicación de polinomios: aplicación de la propiedad distributiva.
5. Realizar operaciones con polinomios: división.	<ul style="list-style-type: none"> • División de polinomios. 	<ul style="list-style-type: none"> • División de polinomios. • Comprobación de las divisiones.
6. Identificar y desarrollar igualdades notables.	<ul style="list-style-type: none"> • Cuadrado de una suma. • Cuadrado de una diferencia. • Producto de una suma por una diferencia. 	<ul style="list-style-type: none"> • Identificación y desarrollo de las igualdades notables.

- 2 Reduce el polinomio y ordénalo, de mayor a menor grado.

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x + 4x^4 - 3x + 2x^2 + 5$$

$$P(x) = \boxed{}$$

- Tiene _____ términos.
- El término independiente es _____
- El grado del polinomio es _____
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? _____

- 3 Reduce el polinomio y ordénalo, de mayor a menor grado.

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3$$

$$P(x) = \boxed{}$$

- Tiene _____ términos.
- El término independiente es _____
- El grado del polinomio es _____
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? _____

- 4 Señala si los siguientes polinomios son completos o incompletos. Completa la tabla.

POLINOMIO	COMPLETO	INCOMPLETO	FALTAN LOS TÉRMINOS
$P(x) = -4x^2 + 5x - 2$			
$Q(x) = 2x^3 + 40$			
$R(x) = -10x^2 - 20x + 40$			
$S(x) = 40$			
$T(x) = x^3 + x^2 + 1$			

- 5 Dado el polinomio $Q(x) = 2x^5 + x^2 - x$, indica:

- a) Si el polinomio es ordenado.
- b) Si el polinomio está reducido.
- c) Si el polinomio es completo.
- d) Su grado.
- e) Su término independiente.

3

OBJETIVO 2

DETERMINAR EL VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$, para un valor de la variable $x = a$, se obtiene sustituyendo la variable x por a y operando.

EJEMPLO

En un polinomio, por ejemplo $P(x) = 2x^2 + 1$, se puede introducir cualquier valor a sustituyendo a x :

Para $x = 2$: $P(2) = 2 \cdot 2^2 + 1$

$$P(2) = 2 \cdot 4 + 1$$

$$P(2) = 8 + 1$$

$$P(2) = 9 \quad \text{El valor del polinomio cuando introducimos el valor 2 es 9.}$$

Para $x = 10$: $P(10) = 2 \cdot 10^2 + 1$

$$P(10) = 2 \cdot 100 + 1$$

$$P(10) = 200 + 1$$

$$P(10) = 201 \quad \text{El valor del polinomio cuando introducimos el valor 10 es 201.}$$

1 Calcula el valor numérico de los polinomios para $x = 1$.

a) $P(x) = x + 1$

$$x = 1$$

$$P(\quad) = \square + 1$$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

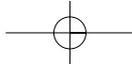
2 Halla el valor numérico de cada polinomio para el valor de la variable indicado.

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$

c) $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$

b) $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$, para $x = -1$

d) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$



OBJETIVO 3

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: SUMAS Y RESTAS**3**

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- La **suma** de dos polinomios se calcula sumando los términos semejantes de ambos.
- La **resta** de dos polinomios se obtiene sumando el primero con el polinomio opuesto del segundo.
- Recuerda que la regla básica de las sumas y restas de polinomios es que **solo se pueden sumar y restar términos semejantes**.

EJEMPLO

Suma los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ y $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** solo se suman los términos semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 - \boxed{2x^2} + \boxed{5x} - \boxed{3} + \boxed{4x^2} - \boxed{3x} + \boxed{2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios.

$$\begin{array}{r} P(x) = \quad 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + Q(x) = \quad 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

EJEMPLO

Resta los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$ y $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** el signo negativo delante del paréntesis afecta a todos los términos.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - \boxed{5x^2} + \boxed{5} - (\boxed{5x^2} - 2x + \boxed{7}) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios como se indica

$$\begin{array}{r} P(x) = \quad 3x^3 - 5x^2 \quad + 5 \\ - Q(x) = \quad \quad - (5x^2 - 2x + 7) \\ \hline P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

- 1 Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, halla $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$, resolviendo las operaciones de las maneras estudiadas: en línea y en columna.



3

2 Calcula la suma y resta de estos polinomios.

a) $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ + Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ - Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ + Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ - Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ + Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ - Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

d) $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ + Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ - Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

e) $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ + Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ - Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

OBJETIVO 4

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: MULTIPLICACIÓN**3**

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- El **producto** de dos polinomios se halla **multiplicando cada uno de los monomios de uno de ellos por todos los monomios del otro y sumando** (o restando) los polinomios obtenidos en esas multiplicaciones.
- Para multiplicar dos polinomios es necesario aplicar la **propiedad distributiva**.

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en línea:

$$\begin{aligned}
 P(x) \cdot Q(x) &= (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) = && \leftarrow \text{Se multiplican todos los monomios de un polinomio por todos los monomios del otro polinomio.} \\
 &= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3} + \boxed{2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3} + \boxed{x \cdot x^2 + x \cdot 3} - \boxed{7 \cdot x^2 + 7 \cdot 3} \\
 &= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21 \\
 &= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21 && \leftarrow \text{Solo se suman términos semejantes.} \\
 \mathbf{P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21}
 \end{aligned}$$

1 Multiplica los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 + 1$

$$\begin{aligned}
 P(x) \cdot Q(x) &= (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1) && \leftarrow \text{Multiplica los monomios.} \\
 &= \boxed{} - \boxed{} - \boxed{} = \boxed{} - \boxed{} + \boxed{} = \\
 &= && \leftarrow \text{Suma los términos.}
 \end{aligned}$$

$P(x) \cdot Q(x) =$

b) $P(x) = x^3 - 1$ y $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

3

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en columna:

$$\begin{array}{r}
 P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7 \\
 \times Q(x) = x^2 + 3 \\
 \hline
 21x^3 + 6x^2 + 3x - 21 \quad \leftarrow \text{Producto de 3 por } 7x^3, 2x^2, x, 7. \\
 + 7x^5 + 2x^4 + x^3 - 7x^2 \quad \leftarrow \text{Producto de } x^2 \text{ por } 7x^3, 2x^2, x, 7. \\
 \hline
 P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21 \quad \leftarrow \text{Suma de monomios semejantes.}
 \end{array}$$

2 Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = 3x + 2$

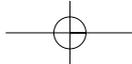
$$\begin{array}{r}
 P(x) = 5x^2 - 3x + 4 \\
 \times Q(x) = 3x + 2 \\
 \hline
 15x^3 - 9x^2 + 12x + 8 \quad \leftarrow \text{Producto de 2 por } 5x^2, 3x, 4. \\
 + 15x^3 - 9x^2 + 12x + 8 \quad \leftarrow \text{Producto de } 3x \text{ por } 5x^2, 3x, 4. \\
 \hline
 P(x) \cdot Q(x) = \quad \leftarrow \text{Suma de monomios semejantes.}
 \end{array}$$

3 Calcula el producto de los polinomios $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x + 3$, utilizando la propiedad distributiva.

4 Halla el producto de los siguientes polinomios.

a) $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x$

b) $R(x) = x^4 - x + 1$ y $S(x) = x^2 + 1$



OBJETIVO 5

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: DIVISIÓN

3

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Para dividir dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, hay que tener en cuenta que el grado del polinomio $P(x)$ debe ser mayor o igual que el grado del polinomio $Q(x)$.
- Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, existen otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que cumplen que:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$P(x)$ es el polinomio **dividendo**.

$Q(x)$ es el polinomio **divisor**.

$C(x)$ es el polinomio **cociente**.

$R(x)$ es el polinomio **resto**.

- Si el resto de la división es nulo, es decir, si $R(x) = 0$:

La **división** es **exacta**.

El polinomio $P(x)$ es **divisible por $Q(x)$** .

- En caso contrario, se dice que la **división** es **entera**.

EJEMPLO

Divide los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 5$

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 \\ \hline x^2 + 5 \end{array}$$

Hay que elegir un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $5x^3$:

$$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3. \text{ En este caso, } \bigcirc = 5x.$$

$$\begin{array}{r} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 \\ \cancel{5x^3} - 7 \\ \hline -25x - 7 \\ + 3 \\ \hline 3x^2 - 20x - 7 \end{array}$$

Multiplicamos $5x$ por cada uno de los términos del polinomio cociente (x^2 , 5), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $3x^2$, en este caso 3 .

$$\begin{array}{r} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 \\ \cancel{5x^3} - 7 \\ \hline -25x - 7 \\ + 3 \\ \hline \cancel{3x^2} - 20x - 7 \\ \cancel{3x^2} - 15 \\ \hline -20x - 22 \end{array}$$

Multiplicamos 3 por cada uno de los términos del polinomio cociente (x^2 , 5), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $20x$, pero no existe ninguno. Por tanto, la división finaliza.

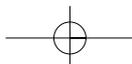
Polinomio dividendo: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$

Polinomio divisor: $Q(x) = x^2 + 5$

Polinomio cociente: $C(x) = 5x + 3$

Polinomio resto: $R(x) = -20x - 22$

En este caso, la división es entera, ya que el resto obtenido es distinto de cero.



3

1 Calcula las divisiones de polinomios, y señala si son exactas o enteras.

a) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x - 2$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = x$

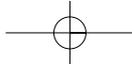
2 Efectúa estas divisiones y comprueba que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.

a) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 2$

b) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x^3$



OBJETIVO 6

IDENTIFICAR Y DESARROLLAR IGUALDADES NOTABLES

3

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

CUADRADO DE UNA SUMA

- El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$$(x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

$$(4x + y)^2 = (4x + y) \cdot (4x + y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$$

1 Desarrolla las siguientes igualdades.

a) $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$

b) $(3x^3 + 3)^2 =$

c) $(2x + 3y)^2 =$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

- El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$$(2y - 3)^2 = (2y - 3) \cdot (2y - 3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$$

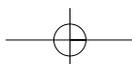
$$(x^2 - 2)^2 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$$

2 Desarrolla las igualdades.

a) $(6x - 4y)^2 = (6x - 4y) \cdot (6x - 4y) =$

b) $(5x^4 - 2)^2 =$

c) $(4x^3 - a^2)^2 =$



3

PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA

- El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab + b^2 = a^2 - b^2$$

EJEMPLO

$$(3x + 2) \cdot (3x - 2) = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$$

$$(5x - 3y) \cdot (5x + 3y) = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$$

3 Desarrolla los siguientes productos.

a) $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b) $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c) $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d) $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

4 Desarrolla los productos.

a) $(x + 5)^2 =$

b) $(2y - 7)^2 =$

c) $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d) $(abc + 1)^2 =$

e) $(7 - 3x)^2 =$

f) $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g) $(3xy + x^3)^2 =$

5 Desarrolla.

a) $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$