

5 Sistemas de ecuaciones

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones son necesarios para plantear y solucionar numerosos problemas reales, por lo que los alumnos deben ser capaces de reconocerlos y resolverlos.

La obtención de un sistema equivalente a uno dado es fundamental, ya que permite hallar la solución del sistema planteado de una forma sencilla.

A lo largo del tema se exponen los tres métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas: sustitución, igualación y reducción. Se deben dejar claros los pasos que hay que dar para resolver un sistema por cada uno de los métodos, así como señalar sus similitudes y diferencias.

Para decidir cuál de los tres métodos es el más indicado para resolver un sistema, es preciso examinar los coeficientes de las incógnitas; en cualquier caso, la solución va a ser la misma.

Conviene resolver algún sistema por los tres métodos para que el alumno compruebe cuál de ellos es el más sencillo en cada sistema.

La resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones no es especialmente complicada, pero debemos insistir en plantear las cuatro fases ya conocidas: leer detenidamente el enunciado, plantear el sistema de ecuaciones, resolverlo por el método más adecuado y, por último, comprobar la solución.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x e y se expresa de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array} \right\}$$

- *Resolver un sistema* es encontrar dos números tales que, al sustituirlos en las dos ecuaciones, las verifiquen. Un sistema es *compatible* si tiene solución.
- Dos sistemas son *equivalentes* si tienen la misma solución.
- *Método de sustitución*: despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir en la otra. Resolver la ecuación que resulta. La otra incógnita se halla sustituyendo el valor obtenido de la primera en cualquiera de las dos ecuaciones.
- *Método de igualación*: despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualar las expresiones obtenidas y resolver la ecuación que resulta. La otra incógnita se halla sustituyendo el valor obtenido de la primera en cualquiera de las dos ecuaciones.
- *Método de reducción*: buscar un sistema equivalente al dado, en el que los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos. Sumar o restar las ecuaciones, eliminando así una incógnita, y resolver la ecuación que resulta. La otra incógnita se halla sustituyendo el valor obtenido de la primera en cualquiera de las dos ecuaciones.
- Las fases en la resolución de un problema son: comprender, plantear, resolver y comprobar la solución.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	<ul style="list-style-type: none"> • Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. • Coeficientes y términos independientes. 	<ul style="list-style-type: none"> • Identificación de los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. • Representación gráfica de sistemas, para comprobar si son o no equivalentes.
2. Resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Métodos de resolución.	<ul style="list-style-type: none"> • Método de sustitución. • Método de igualación. • Método de reducción. 	<ul style="list-style-type: none"> • Resolución de un sistema por el método de sustitución. • Resolución de un sistema por el método de igualación. • Resolución de un sistema por el método de reducción.
3. Resolver problemas por sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	<ul style="list-style-type: none"> • Planteamiento, resolución y comprobación de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Resolución de problemas mediante sistemas de dos ecuaciones. • Comprobación de la solución.

5 OBJETIVO 1

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Un **sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones que se puede representar de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array} \right\}$$

- **Coefficientes** de las incógnitas: a, a', b, b'
- **Términos independientes:** k, k'
- Una **solución** de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifican las dos ecuaciones.

EJEMPLO

- $\left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{array} \right\}$ Las incógnitas son x e y .
 Los coeficientes de las incógnitas son 2, -1, 1 y 1.
 Los términos independientes son 3 y 3.

Las parejas de valores de la tabla cumplen la primera ecuación:

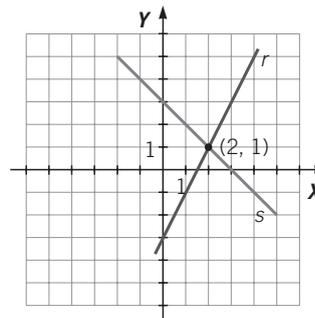
x	0	1	2	3	4	5
y	-3	-1	1	3	5	7

Como vemos, la pareja de valores (2, 1) cumple las dos ecuaciones, por lo que será la solución del sistema.

Si representamos las parejas de valores (x, y) de las tablas anteriores, obtenemos dos rectas, r y s , que se cortan en el punto (2, 1), que es la solución del sistema.

Las parejas de valores de la tabla cumplen la segunda ecuación:

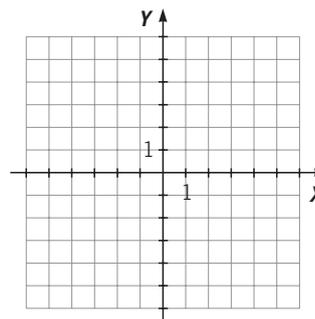
x	0	1	2	3	4	5
y	3	2	1	0	-1	-2



- 1 Halla las parejas de valores que son soluciones de las ecuaciones del sistema, y determina cuál es la solución.

Representa las rectas correspondientes a cada una de las ecuaciones, comprobando que el punto en el que se cortan es la solución del sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + 5y = 8 \\ 3x - 2y = 7 \end{array} \right\}$$



Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

EJEMPLO

Los sistemas $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$ y $\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ son equivalentes, ya que tienen la misma solución: $x = 2, y = 4$

Si representamos gráficamente ambos sistemas, obtenemos:

Recta r : $3x - y = 2$

x	0	1	2	3
y	-2	1	4	7

Recta t : $x - y = -2$

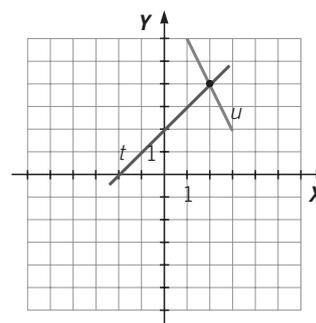
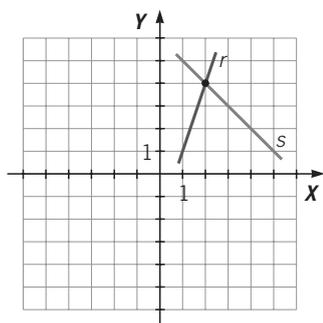
x	0	1	2	3
y	2	3	4	5

Recta s : $x + y = 6$

x	0	1	2	3
y	6	5	4	3

Recta u : $2x + y = 8$

x	0	1	2	3
y	8	6	4	2



El punto donde se cortan los dos pares de rectas es el mismo: $(2, 4)$, que es la solución de ambos sistemas. Son sistemas equivalentes.

2 Representa gráficamente las dos ecuaciones de los sistemas. ¿Son equivalentes?

a) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Recta r : $x - 3y = 4$

x	0	1	2	3
y				

b) $\begin{cases} 5x - y = 6 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Recta t : $5x - y = 6$

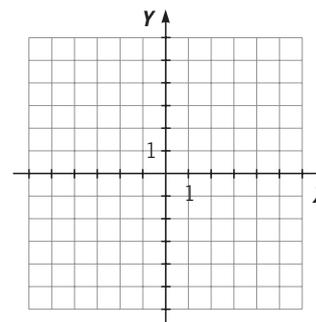
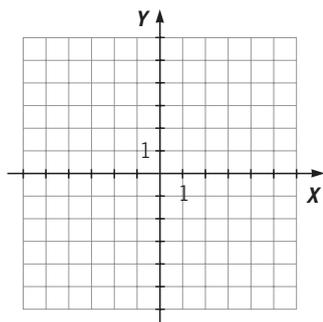
x	0	1	2	3
y				

Recta s : $x + y = 0$

x	0	1	2	3
y				

Recta u : $x + y = 2$

x	0	1	2	3
y				



5 OBJETIVO 2

RESOLVER SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifica las dos ecuaciones. Si un sistema tiene solución, se dice que es **compatible**.
- **Resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas** es encontrar la solución o las soluciones de dicho sistema.

EJEMPLO

Estudia si el par de números (2, 3) es solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$.

Para ver si el par de números (2, 3) es solución del sistema, hay que comprobar si cumplen o no las dos ecuaciones. Sustituyendo en ambas ecuaciones, tenemos:

$$\begin{aligned} 2x - y = 1 & \rightarrow 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 & \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ x + 2y = 8 & \rightarrow 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8 & \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

Por tanto, el par de números (2, 3) es una solución del sistema, y el sistema es compatible.

Para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas hay tres métodos de resolución:

- (I) Método de **sustitución**.
- (II) Método de **igualación**.
- (III) Método de **reducción**.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de sustitución**:

- **Despejar** la incógnita en una de las ecuaciones.
- **Sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.
- **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

- **Elegimos** para despejar la incógnita x de la segunda ecuación: $x = 8 - 2y$
- **Sustituimos** esta incógnita en la primera ecuación:

$$2x - y = 1 \rightarrow 2 \cdot (8 - 2y) - y = 1$$
- **Resolvemos** la ecuación con la incógnita y obtenida:

$$16 - 4y - y = 1 \rightarrow 16 - 5y = 1 \rightarrow -5y = 1 - 16 = -15 \rightarrow y = \frac{-15}{-5} \rightarrow y = 3$$
- **Sustituimos** el valor $y = 3$ en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera:

$$2x - y = 1 \rightarrow 2x - 3 = 1 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$
- **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hemos de sustituir el par de valores (2, 3) en las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - y = 1 & \rightarrow 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 & \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ x + 2y = 8 & \rightarrow 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8 & \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

Por tanto, el par de valores $x = 2$, $y = 3$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

1 Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución y comprueba las soluciones.

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y = 9 \\ 2x - 9y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x - y = 14 \end{cases}$$

2 Resuelve por el método de sustitución, y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.

$$\begin{cases} \frac{5x + 3}{6} + y = 2 \\ \frac{2x}{3} + 3y = -1 \end{cases}$$

Para resolverlo, seguimos estos pasos.

1.º En cada ecuación reducimos a común denominador:

$$\begin{cases} \frac{5x + 3}{6} + \frac{6y}{6} = \frac{6 \cdot 2}{6} \\ \frac{2x}{3} + \frac{3y \cdot 3}{3} = -\frac{1 \cdot 3}{3} \end{cases}$$

2.º Quitamos los denominadores:

$$\begin{cases} 5x + 3 + 6y = 12 \\ 2x + 9y = -3 \end{cases}$$

3.º Resolvemos por sustitución el sistema resultante, comprobando la solución:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 9 \\ 2x + 9y = -3 \end{cases}$$

5

- 3** Resuelve por el método de sustitución y comprueba la solución de los sistemas de ecuaciones con fracciones.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \frac{2x+3}{2} + \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{5x-1}{2} - \frac{4y+39}{5} = -1 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{5x+3}{6} + \frac{y-1}{4} = 2 \\ \frac{x-2}{5} - \frac{y+5}{10} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \frac{3x-6}{3} - \frac{2y-3}{7} = -1 \\ x + \frac{3y}{2} = -3 \end{array} \right\}$$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de igualación**:

- **Sustituir** la misma incógnita en las dos ecuaciones.
- **Igualar** las expresiones obtenidas.
- **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

- **Elegimos** para despejar la incógnita y de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 12 - x \end{cases}$$

- **Igualamos** las expresiones obtenidas: $2x - 3 = 12 - x$
- **Resolvemos** la ecuación con la incógnita x obtenida:

$$2x + x = 12 + 3 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$$

- **Sustituimos** el valor $x = 5$ en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera:

$$2x - y = 3 \rightarrow 2 \cdot 5 - y = 3 \rightarrow 10 - 3 = y \rightarrow y = 7$$

- **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hemos de sustituir el par de valores (5, 7) en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 5 - 7 = 10 - 7 = 3 \\ 5 + 7 = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Cumple la ecuación.} \\ \text{Cumple la ecuación.} \end{cases}$$

Por tanto, el par de valores $x = 5$, $y = 7$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

- 4** Resuelve por el método de igualación, y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{2y+2}{3} = 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{y-4}{6} = 0 \end{cases}$$

- 1.º Reducimos a común denominador las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{3(x+1)}{6} + \frac{2(2y+2)}{6} = \frac{12}{6} \\ \frac{2x}{6} - \frac{y-4}{6} = 0 \end{cases}$$

- 2.º Quitamos los denominadores:

$$\begin{cases} 3x + 3 + 4y + 4 = 12 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

- 3.º Resolvemos por igualación el sistema resultante:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

5

- 5 Resuelve por el método de igualación, y comprueba la solución de los sistemas de ecuaciones con fracciones.

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y+4}{3} &= 1 \\ x - \frac{y-1}{3} &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} \frac{y+1}{5} - y &= -2 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y}{5} &= -\frac{1}{15} \end{aligned} \right\}$$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de reducción**:

- **Buscar un sistema equivalente** en el que los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos.
- **Restar** o **sumar** las dos ecuaciones obtenidas, eliminando una incógnita.
- **Resolver** la ecuación con una sola incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$\left. \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 5x + 3y &= 18 \end{aligned} \right\}$$

- Obtenemos un **sistema equivalente**. Para ello, **elegimos** la incógnita que sea más sencilla para reducir, en este caso x . Multiplicamos la primera ecuación por 5:

$$\left. \begin{aligned} 5x - 10y &= 5 \\ 5(x - 2y = 1) \rightarrow 5x + 3y &= 18 \end{aligned} \right\}$$

- **Restamos** las dos ecuaciones del sistema para eliminar los términos con x y reducir el sistema:

$$\begin{array}{r} \cancel{5x} - 10y = 5 \\ - (\cancel{5x} + 3y = 18) \\ \hline -13y = -13 \end{array}$$

- **Resolvemos** la ecuación obtenida:

$$-13y = -13 \rightarrow y = 1$$

- **Sustituimos** el valor obtenido en una de las dos ecuaciones del sistema, en la que resulta más sencilla para operar, en este caso la primera:

$$x - 2y = 1 \rightarrow x - 2 \cdot 1 = 1 \rightarrow x = 3$$

- **Comprobamos** el resultado. Para ello hemos de sustituir el par de valores (3, 1) en las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x - 2y = 1 \\ 5x + 3y = 18 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 3 - 2 \cdot 1 = 1 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 18 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 1 = 1 \\ 18 = 18 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

Por tanto, el par de valores $x = 3$, $y = 1$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

- 6 Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba la solución.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

- Obtenemos un **sistema equivalente**:

En este caso, la variable x o la variable y no aparecen multiplicadas por 1 en ninguno de los términos de las ecuaciones, así que podemos elegir una u otra. Elegimos, por ejemplo, la variable y .

Para lograr que los dos términos con variable y tengan el mismo coeficiente, hay que multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 2, de forma que:

$$\begin{cases} 3 \cdot (3x - 2y = 7) \\ 2 \cdot (2x + 3y = 9) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x - 6y = 21 \\ 4x + 6y = 18 \end{cases}$$

- **Sumamos** las dos ecuaciones para eliminar los términos con y :

$$\begin{array}{r} 9x - 6y = 21 \\ + 4x + 6y = 18 \\ \hline 13x \quad = 39 \end{array}$$

- **Resolvemos** la ecuación obtenida: $x = \dots$
- **Sustituimos** este valor en cualquiera de las dos ecuaciones para hallar el valor de y :

- **Comprobamos** la solución:

- 7 Resuelve por el método de reducción los sistemas y comprueba las soluciones.

a) $\begin{cases} 7x + 3y = 2 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ 2x + 5y = 72 \end{cases}$

5

- 8** Resuelve los siguientes sistemas por los tres métodos. Comprueba la solución y decide cuál de los métodos es más sencillo para resolver cada sistema.

a)
$$\begin{cases} 4x - 5y = 0 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$

- Por sustitución:

b)
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y = 19 \end{cases}$$

- Por sustitución:

- Por igualación:

- Por igualación:

- Por reducción:

- Por reducción:

En este caso, el método más adecuado es _____

En este caso, el método más adecuado es _____

OBJETIVO 3

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES**5**

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Para resolver un problema mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas hay que realizar los siguientes pasos.

- 1.º **Comprender** el problema.
- 2.º **Plantear** las ecuaciones y formar el sistema de ecuaciones.
- 3.º **Resolver** el sistema de ecuaciones mediante cualquiera de los tres métodos.
- 4.º **Comprobar** que la solución cumple las condiciones del enunciado.

EJEMPLO

La suma de los goles marcados por dos equipos es 30, y cuando ambos equipos hayan marcado 5 goles más, la diferencia entre ambos equipos será de 2 goles. Halla los goles marcados por cada equipo.

1.º Lee el problema las veces que sea necesario hasta comprender su enunciado.

2.º Plantea las ecuaciones y forma el sistema:

- Elegir las incógnitas: x = número de goles marcados por el equipo A
 y = número de goles marcados por el equipo B
- Plantear el problema:

	AHORA		CUANDO HAYAN MARCADO 5 GOLES MÁS
Equipo A	x	→	$x + 5$
Equipo B	y	→	$y + 5$
	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> $x + y = 30$		<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> $(x + 5) - (y + 5) = 2$

- Formar el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 30 \\ (x + 5) - (y + 5) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 30 \\ x - y = 2 \end{array} \right\}$$

3.º Resuelve el sistema por el método que creas más conveniente, en este caso por reducción.

Sumamos ambas ecuaciones, para eliminar los términos con y :

$$\begin{array}{r} x + y = 30 \\ + \quad x - y = 2 \\ \hline 2x = 32 \rightarrow x = 16 \end{array}$$

Sustituyendo en la primera ecuación: $16 + y = 30 \rightarrow y = 14$

Por tanto, el equipo A ha marcado 16 goles, y el equipo B, 14 goles.

4.º Comprobamos la solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 30 \\ x - y = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 16 + 14 = 30 \\ 16 - 14 = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 30 = 30 \\ 2 = 2 \end{array} \right\}$$

Ambas ecuaciones se cumplen, y la solución obtenida es correcta.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

- 1** Calcula dos números cuya suma es 15 y su diferencia es 1.

5

- 2** En un corral, entre gallinas y ovejas hay 27 animales, y contando las patas hay 76 patas en total. ¿Cuántas gallinas y ovejas hay?
- 3** En un aparcamiento hay 90 vehículos, entre coches y motos. Si salieran 40 coches y 10 motos, el número de coches igualaría el número de motos. Halla el número de coches y de motos que hay en el aparcamiento.
- 4** Una chica compra 2 refrescos y 3 bolsas de pipas por 3,50 €, y un chico compra 3 refrescos y 5 bolsas de pipas por 5,50 €. Halla lo que cuesta cada refresco y cada bolsa de pipas.