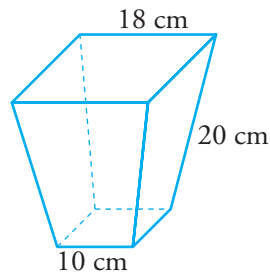




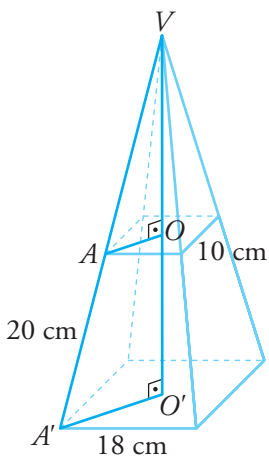
8. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

Soluciones

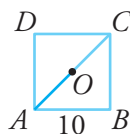
1 Una maceta tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular con las dimensiones que se indican en la figura. Calcula su volumen.



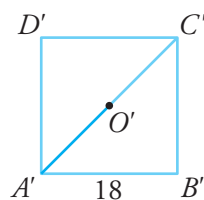
AYUDA



- Prolongamos las aristas laterales hasta que se corten para obtener la pirámide de la que se obtiene el tronco.
- Tenemos que hallar la altura de la pirámide mayor VO' , y de la menor, VO :



$$\overline{AC} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \rightarrow \overline{AO} = \dots$$



$$\overline{A'C'} = \sqrt{18^2 + 18^2} = 18\sqrt{2} \rightarrow \overline{A'O'} = \dots$$

- Por la semejanza de los triángulos AOV y $A'O'V'$ se verifica:

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{A'V}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{A'O'}} \rightarrow \text{Obtén } \overline{AV} \text{ y } \overline{A'V}.$$

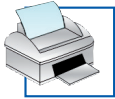
- Con el teorema de Pitágoras, halla las alturas \overline{VO} y $\overline{VO'}$.

$$\text{Volumen del tronco} = V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3}18^2 \cdot \overline{VO'} - \frac{1}{3}10^2 \cdot \overline{VO} = \dots$$

SOLUCIÓN

$$\overline{AO} = 5\sqrt{2} \text{ cm}; \overline{A'O'} = 9\sqrt{2} \text{ cm}; \overline{AV} = 25 \text{ cm}; \overline{A'V} = 45 \text{ cm}; \overline{VO} \approx 23,98 \text{ cm}; \overline{VO'} \approx 43,16 \text{ cm}$$

$$V = 3861,95 \text{ cm}^3$$



8. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

Soluciones

- 2 Queremos hacer un sombrero de cartulina en forma de cono que cubra la sexta parte de la superficie de una esfera de radio 6 cm.

Calcula la cantidad de cartulina que necesitaremos.

AYUDA

- Hallamos la superficie del casquete que cubre el cono:

$$S_{\text{CASQUETE}} = \frac{1}{6} S_{\text{ESFERA}} = \frac{1}{6} 4\pi R^2 = 24\pi \text{ cm}^2$$

- Con la superficie del casquete hallamos su altura h :

$$2\pi R h = 24\pi \rightarrow h = \dots$$

- En el triángulo rectángulo OCB calculamos r , radio del cono:

$$r^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2 \rightarrow r = \dots$$

- Justifica que el triángulo OAB es rectángulo y aplica en él el teorema de la altura para hallar d :

$$r^2 = (6 - h)(d + h) \text{ Sustituye } r \text{ y } h \text{ y obtén } d.$$

- Halla la generatriz del cono en cualquiera de los triángulos ABC o ABO .

- Superficie lateral del cono: $\pi r g = \dots$

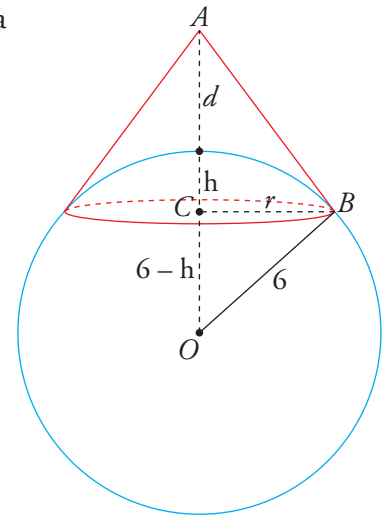
SOLUCIÓN

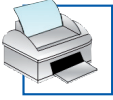
$$h = 2 \text{ cm}; r = \sqrt{20} \text{ cm}$$

El triángulo OAB es rectángulo ya que la tangente a la esfera desde A , \overline{AB} , es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

$$d = 3 \text{ cm} \rightarrow g = \sqrt{45} = 6,71 \text{ cm}$$

$$A_{\text{LATERAL}} = 94,25 \text{ cm}^2$$

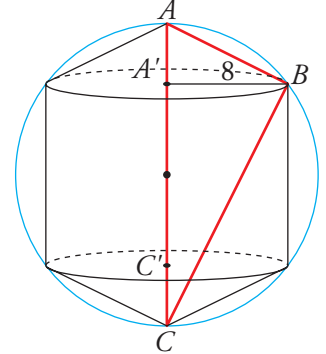




8. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

Soluciones

- 3 Una pieza mecánica está formada por un cilindro y dos conos encajados en una esfera de radio 10 cm. Calcula el volumen de la pieza en la que el radio del cilindro es 8 cm.



AYUDA

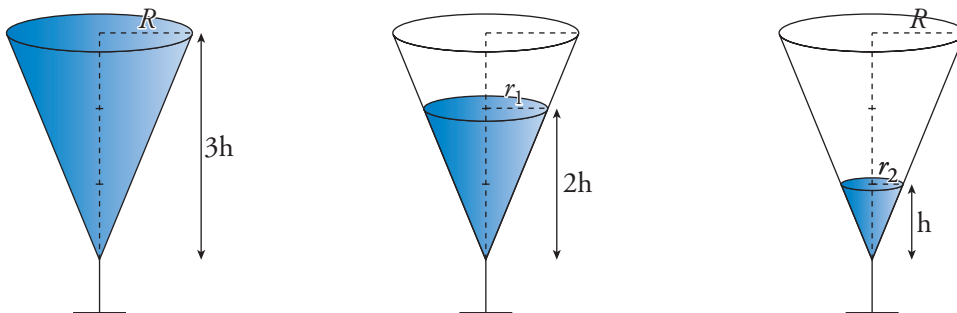
- Hay que hallar la altura de los conos y del cilindro.
- Observa el triángulo rectángulo ABC y aplica el teorema de la altura.

SOLUCIÓN

$$x^2 - 20x + 64 = 0; \overline{AA'} = 4 \text{ cm}; \overline{A'C'} = 12 \text{ cm}$$

$$V = 2\left(\frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 4}{3}\right) + \pi \cdot 8^2 \cdot 12 = 2948,91 \text{ cm}^3$$

- 4 Hemos llenado tres copas idénticas de forma distinta, tal como indica la figura. Si el volumen del líquido que contiene la primera es V , ¿cuál será el volumen de líquido en las otras dos?



AYUDA

- El volumen total es $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot 3h = \pi R^2 h$
- Utiliza la semejanza de triángulos para hallar r_1 y r_2 en función de R .

SOLUCIÓN

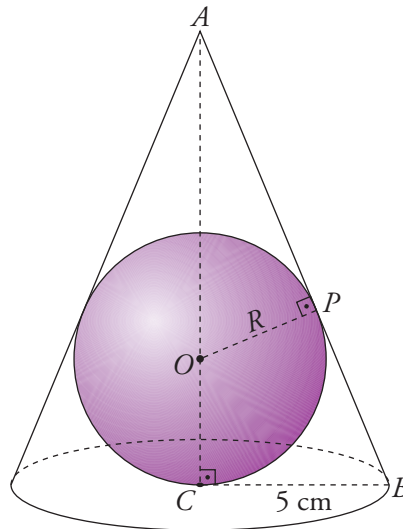
$$r_1 = \frac{2}{3}R; r_2 = \frac{1}{3}R \rightarrow V_1 = \frac{8}{27}V; V_2 = \frac{1}{27}V$$



8. Ayuda a la resolución de problemas: triángulos semejantes en el espacio

Soluciones

5 En un cono de radio 5 cm y altura 12 cm se inscribe una esfera. Calcula su radio.



AYUDA

- Los triángulos ACB y APO son semejantes, por ser rectángulos con un ángulo agudo común, el \hat{A} .
- Por semejanza: $\frac{\text{Hipotenusa de } APO}{\text{Hipotenusa de } ACB} = \frac{\text{Cateto menor de } APO}{\text{Cateto menor de } ACB}$
- Calcula \overline{AO} .
- Ten en cuenta que $\overline{AO} = \overline{AC} - R$.

SOLUCIÓN

$$\frac{12 - R}{13} = \frac{R}{5} \rightarrow R = 3,\hat{3} \text{ cm}$$