OBJETIVOS

a. Utilizar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo para resolver problemas de divisibilidad.
b. Representar fracciones en la recta numérica.
c. Identificar fracciones equivalentes.
d. Comparar fracciones.
e. Emplear correctamente la jerarquía de las operaciones para realizar operaciones con fracciones.
f. Discriminar entre fracción decimal y ordinaria.
g. Clasificar los números racionales según su expresión decimal en decimales exactos o periódicos puros y mixtos.
h. Clasificar los números reales en racionales e irracionales.
i. Redondear un número y calcular el error absoluto y relativo que se comete en el redondeo.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en comunicación lingüística

- Expresar oralmente y por escrito distintos hechos, conceptos, relaciones, operadores y estructuras de la divisibilidad y de los números racionales e irracionales.

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas aritméticos de divisibilidad y números racionales, aplicando una estrategia conveniente, escogiendo adecuadamente el método para la realización de un determinado cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador.

CONTENIDOS

Conceptos

- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números.
- Fracción equivalente.
- Fracción irreducible.
- Suma, resta, multiplicación y división de fracciones.
- El número racional.
- Fracción decimal y ordinaria.
- Número decimal exacto, periódico puro y mixto. Fracción generatriz.
- El número irracional.
- Redondeo. Error absoluto y relativo.
- Notación científica.

Procedimientos

- Representación en la recta de números racionales e irracionales.
- Comparación de números mediante la ordenación y la representación gráfica.
- Sustitución de un número por otro por medio del redondeo de acuerdo con la precisión que requiera el contexto.
- Utilización de los algoritmos tradicionales de suma, resta, multiplicación y división con fracciones y números decimales.
- Uso de diferentes procedimientos, paso de decimal a fracción o viceversa para efectuar cálculos de manera más sencilla.
- Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de los paréntesis en cálculos escritos.

Actitudes

- Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje numérico para comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
- Incorporación del lenguaje numérico, del cálculo y de la estimación de cantidades a la forma de proceder habitual.
- Sensibilidad, interés y valoración crítica ante las informaciones y mensajes de naturaleza numérica.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas numéricos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números.
b.1. Representa fracciones en la recta numérica.
c.1. Identifica fracciones equivalentes.
d.1. Compara fracciones.
e.1. Aplica correctamente la jerarquía de las operaciones con operaciones combinadas.
f.1. Identifica fracción decimal y ordinaria.
g.1. Expresa como decimal una fracción y clasifica los números obtenidos en decimales exactos, periódicos puros y mixtos.
h.1. Conoce y usa la clasificación de los números reales.
i.1. Aproxima números por redondeo y truncamiento y calcula su error absoluto y relativo.

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 1 ▮ Ficha 1
Fracciones

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Calcula mentalmente el M.C.D. de:

a) 8 y 12 b) 6 y 9 c) 10 y 15 d) 8 y 24

a) 4 b) 3 c) 5 d) 8

2. Calcula mentalmente el m.c.m. de:

a) 4 y 6 b) 5 y 10 c) 8 y 12 d) 15 y 20

a) 12 b) 24 c) 10 d) 60

3. De las siguientes fracciones di cuáles son equivalentes:

$\frac{2}{6} \quad \frac{8}{28} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{10}{30}$

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \frac{10}{30} \qquad \frac{8}{28} = \frac{4}{7}$

4. Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:

$\frac{5}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{6}{5}$

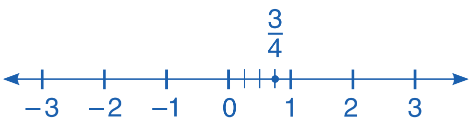
$\frac{5}{2} = \frac{150}{60}, \quad \frac{2}{3} = \frac{40}{60}, \quad \frac{3}{4} = \frac{45}{60}, \quad \frac{6}{5} = \frac{72}{60}$

$\frac{5}{2} > \frac{6}{5} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$

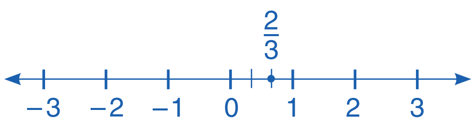
5. Halla la fracción irreducible y represéntala en la recta:

a) $\frac{12}{16}$ b) $\frac{8}{12}$ c) $\frac{32}{24}$ d) $\frac{8}{40}$

a) $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

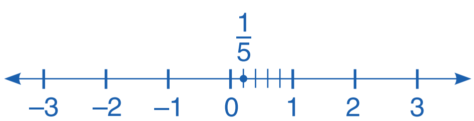


b) $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$



c) $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$

d) $\frac{8}{40} = \frac{1}{5}$



Operaciones con fracciones I

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

La **suma** y **resta** de fracciones con **igual denominador** es otra fracción que tiene por:

- **Numerador:** la suma o resta de los numeradores.
- **Denominador:** el mismo que el de las fracciones.

La **suma** y **resta** de fracciones con **distinto denominador** es otra fracción que tiene por:

- **Numerador:** la suma o resta que se obtiene al dividir el m.c.m. de los denominadores entre cada denominador y multiplicar por el numerador correspondiente.
- **Denominador:** el m.c.m. de los denominadores.

El **producto** de dos fracciones es otra fracción que tiene por:

- **Numerador:** el producto de los numeradores.
- **Denominador:** el producto de los denominadores.

1. Calcula mentalmente:

a) $\frac{1}{4} + 2$ b) $3 - \frac{1}{2}$ c) $4 \cdot \frac{5}{6}$

a) 9/4 b) 5/2 c) 10/3

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{3} - \frac{5}{6} + \frac{7}{4}$ b) $\frac{4}{9} + \frac{7}{15} - \frac{2}{5}$ c) $\frac{5}{8} - \frac{7}{12} + \frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{70} + \frac{6}{35} - \frac{4}{7}$

a) 19/12 b) 23/45 c) 7/24 d) –5/14

3. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{5}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{9} - \frac{4}{45} + \frac{7}{15}$ d) $\frac{7}{60} + \frac{8}{15} - \frac{3}{8}$

a) 25/12 b) 37/60 c) 14/15 d) 11/40

4. Multiplica las siguientes fracciones:

a) $\frac{7}{9} \cdot \frac{12}{5}$ b) $25 \cdot \frac{7}{15}$ c) $12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}$

a) 28/15 b) 35/3 c) 3/2

5. Multiplica las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{8} \cdot \frac{16}{5}$ b) $\frac{4}{7} \cdot \frac{25}{28}$ c) $35 \cdot \frac{4}{15}$ d) $\frac{5}{12} \cdot 4$

a) 6/5 b) 25/49 c) 28/3 d) 5/3

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 1 ▮ Ficha 3
Operaciones con fracciones II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Para **dividir** dos fracciones, se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

1. Haz las siguientes divisiones:

a) $\frac{8}{3} : \frac{5}{4}$ b) $\frac{24}{5} : 48$ c) $\frac{7}{18} : \frac{1}{6}$

a) 32/15 b) 1/10 c) 7/3

2. Haz las siguientes divisiones:

a) $\frac{4}{9} : \frac{8}{15}$ b) $\frac{12}{25} : \frac{3}{10}$

c) $\frac{14}{15} : 28$ d) $24 \cdot \frac{56}{5}$

a) 5/6 b) 8/5 c) 1/30 d) 15/7

La **jerarquía de las operaciones** dice que, cuando se tienen distintas operaciones combinadas con fracciones, se debe seguir un orden:

a) Paréntesis.

b) Potencias y raíces.

c) Multiplicaciones y divisiones.

d) Sumas y restas.

e) Si las operaciones tienen la misma jerarquía, se empieza por la izquierda.

No se debe olvidar la regla de los signos al multiplicar o dividir.

3. Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4} + \frac{2}{3} : \frac{1}{12}$ b) $\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{15} : \frac{4}{5}$

c) $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) + \frac{5}{4}$ d) $\left(\frac{2}{5} - 1\right) : \frac{2}{15} + \frac{11}{4}$

a) 17/2 b) 3/8 c) 11/12 d) –7/4

4. Un camión puede cargar 12 000 kg y lleva 3/5 de la carga. ¿Cuántos kilos lleva?

$\frac{3}{5} \cdot 200 = 7\,200$ kg

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 1 ▮ Ficha 4
Paso entre fracciones y decimales I

Bruño

Nombre ____________________ Curso ______ Fecha ________

- Una **fracción** es **decimal** si el denominador es la unidad seguida de ceros, o una equivalente. Las fracciones decimales dan origen a los números decimales exactos.
- Una fracción es **ordinaria** si no es decimal, es decir, el denominador no se puede poner como la unidad seguida de ceros. Las fracciones ordinarias dan origen a los números decimales periódicos.

1. Calcula mentalmente la expresión decimal de las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{5}$

a) 0,25 b) 1,5 c) $0,\widehat{6}$ d) 0,4

La **fracción generatriz de un número decimal exacto** tiene por:
- **Numerador:** el número decimal sin la coma.
- **Denominador:** la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga el número.

La **fracción generatriz de número decimal periódico puro** tiene por:
- **Numerador:** el resultado de la resta del número decimal sin la coma menos la parte entera.
- **Denominador:** tantos nueves como cifras tenga el período.

2. Calcula mentalmente la fracción de los siguientes números decimales:

a) 0,75 b) $1,\widehat{6}$ c) $0,\widehat{3}$ d) 2,5

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{2}$

3. Calcula mentalmente la fracción de los siguientes números decimales:

a) 0,25 b) 1,5 c) $0,\widehat{6}$ d) 0,4

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{5}$

4. Halla la expresión decimal de las siguientes fracciones y clasifica el cociente obtenido.

a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{67}{15}$ c) $\frac{28}{4}$ d) $\frac{39}{20}$

a) $2,\widehat{6}$ decimal periódico puro.
b) $4,4\widehat{6}$ decimal periódico mixto.
c) 7 entero.
d) 1,95 decimal exacto.

5. Halla la expresión decimal de las siguientes fracciones y clasifica el cociente obtenido.

a) $\frac{25}{6}$ b) $\frac{22}{7}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{29}{12}$

a) $2,1\widehat{3}$ decimal periódico mixto.
b) 4 entero.
c) 4,25 decimal exacto.
d) $1,\widehat{846153}$ decimal periódico puro.

Paso entre fracciones y decimales II

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ________

La **fracción generatriz de un número decimal periódico mixto** tiene por:

- **Numerador:** el resultado de la resta del número decimal sin la coma menos la parte entera seguida del anteperíodo.
- **Denominador:** tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

1. Halla el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro mide 26 cm. ¿Cómo es el decimal obtenido?

lado: $\frac{26}{3} = 8,\overset{\frown}{6}$

El decimal que se obtiene es periódico puro.

2. Clasifica en fracción ordinaria o decimal las siguientes fracciones:

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{13}{20}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{5}{6}$

a) Decimal. b) Decimal. c) Ordinaria. d) Ordinaria

3. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

a) 3,75

b) $2,8\overset{\frown}{3}$

c) $2,\overset{\frown}{36}$

a) $\frac{15}{4}$ b) $\frac{17}{6}$ c) $\frac{26}{11}$

4. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

a) $4,\overset{\frown}{285714}$

b) 2,125

c) $2,6\overset{\frown}{81}$

a) $\frac{30}{7}$ b) $\frac{17}{8}$ c) $\frac{59}{22}$

Números reales

Bruño

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ______

Los **números irracionales** son aquellos que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal no es ni exacta ni periódica.

El conjunto de los **números reales** está formado por los **racionales** y los **irracionales.**

- El **error absoluto** que se comete al aproximar un número es el valor absoluto de la diferencia entre el número exacto y el aproximado.
- El **error relativo** es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto.

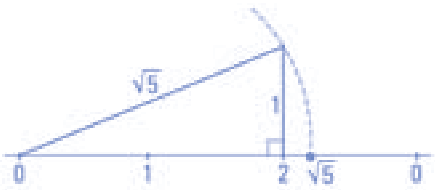
1. Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales:

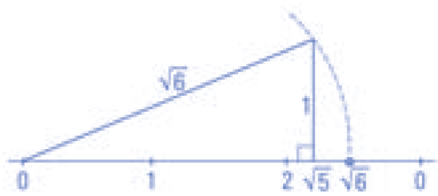
$2/3$	π	-7
$\sqrt{3}$	$1/2$	$\sqrt[5]{7}$

$2/3$ Racional	π Irracional	-7 Racional
$\sqrt{3}$ Iracional	$1/2$ Racional	$\sqrt[5]{7}$ Iracional

2. Representa gráficamente los siguientes números irracionales:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6}$





3. Redondea a dos cifras decimales y calcula:

a) 3,456 + 0,342 – 2,108 = 1,69

b) 15,362 · 3,236 = 49,7664

c) 45, 875 : 3,236 = 14,16

d) 2,458 + 42,253 : 8,417 = 7,48

4. Calcula el error absoluto si se redondean los siguientes números a dos cifras decimales:

a) 3,1415 b) 0,0278

c) 1,2068 d) 5,3975

a) |3,1415 – 3,14| = 0,0015 b) |0,0278 – 0,03| = 0,0022

c) |1,2068 – 1,21| = 0,0032 d) |5,3975 – 5,40| = 0,0025

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Calcula mentalmente el M.C.D. de:

a) 12 y 16 b) 6 y 15 c) 9 y 45 d) 16 y 24

a) 4 b) 3 c) 9 d) 8

2. Calcula mentalmente el m.c.m. de:

a) 5 y 6 b) 4 y 6 c) 4 y 12 d) 6 y 8

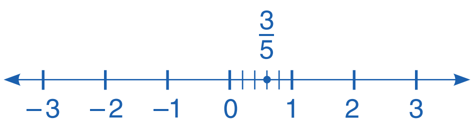
a) 30 b) 12 c) 12 d) 24

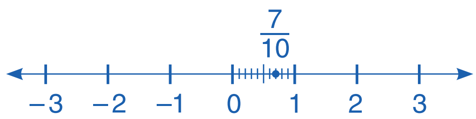
3. Indica cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes:

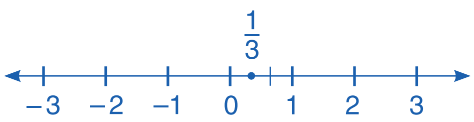
$\frac{8}{20}$ $\frac{35}{49}$ $\frac{10}{14}$ $\frac{10}{25}$ $\frac{2}{5}$

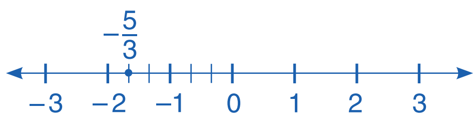
$\frac{8}{20} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ $\frac{10}{30} = \frac{10}{14}$

4. Halla la fracción irreducible y representa en la recta:

a) $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ 

b) $\frac{42}{60} = \frac{7}{10}$ 

c) $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ 

d) $-\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$ 

5. Calcula:

a) $\frac{9}{5} - 6 + \frac{13}{15}$ b) $2 - \frac{4}{3} - \frac{3}{8} + \frac{5}{6}$

a) –10/3 b) 9/8

6. Calcula mentalmente la expresión decimal de las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{4}{5}$

a) 0,75 b) 2,5 c) $0,\widehat{3}$ d) 0,8

7. Expresa en forma de fracción y calcula:

a) $3,5 + 1,25 \cdot 0,4 =$ b) $1,\widehat{6} + 1,\widehat{8} =$

a) $\frac{7}{2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} = 4$ b) $\frac{5}{3} + \frac{17}{9} = \frac{32}{9} = 3,\widehat{5}$

Bruño

OBJETIVOS

a. Usar el concepto de potencia de exponente natural.
b. Conocer y usar el concepto de potencia de exponente entero.
c. Operar con potencias y utilizar sus propiedades.
d. Utilizar la notación científica.
e. Conocer y usar el concepto de raíz enésima de un número.
f. Identificar radicales equivalentes.
g. Simplificar radicales.
h. Introducir factores dentro del signo radical.
i. Extraer factores del radicando.
j. Sumar y restar radicales.
k. Operar con radicales aplicando las propiedades: producto y cociente de radicales del mismo índice, potencia y raíz de un radical.
l. Transformar un radical en una potencia de exponente fraccionario y viceversa.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos de las potencias y de las raíces para interpretar fenómenos sencillos observables en el mundo natural.

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas de potencias y raíces aplicando una estrategia apropiada.

Autonomía e iniciativa personal

- Poner en práctica modelos sobre algoritmos de cálculo con potencias y raíces.

CONTENIDOS

Conceptos

- Potencia de exponente natural. Signo de una potencia.
- Producto y cociente de potencias de la misma base.
- Potencia de una potencia.
- Potencia de exponente entero.
- Notación científica.
- Raíz enésima de un número.
- Radicales equivalentes.
- Radicales semejantes.
- Potencias de exponente fraccionario.

Procedimientos

- Interpretación y utilización de los números y sus operaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso.
- Elaboración y utilización de estrategias personales de cálculo mental.
- Utilización de los algoritmos tradicionales de potenciación y radicación.
- Uso de diversas estrategias para estimar cantidades en forma de potencia, teniendo en cuenta la precisión requerida.
- Decisión sobre la conveniencia o no de aplicar potencias y raíces en la resolución de problemas numéricos.

Actitudes

- Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje numérico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
- Incorporación del lenguaje numérico, en lo que se refiere a potencias y radicales, del cálculo y de la estimación de cantidades a la forma de proceder habitual.
- Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier conteo, cálculo o problema numérico.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Utiliza los conceptos, procedimientos y terminología de las potencias y radicales con propiedad.
b.1. Identifica una potencia de exponente entero y la calcula.
c.1. Emplea las propiedades de las potencias para expresar en forma de una sola potencia resultados de operaciones con potencias.
d.1. Utiliza la notación científica.
e.1. Conoce y usa el concepto de raíz enésima de un número.
f.1. Identifica radicales equivalentes.
g.1. Simplifica radicales.
h.1. Introduce factores dentro del signo radical con corrección.
i.1. Extrae factores fuera del radical con corrección.
j.1. Suma y resta radicales semejantes.
k.1. Calcula con corrección productos, cocientes, potencias y raíces de radicales.
l.1. Escribe potencias de exponente fraccionario en forma de radical y viceversa.

Potencias de exponente natural

Nombre ______________________________ Curso ______ Fecha __________

El **signo de una potencia** es positivo, excepto si la base es negativa y el exponente impar, en cuyo caso es negativo.

1: Observa el ejemplo y completa la tabla con el signo adecuado.

Base	Exponente	Signo y Resultado	Ejemplo
+	Par o impar	+	$2^3 = 8 : 24 = 16$
–	Par	+	$(-2)^4 = 16$
–	Impar	–	$(-2)^5 = -32$

El **producto de dos potencias** de la **misma base** es otra potencia que tiene la misma base y como exponente la suma de los exponentes. $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

El **cociente de dos potencias** de la **misma base** es otra potencia que tiene la misma base y como exponente la diferencia de los exponentes. $a^n : a^p = a^{n-p}$

La **potencia de una potencia** es otra potencia que tiene la misma base y como exponente el producto de los exponentes. $(a^n)^p = a^{n \cdot p}$

2. Escribe en forma de potencia:

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$

b) $-5 \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^3$

3. Calcula mentalmente:

a) $2^3 = 8$

b) $(-2)^3 = 8$

c) $(-2)^4 = 16$

d) $0^7 = 0$

e) $(-7)^1 = -7$

f) $(-9)^0 = 1$

4. Calcula:

a) $3^4 = 81$

b) $(-3)^4 = 81$

c) $3^5 = 243$

d) $(-3)^5 = -243$

5. Multiplica para eliminar el paréntesis:

a) $3a^2b(2ab^2 - 5a^2b^3) = 6a^3b^3 - 15a^4b^4$

b) $2x^3y^2z(3xy^2z^2 + 4x^2yz^3 - 6x^3z^4) = 6x^4y^4z^3 + 8x^5y^3z^4 - 12x^6y^2z^5$

Potencias de exponente entero

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Una potencia de **exponente entero negativo** es igual a 1 dividido por la misma potencia pero con exponente positivo: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ siempre que $a \neq 0$

1. Calcula mentalmente en forma de fracción el resultado de las siguientes potencias:

a) $2^{-1} = 1/2$ b) $(-2)^{-2} = 1/4$ c) $2^{-3} = 1/8$ d) $(-2)^{-3} = -1/8$

e) $1^{-9} = 1$ f) $(-5)^{-1} = -1/5$ g) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} = 4/3$ h) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-1} = 6$

Notación científica: consiste en expresar un número como producto de un número decimal y una potencia de 10, de forma que la parte entera del número decimal esté comprendida entre 1 y 9.

La **potencia de un producto** es igual al producto de cada uno de los factores elevado al mismo exponente. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

La **potencia de un cociente** es igual al cociente de cada uno de los números elevado al mismo exponente. $(a : b)^n = a^n : b^n$

2. Aplicando la potencia de un producto o de un cociente, escribe como una sola potencia:

a) $3^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5 = (3 \cdot 5 \cdot 7)^5$ b) $7^6 : 9^6 = (7 : 9)^6$

c) $6^{-3} \cdot 7^{-3} = (6 \cdot 7)^{-3}$ d) $3^{-4} : 5^{-4} = (3 : 5)^{-4}$

3. Simplificando reduce a una sola potencia:

a) $\dfrac{12^5}{3^4 \cdot 2^{10}} =$ b) $\dfrac{3^4}{15^4}$

a) 3 b) 5^{-4}

4. Escribe en notación científica:

a) 54 689 000 000 000 000

b) La diezmillonésima parte de 4 unidades.

a) $5{,}4689 \cdot 10^{16}$

b) $4 \cdot 10^{-7}$

Radicales I

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Dos **radicales** son **equivalentes** si tienen las mismas raíces. Si en un radical se multiplica el índice y el exponente por el mismo número, se obtiene otro radical equivalente.

Para **simplificar un radical** se divide el índice de la raíz y el exponente del radicando por el M.C.D. de ambos. Esta simplificación es válida si existen los dos radicales.

Para **introducir un factor** en un radical se eleva el factor al número que indica el índice y se multiplica por el radicando.

1. ¿Cuántas raíces reales tienen los siguientes radicales?

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{0}$ c) $\sqrt{-25}$

c) $\sqrt[3]{-8}$ e) $\sqrt{1}$ f) $\sqrt[3]{1}$

a) Dos b) Una c) Ninguna d) Una e) Dos f) Una

2. Calcula mentalmente si es posible:

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt[3]{-125}$

c) $\sqrt{-49}$ e) $\sqrt[3]{-27}$

a) ±5 b) –5 c) No tiene d) –3

3. Simplifica los radicales:

a) $\sqrt[6]{5^4}$ b) $\sqrt[9]{5^6}$

c) $\sqrt[12]{5^8}$ e) $\sqrt[24]{5^{18}}$

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[3]{5^2}$ c) $\sqrt[3]{5^2}$ d) $\sqrt[4]{5^2}$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 2 ▮ Ficha 4
Radicales II

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ________

Para **extraer un factor de un radical,** se descompone el radicando en factores primos y se divide el exponente de cada factor entre el índice de la raíz. El cociente de la división sale fuera del radical como exponente del número, y el resto se queda dentro del radical como exponente del factor. Todos los exponentes del radicando tienen que ser menores que el índice.

Radicales semejantes son aquellos radicales que, después de simplificarlos, tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Para **sumar** y **restar radicales,** estos tienen que ser semejantes. En ese caso, se suman o restan los coeficientes y se deja el mismo radical.

1. Calcula las siguientes raíces factorizando el radicando:

a) $\sqrt{32\,400}$ b) $\sqrt[3]{3\,375}$ c) $\sqrt[5]{1\,024}$

a) 180 b) 15 c) 4

2. Extrae todos los factores posibles de:

a) $\sqrt{81a^5bc^6}$

b) $\sqrt[3]{128a^8b^2c^{15}}$

a) $9a^2c^3\sqrt{ab}$ b) $4a^2c^5\sqrt[3]{2a^2b^2}$

3. Suma y resta los siguientes radicales:

a) $\sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$

b) $5\sqrt{98} - 3\sqrt{200} + 4\sqrt{8}$

a) $4\sqrt{2}$ b) $13\sqrt{2}$

4. Sustituye los recuadros por uno de los signos = o ≠:

a) $\sqrt{36 + 64}$ ■ $\sqrt{36} + \sqrt{64}$

b) $\sqrt{100 - 36}$ ■ ± 8

c) $\sqrt[3]{8 + 27}$ ■ $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27}$

a) ≠ b) = c) ≠

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 2 ▮ Ficha 5
Propiedades y relación entre potencias y radicales I

Nombre ____________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Lee las propiedades y los ejemplos y completa la tabla con la fórmula adecuada.

Propiedades	Fórmula	Ejemplo
a) **Producto de radicales del mismo índice.** El producto de dos radicales del mismo índice es otro radical del mismo índice, y de radicando el producto de los radicandos.	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5 \cdot 25} = \sqrt[3]{125} = 5$
b) **Cociente de radicales del mismo índice.** El cociente de dos radicales del mismo índice es otro radical del mismo índice, y de radicando el cociente de los radicandos.	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$	$\sqrt[3]{32} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{32 : 4} = \sqrt[3]{8} = 2$
c) **Potencia de un radical.** La potencia de un radical es igual al radical de la potencia.	$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$	$(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2}$
d) **Raíz de un radical.** La raíz de un radical es otro radical, de índice el producto de los índices y de radicando el mismo.	$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$

Una **potencia de exponente fraccionario** es equivalente a un radical cuyo índice es el denominador del exponente y cuyo radicando es la base elevada al numerador del exponente, y viceversa. Si el exponente es negativo, el radical está en el denominador.

$$a^{p/n} = \sqrt[n]{a^p},\ a > 0 \qquad a^{-p/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^p}},\ a > 0$$

2. Aplicando las propiedades de los radicales, expresa como una sola raíz:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$ b) $\sqrt{6} : \sqrt{3}$

c) $(\sqrt[3]{5})^2$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$

a) $\sqrt{15}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{5^2}$ d) $\sqrt[6]{5}$

3. Aplica las propiedades de los radicales y calcula:

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}$ b) $\sqrt{20} : \sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

a) ±6 b) ±2 c) 5 d) ±2

Matemáticas 3.º ESO | Unidad 2 | Ficha 6
Propiedades y relación entre potencias y radicales II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Observa los ejemplos y completa las tablas con las potencias y radicales adecuados.

Potencias	Ejemplo
$a^n = a \cdot a \cdot \ldots^{n)} \ldots \cdot a$	$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$0^n = 0,\ n \neq 0$	$0^5 = 0$
$1^n = 1$	$1^3 = 1$
$a^0 = 1,\ a \neq 0$	$5^0 = 1$
$a^1 = a$	$4^1 = 4$
$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$	$5^3 \cdot 5^4 = 5^7$
$a^n : a^p = a^{n-p}$	$2^8 : 2^3 = 2^5$
$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$	$(5^3)^2 = 5^6$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$
$(a : b)^n = a^n : b^n$	$(5 : 7)^3 = 5^3 : 7^3$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$
$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$	$6^{1/5} = \sqrt[5]{6}$
$a^{-1/n} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$	$5^{-1/4} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$
$a^{p/n} = \sqrt[n]{a^p}$	$7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2}$
$a^{-p/n} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^p}}$	$6^{-3/4} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{6^3}}$

Radicales	Ejemplo
$\sqrt{a} = b$ si $b^2 = a$	$\sqrt{25} = \pm 5$
$\sqrt[3]{a} = b$ si $b^3 = a$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$	$\sqrt[5]{32} = 2$
$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[5]{7^5} = (\sqrt[5]{7})^5 = 7$
$\sqrt[ns]{a^{ps}} = \sqrt[n]{a^p}$	$\sqrt[10]{7^6} = \sqrt[5 \cdot 2]{7^{3 \cdot 2}} = \sqrt[5]{7^3}$
$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$	$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{6}$
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$	$\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 : 5}$
$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$	$(\sqrt[3]{7})^2 = \sqrt[3]{7^2}$
$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[15]{7}$
$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$	$\sqrt[3]{7} = 7^{1/3}$
$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-1/n}$	$\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}} = 2^{-1/5}$
$\sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}$	$\sqrt[3]{5^2} = 5^{2/3}$
$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^p}} = a^{-p/n}$	$\dfrac{1}{\sqrt[4]{7^3}} = 7^{-3/4}$

2. Escribe los siguientes radicales en forma de potencia:

a) $\sqrt[5]{3}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}}$

c) $\sqrt[7]{3^5}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

a) $3^{1/5}$ b) $3^{-1/6}$ c) $3^{5/7}$ d) $7^{-2/3}$

3. Escribe las siguientes potencias en forma de radical y calcula el resultado:

a) $27^{1/3}$ b) $49^{-1/2}$

c) $128^{3/7}$ d) $243^{-2/5}$

a) $\sqrt[3]{27} = 3$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{49}} = \pm\dfrac{1}{7}$

c) $\sqrt[7]{128^3} = (\sqrt[7]{128})^3 = (\sqrt[7]{2^7})^3 = 2^3 = 8$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{243^2}} = \dfrac{1}{(\sqrt[5]{243})^2} = \dfrac{1}{(\sqrt[5]{3^5})^2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

Nombre ____________________ Curso ______ Fecha __________

1. Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

a) $3^2 \cdot 3^6 =$ b) $5^7 : 5^6 =$

c) $(3^2)^5 =$ d) $5^2 \cdot 5 \cdot 5^3 =$

a) 3^8 b) 5 c) 3^{10} d) 5^6

2. Multiplica para eliminar el paréntesis:

a) $2a^3b(3a^2b - 6a^3b^3) = 6a^5b^3 - 12a^6b^4$

b) $3xy^2z^3(4x^2y^3z + 5x^3y - 7x^5z) = 12x^3y^5z^4 + 15x^4y^3z^3 - 21x^6y^2z^4$

3. Simplifica:

a) $\dfrac{2^5 \cdot 3^7 \cdot 4^2}{3^{-1} \cdot 3^4 \cdot 6^2}$ b) $\dfrac{2^{-3} \cdot 5^4 \cdot 6^2}{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 4^3}$

a) $2^8 \cdot 3$ b) $\dfrac{3^2 \cdot 5}{2^2}$

4. Escribe en notación científica:

a) 0,000000000253

b) La centésima parte de una milésima

a) $2,53 \cdot 10^{-11}$ b) 10^{-5}

5. Simplifica los radicales:

a) $\sqrt[6]{7^2}$ b) $\sqrt[15]{7^{12}}$ c) $\sqrt[20]{7^{12}}$ d) $\sqrt[30]{5^{18}}$

a) $\sqrt[3]{7}$ b) $\sqrt[5]{7^4}$ c) $\sqrt[5]{7^3}$ d) $\sqrt[5]{7^3}$

6. Extrae todos los factores posibles de:

a) $\sqrt{108}$ b) $\sqrt[3]{1\,080}$ c) $\sqrt{243a^8b^3c^7}$ d) $\sqrt[3]{125a^9b^{17}c^{25}}$

a) $6\sqrt{3}$ b) $6\sqrt[3]{5}$ c) $9a^4bc^3\sqrt{3bc}$ d) $5a^3b^5c^8\sqrt[3]{b^2c}$

7. Aplicando las propiedades de los radicales, expresa como una sola raíz:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$ b) $\sqrt{14} : \sqrt{2}$ c) $(\sqrt[5]{7})^3$ d) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{21}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt[5]{7^3}$ d) $\sqrt[10]{3}$

OBJETIVOS

a. Identificar una sucesión como un conjunto de números reales ordenados.
b. Reconocer sucesiones regulares.
c. Utilizar el término general de una sucesión para calcular cualquier término de la sucesión.
d. Conocer y usar el término general de una progresión aritmética.
e. Sumar términos de una progresión aritmética.
f. Conocer y usar el término general de una progresión geométrica.
g. Sumar términos de una progresión geométrica.
h. Sumar todos los términos de una progresión geométrica decreciente en valor absoluto.
i. Conocer y calcular el interés simple y compuesto con distintos períodos de capitalización.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas aritméticos con sucesiones aplicando una estrategia conveniente, escogiendo, adecuadamente el método más conveniente para la realización de un determinado cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador.

Autonomía e iniciativa personal

- Adaptarse a usar distintas técnicas, instrumentos y métodos para el aprendizaje de las sucesiones.

CONTENIDOS

Conceptos

- Sucesiones de números reales. Términos de una sucesión.
- Regularidades.
- Término general de una sucesión.
- Progresión aritmética. Diferencia.
- Término general de una progresión aritmética.
- Suma de los términos de una progresión aritmética.
- Progresión geométrica. Razón.
- Término general de una progresión geométrica.
- Suma de los términos de una progresión geométrica.
- Suma de los términos de una progresión geométrica decreciente en valor absoluto.
- Interés simple. Interés compuesto.
- Capital. Rédito. Período de capitalización.

Procedimientos

- Interpretación y utilización de las sucesiones y sus propiedades en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso.
- Elaboración y utilización de estrategias personales de cálculo mental.
- Utilización de las fórmulas del término general y de la suma de términos de una sucesión aritmética y geométrica.
- Utilización del método de análisis-síntesis para resolver problemas numéricos.

Actitudes

- Incorporación del lenguaje numérico, en lo que se refiere a sucesiones y progresiones a la forma de proceder habitual.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y resolverlos.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas numéricos.
- Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier conteo, cálculo o problema numérico.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Identifica una sucesión como un conjunto de números reales ordenados.
b.1. Identifica sucesiones regulares.
c.1. Usa el término general de una sucesión para calcular cualquier término de la misma.
d.1. Encuentra el término general de una progresión aritmética dada por sus primeros términos.
e.1. Halla la suma de un número de términos de una progresión aritmética.
f.1. Encuentra el término general de una progresión geométrica dada por sus primeros términos.
g.1. Halla la suma de un número de términos de una progresión geométrica.
h.1. Calcula la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente en valor absoluto.
i.1. Calcula el interés simple y compuesto con distintos períodos de capitalización.

Sucesiones

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ________

Una **sucesión de números reales** es un conjunto de números reales ordenados, es decir, cada número de la sucesión ocupa un lugar determinado.

Los **términos de la sucesión** son cada uno de los números que la forman y ocupan un lugar determinado. Para indicar este lugar se utiliza una letra con un subíndice numérico:

La sucesión *3*, *6*, *10*, *15*, *21*… se puede representar por: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5…

Una **sucesión** es **regular** cuando sus términos siguen una determinada regla.

1. Halla los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) 3, 8, 13, 18…

b) 8, 4, 0, –4…

a) 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48

b) 8, 4, 0, –4, –8, –12, –16, –20, –24, –28

2. Halla los cuatro primeros términos positivos de las sucesiones siguientes:

a) Números pares.

b) Números impares.

c) Múltiplos de 5

a) 2, 4, 6, 8 b) 1, 3, 5, 7 c) 5, 10, 15, 20

Con el **término general de una sucesión** se puede calcular cualquier término sustituyendo en la fórmula la letra *n* por el lugar que se desea.

$$a_n = 4n + 1 \Rightarrow a_1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5 \quad a_2 = 4 \cdot 2 + 1 = 9 \quad a_3 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$$

3. Calcula los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 3n + 2$

b) $a_n = (n + 1)^2$

c) $a_n = 3 \cdot 2^n$

a) 5, 8, 11, 14 b) 4, 9, 16, 25 c) 12, 24, 48

4. Trata de hallar la fórmula del término general de las sucesiones del ejercicio 2:

a) 2, 4, 6, 8 $\Rightarrow a_n = 2n$ b) 1, 3, 5, 7 $\Rightarrow a_n = 2n - 1$ c) 5, 10, 15, 20 $\Rightarrow a_n = 5n$

Bruño

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término se obtiene sumando al término anterior un número constante que se llama **diferencia** y que se representa con la letra *d*.

La sucesión 3, 7, 11, 15… es una progresión aritmética.

$$d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4;\ d = a_3 - a_2 = 11 - 7 = 4$$

La diferencia es $d = 4$, y cada término se obtiene del anterior sumando 4.

El **término general** de una progresión aritmética es: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

1. Encuentra el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 5, 9, 13, 17…

b) 6, 3, 0, –3…

a) $a_1 = 5,\ d = 4$

$a_n = 5 + 4(n - 1) = 4n + 1$

b) $a_1 = 6,\ d = -3$

$a_n = 6 - 3(n - 1) = -3n + 9$

2. Escribe el término general y los tres primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es: $a_1 = 6$ y $d = 2{,}5$

$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = 6 + 2{,}5(n - 1) = 2{,}5n + 3{,}5 \Rightarrow 6;\ 8{,}5;\ 11$

La **suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética** se representa S_n y es:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

3. Calcula la suma de los 25 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es: $a_n = 2n + 6$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow a_1 = 2 + 6 = 8$ y $a_{25} = 50 + 6 = 56 \Rightarrow S = \dfrac{8 + 56}{2} \cdot 25 = 800$

4. Calcula la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es: $a_n = 3n/2 + 2$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow a_1 = \dfrac{3}{2} + 2 = \dfrac{7}{2}$ y $a_{12} = 18 + 2 = 20 \Rightarrow S = \dfrac{7/2 + 20}{2} \cdot 12 = 141$

Progresiones geométricas (I)

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un número constante que se llama **razón,** y que se representa con la letra r, esta razón se calcula dividiendo dos términos consecutivos.

La sucesión 3, 12, 48, 192… es geométrica.

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{3} = 4 \qquad r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{48}{12} = 4 \qquad r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{192}{48} = 4$$

1. Calcula la razón r de las siguientes progresiones geométricas:

a) 5, 15, 45, 135… b) 6, 3, 3/2, 3/4…

a) $r = \frac{15}{3} \Rightarrow r = 3$ b) $r = \frac{3}{6} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

El **término general** de una progresión geométrica es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

2. Encuentra el término general de las progresiones geométricas del ejercicio 1:

a) $a_1 = 5, r = 3 \Rightarrow a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ b) $a_1 = 6, r = 1/2 \Rightarrow a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3. Encuentra el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) 6, 12, 24… b) 1/3, 1, 3…

c) –3, 6, –12… d) 3/4, –1/2, 1/3…

a) $a_1 = 6, r = 2 \Rightarrow a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$ b) $a_1 = \frac{1}{3}, r = 3 \Rightarrow a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} = 3^{n-2}$

c) $a_1 = -3, r = -2 \Rightarrow a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$ d) $a_1 = \frac{3}{4}, r = -2/3 \Rightarrow a_n = \frac{3}{-4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

4. Dada una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 8$ y cuya razón es $r = 3/4$, calcula:

a) a_6 b) a_{10} c) a_{20} d) a_n

a) $a_6 = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$ b) $a_{10} = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$ c) $a_{20} = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{19}$ d) $a_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

La **suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica** se representa S_n y es:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1},\ n \neq 1$$

1. Calcula la suma de los siete primeros términos de la progresión geométrica 6, 12, 24, 48…

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1};\ a_1 = 6,\ r_{25} = \frac{12}{6} = 2$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 6 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_7 = 6 \cdot 2^{7-1} = 6 \cdot 2^6 = 6 \cdot 64 = 384$$

$$S_7 = \frac{384 \cdot 2 - 6}{2 - 1} = 762$$

2. Calcula la suma de los 10 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

a) 2, 14, 98, 686…

b) 3, – 6, 12, – 24…

a) $a_1 = 2,\ r = 7,\ a_{10} = 2 \cdot 7^9$

$$S_{10} = \frac{2 \cdot 7^9 \cdot 7 - 2}{7 - 1} = 74158416$$

b) $a_1 = 3,\ r = -2,\ a_{10} = 3 \cdot (-2)^9$

$$S_{10} = \frac{3 \cdot (-2)^9 \cdot (-2) - 3}{(-2) - 1} = -1023$$

La **suma de todos los términos de una progresión geométrica** con $|r| < 1$ es:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

3. Calcula la suma de los infinitos términos de las siguientes progresiones:

a) 9, 3, 1…

b) 9/4, 3/2, 1…

a) $a_1 = 9,\ r = \frac{1}{3}$

$$S = \frac{9}{1 - (1/3)} = \frac{27}{2}$$

b) $a_1 = \frac{9}{4},\ r = \frac{2}{3}$

$$S = \frac{9/4}{1 - (2/3)} = \frac{27}{4}$$

4. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 6 y su primer término es 4. Halla la razón.

$$\frac{4}{1 - r} = 6 \Rightarrow r = 1/3$$

Aplicaciones: interés simple y compuesto (I)

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

El **interés** es la cantidad de dinero que produce un capital depositado en una entidad financiera.

El **interés simple** es aquel que no se acumula al capital para generar más intereses. El capi-tal inicial permanece invariable. Su fórmula es: $I = c \cdot r \cdot t$

El capital final que se obtiene es: $C = c + I$

1. En un depósito de una entidad financiera ofrecen un 6% de interés simple anual. Si se depositan 7 500 € durante 2 años y Hacienda retiene el 18%, calcula el capital acumulado al finalizar el período.

Tanto por uno final: $0{,}06 \cdot 0{,}82 = 0{,}0492$

$I = c \cdot r \cdot t \;\Rightarrow\; I = 7\,500 \cdot 0{,}0492 \cdot 2 = 738$ €

$C = 7\,500 + 738 = 8\,238$ €

2. Calcula los años que ha estado depositado un capital de 5 000 € al 3,5% de interés si se han generado 700 € de intereses, sin el descuento de Hacienda.

$$I = c \cdot r \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{I}{c \cdot r} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{700}{5\,000 \cdot 0{,}035} = 4 \text{ años}$$

Si el tiempo que se deposita el dinero no es un año, se cobra la parte proporcional del interés anual.

3. Calcula el rédito al que se han depositado 18 000 € a interés simple durante 5 años si, una vez retenido el 18% de Hacienda, los intereses generados son de 2 952 €.

$$I = c \cdot r \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{I}{c \cdot t} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{2\,952}{15\,000 \cdot 5} = 0{,}0328$$

El rédito bruto:

$r = 0{,}0328 : 0{,}82 = 0{,}04 \;\Rightarrow\; t = 4\%$

4. Se depositan 6 500 € al 5 % de interés compuesto durante 4 años. Hacienda retiene el 18 % de los intereses cuando se recupera el capital. Calcula el capital fina si los intereses se abonan anualmente.

$C = c(1 + r)t \;\Rightarrow\; C = 6\,500 \cdot 1{,}504 = 7\,900{,}79$ €

Los intereses son: $7\,900{,}79 - 6\,500 = 1\,400{,}79$ €

Hacienda retiene: $1\,400{,}79 \cdot 0{,}18 = 252{,}14$ €

El capital final neto será:

$7\,900{,}79 - 252{,}14 = 7\,648{,}65$ €

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 3 ▮ Ficha 6
Aplicaciones: interés simple y compuesto (II)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

El interés compuesto es aquel que se acumula al capital para ir generando nuevos intereses. Un capital inicial, c, al R % de rédito durante t años, producirá un capital final:

$$C = c(1 + r)^t, \quad r = \frac{R}{100}$$

1. Calcula el capital bruto que se acumula si se colocan 40 500 € al 4,5% de interés compuesto durante 4 años si los intereses se abonan anualmente.

$C = c(1 + r)^t \Rightarrow C = 40\,500 \cdot 1{,}045 = 48\,297$ €

Si los intereses se abonan n veces al año con un rédito r durante t años, el capital final será:

$$C = c\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

2. ¿Qué capital se acumula si se colocan 31 000 € al 5% de interés compuesto durante 3 años si los intereses se abonan trimestralmente?

$$C = c\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \Rightarrow C = 31\,000\left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 35\,983{,}39 \text{ €}$$

3. ¿Qué capital inicial es necesario tener depositado para que, a interés compuesto durante 3 años al 5% anual y con períodos de capitalización trimestrales, se acumule un capital final bruto de 29 692,10 €?

$$C = c\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \Rightarrow c = \frac{C}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^t} \Rightarrow c = \frac{29\,692{,}1}{\left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^{4 \cdot 3}} = \frac{29\,692{,}1}{1{,}0125^{12}}$$

4. Calcula el capital inicial que se debe depositar al 6% de interés compuesto con períodos de capitalización mensual para que, al cabo de 10 años, se conviertan en 33 204 € brutos.

$$C = c\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \Rightarrow c\left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12 \cdot 10} = 33\,204$$

$1{,}005^{120}\, c = 33\,204$

$c = 33\,204 : 1{,}005^{120}$

$c = 18\,250$ €

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Calcula los ocho primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 4^n + 2$
b) $a_n = 3n^2 - 5n + 2$
c) $a_n = (-2)^n$

a) 6, 18, 66, 258, 1 026, 4 098, 16 386, 65 538
b) 0, 4, 14, 30, 52, 80, 114, 154
c) −2, 4, −8, 16, −32, 64, −128, 256

2. Calcula la suma de los 125 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es: an = 4n/5 + 2/3

$S = 19\,150/3$

3. En las siguientes progresiones, calcula si son aritméticas o geométricas, halla la diferencia o razón y el término general.

a) 12, 20, 28…
b) 14, 4, – 6…
c) 5, 15, 45…

a) Aritmética, $d = 8$, $a_n = 8n + 4$
b) Aritmética, $d = -10$, $a_n = -10n + 24$
c) Geométrica, $r = 3$, $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$

4. Calcula la suma de los infinitos términos de las siguientes progresiones:

a) 9, 3, 1…

a) $a_1 = 9$, $r = \dfrac{1}{3}$

$$S = \frac{9}{1-(1/3)} = \frac{27}{2}$$

b) 9/4, 3/2, 1…

b) $a_1 = \dfrac{9}{4}$, $r = \dfrac{2}{3}$

$$S = \frac{9/4}{1-(2/3)} = \frac{27}{4}$$

5. Se depositan 2 000 € durante 3 años a un 5% de interés simple. Si Hacienda retiene un 18% de los intereses, ¿qué interés se obtiene al acabar dicho período?

El tanto por uno será: $0{,}05 \cdot 0{,}82 = 0{,}041$ $\quad I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow I = 2\,000 \cdot 0{,}041 \cdot 3 = 246$ €

6. Se depositan 3 000 € a un interés compuesto del 7% durante 3 años con períodos de capitalización mensuales. Si Hacienda retiene el 18% cuando se recupera el capital, calcula el capital final.

$$C = c\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \Rightarrow C = 3\,698{,}78 \text{ €}$$

Los intereses son: 3 698,78 – 3 000 = 698,78 €

Hacienda retiene: 698,78 · 0,18 = 125,78 €

El capital final neto será: 3 698,78 – 125,78 = 3 573 €

OBJETIVOS

a. Determinar la razón entre dos cantidades e interpretar su resultado.
b. Expresar una proporción y conocer el nombre de sus elementos.
c. Determinar un cuarto proporcional.
d. Identificar proporciones continuas y calcular el medio proporcional.
e. Reconocer magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales.
f. Resolver problemas de proporcionalidad directa e inversa, proporcionalidad compuesta, de interés, repartos proporcionales y porcentajes aplicando una estrategia conveniente.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Adoptar una actitud investigadora en el planteamiento y resolución de problemas sobre proporcionalidad y porcentajes.

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas de proporcionalidad y porcentajes.

Autonomía e iniciativa personal

- Adaptarse a usar distintas técnicas, instrumentos y métodos para el aprendizaje de la proporcionalidad y del cálculo de porcentajes.

CONTENIDOS

Conceptos

- Razón. Proporción. Antecedentes, consecuentes, extremos y medios.
- Cuarto proporcional.
- Proporción continua. Medio proporcional.
- Magnitudes directamente proporcionales. Magnitudes inversamente proporcionales.
- Proporcionalidad compuesta.
- Interés simple.
- Reparto proporcional.
- Disminución porcentual. Aumento porcentual. Índice de variación.

Procedimientos

- Utilización del vocabulario adecuado para interpretar y transmitir informaciones sobre magnitudes.
- Expresión de las medidas efectuadas en las unidades y con la precisión adecuadas a la situación y al instrumento utilizado.
- Uso de diferentes procedimientos, factor de conversión, regla de tres, tantos por algo, IVA, intereses, etc. para efectuar cálculos de proporcionalidad.
- Identificación de problemas numéricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
- Reconocimiento en la vida cotidiana del uso de la proporcionalidad entre diferentes tipos de magnitudes y de la terminología específica de algunas de ellas (repartos, regla de tres, tanto por ciento, mezclas, intereses, etc.)

Actitudes

- Reconocimiento y valoración de la utilidad de la proporcionalidad para transmitir informaciones relativas al entorno.
- Reconocimiento y valoración de la medida como elemento de relación entre diferentes lenguajes, conceptos y métodos matemáticos.
- Incorporación al lenguaje cotidiano de los términos de medida para describir objetos, espacios y duraciones.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Utiliza los conceptos, procedimientos y terminología de la proporcionalidad con propiedad.
b.1. Expresa una proporción y nombra a sus elementos.
c.1. Calcula un cuarto proporcional.
d.1. Calcula un medio proporcional.
e.1. Identifica magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales.
f.1. Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa utilizando la reducción a la unidad y la regla de tres.
f.2. Soluciona problemas de proporcionalidad compuesta utilizando la regla de tres compuesta.
f.3. Resuelve problemas de interés simple.
f.4. Resuelve problemas de repartos directamente e inversamente proporcionales.
f.5. Soluciona problemas de porcentajes y de aumentos y disminuciones porcentuales encadenados.

Razones y proporciones

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **razón** es la división entre dos cantidades comparables. Se representa $\frac{a}{b}$ y se lee «*a* es a *b*».
El número *a* se llama **antecedente** y el *b* se llama **consecuente.**

1. Calcula las razones entre las cantidades siguientes e interpreta el resultado:

a) 3,5 kg de naranjas cuestan 6,3 €.

a) 6,3/3,5 = 1,8 €/kg $\Rightarrow$ El kilo de naranjas cuesta 1,8 €.

b) Un coche en 5 horas recorre 400 km.

b) 400/5 = 80 km/h $\Rightarrow$ El coche lleva una velocidad media de 80 km/h.

Una **proporción** es una igualdad de dos razones. Se representa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se lee «*a* es a *b* como *c* es a *d*» $\Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$ (El producto de los medios es igual al producto de los extremos.)
Se llama **cuarto proporcional** al término desconocido de una proporción de la que se conocen los otros tres.

2. Calcula mentalmente y completa para que formen proporción:

a) $\frac{5}{9} = \frac{\blacksquare}{36}$ b) $\frac{\blacksquare}{9} = \frac{12}{54}$

c) $\frac{2}{\blacksquare} = \frac{3}{4,5}$ d) $\frac{2}{0,9} = \frac{10}{\blacksquare}$

a) $\frac{5}{9} = \frac{20}{36}$ b) $\frac{2}{9} = \frac{12}{54}$

c) $\frac{2}{3} = \frac{3}{4,5}$ d) $\frac{2}{0,9} = \frac{10}{4,5}$

3. Calcula el cuarto proporcional:

a) $\frac{x}{9} = \frac{21}{7}$ b) $\frac{1,5}{1,5} = \frac{6}{x}$ c) $\frac{3,6}{x} = \frac{7,2}{6}$

a) $x = \frac{9 \cdot 21}{7} = 27$ b) $x = \frac{6 \cdot 1,2}{1,5} = 4,8$ c) $x = \frac{3,6 \cdot 6}{7,2} = 3$

Se llama **medio proporcional** a los términos iguales de una proporción continua.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = a \cdot b \Rightarrow x = \pm\sqrt{a \cdot b}$$

4. Calcula el medio proporcional:

a) $\frac{10}{x} = \frac{x}{3,6}$ b) $\frac{2,5}{x} = \frac{x}{6,4}$

a) $x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$ b) $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

Magnitudes proporcionales (I)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si el cociente de las cantidades correspondientes es constante.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow k \text{ es la constante de proporcionalidad directa.}$$

1. Las siguientes magnitudes son directamente proporcionales, calcula x e indica la constante de proporcionalidad:

a) $\frac{x}{7} = \frac{12}{21}$ a) $x = \frac{7 \cdot 12}{21} = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{7} = \frac{12}{21} \cong 0{,}57$

b) $\frac{2{,}5}{3{,}2} = \frac{10}{x}$ b) $x = \frac{3{,}2 \cdot 10}{2{,}5} = 12{,}8 \Rightarrow k = \frac{2{,}5}{3{,}2} = \frac{10}{12{,}8} = 0{,}78125$

La regla de tres es un procedimiento para hallar un cuarto proporcional. La proporcionalidad es directa cuando va de + a + o de – a –

Magnitud *A* (unidad)	(D)	**Magnitud *B*** (unidad)
a	$\longrightarrow$	c
b	$\longrightarrow$	x

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

2. Resuelve los siguientes problemas:

a) Si 8 cintas de vídeo cuestan 212 €, ¿cuántas cintas se pueden comprar con 371 €?

Dinero (€)	(D)	N.º de cintas de video
212	$\longrightarrow$	8
371	$\longrightarrow$	x

$$\frac{212}{371} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 14 \text{ cintas}$$

b) Una tubería de 15 m de longitud pesa 210 kg. ¿Cuál será la longitud de una tubería que pesa 308 kg si es del mismo material y de la misma sección?

Peso (kg)	(D)	Longitud (m)
210	$\longrightarrow$	15
308	$\longrightarrow$	x

$$\frac{210}{308} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 22 \text{ m}$$

c) Nueve bombillas iguales han consumido un total de 54 kWh. Si en las mismas condiciones encendemos 15 bombillas iguales, ¿cuántos kWh se consumirán?

N.º de bombillas	(D)	Consumo (kWh)
9	$\longrightarrow$	54
15	$\longrightarrow$	x

$$\frac{9}{15} = \frac{54}{x} \Rightarrow x = 90 \text{ kWh}$$

Magnitudes proporcionales (II)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si el producto de las cantidades correspondientes es constante.

La **constante de proporcionalidad inversa** es el valor del producto constante:

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d} \text{ Son inversamente proporcionales } \Rightarrow k = a \cdot b = c \cdot d$$

1. A una velocidad de 10 km/h se tardan 6 horas en recorrer una distancia. Las magnitudes velocidad y tiempo son inversamente proporcionales. Calcula la constante de proporcionalidad.

La constante de proporcionalidad inversa es: $10 \cdot 6 = 60$

La regla de tres es inversa cuando va de + a – o de – a +, cuando esto sucede la razón de las cantidades de la magnitud A se colocan invertidas.

Magnitud *A* (unidad)	(I)	**Magnitud *B*** (unidad)
a	$\longrightarrow$	c
b	$\longrightarrow$	x

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{a \cdot c}{b}$$

2. Resuelve los siguientes problemas:

a) Cuatro amigos se reparten el alquiler de un apartamento de verano. Cada uno paga 375 €. Si se uniesen dos amigos más, ¿cuánto pagaría cada uno?

N.º amigos	(I)	Dinero (€)
4	$\longrightarrow$	375
6	$\longrightarrow$	x

$$\frac{6}{4} = \frac{375}{x} \Rightarrow x = 250 \text{ €}$$

b) Un coche recorre un trayecto en 1 hora y media a 65 km/h. Si desea tardar 75 minutos, ¿a qué velocidad deberá recorrer el mismo trayecto?

Tiempo (min)	(I)	Velocidad (km/h)
90	$\longrightarrow$	65
75	$\longrightarrow$	x

$$\frac{75}{90} = \frac{65}{x} \Rightarrow x = 78 \text{ km/h}$$

c) Veinte obreros asfaltan un tramo de carretera en 60 días. ¿Cuántos obreros harán falta para asfaltar el mismo tramo de carretera en 40 días?

Tiempo (días)	(I)	N.º de obreros
60	$\longrightarrow$	20
40	$\longrightarrow$	x

$$\frac{40}{60} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 30 \text{ obreros}$$

Proporcionalidad compuesta

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **proporcionalidad es compuesta** si intervienen más de dos magnitudes proporcionales.

¿Proporcionalidad directa o inversa?

¿Proporcionalidad directa o inversa?

Magnitud *A* (unidad)		**Magnitud *B* (unidad)**		**Magnitud *C* (unidad)**
a	$\longrightarrow$	c	$\longrightarrow$	e
b	$\longrightarrow$	d	$\longrightarrow$	x

Se plantea la proporción, con la razón directa o inversa, según corresponda, y se resuelve.

1. Resuelve los siguientes problemas:

a) Durante 30 días seis obreros han canalizado 150 m de tubería para suministro de agua. Calcula cuántos metros canalizarán catorce obreros en 24 días.

(D)

(D)

Tiempo (días)		N.º de obreros		Longitud (m)
30	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	150
24	$\longrightarrow$	14	$\longrightarrow$	x

$$\frac{30}{24} \cdot \frac{20}{14} = \frac{150}{x} \Rightarrow x = 280 \text{ metros}$$

b) Los gastos de alimentación de 135 personas suponen 2 250 € diarios. Calcula cuántas personas podrán alimentarse durante 90 días con 12 000 €.

(D)

(D)

Dinero (€)		Tiempo (días)		N.º de personas
2 250	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	135
12 000	$\longrightarrow$	90	$\longrightarrow$	x

$$\frac{2\,250}{12\,000} \cdot \frac{90}{1} = \frac{135}{x} \Rightarrow x = 8 \text{ personas}$$

c) Para hacer una obra en 360 días hacen falta 30 obreros trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días duraría la misma obra si hubiese 40 obreros trabajando 6 horas diarias?

(I)

(I)

N.º de obreros		Tiempo diario (h)		Tiempo (días)
30	$\longrightarrow$	8	$\longrightarrow$	360
40	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	x

$$\frac{40}{30} \cdot \frac{6}{8} = \frac{360}{x} \Rightarrow x = 360 \text{ días}$$

Problemas aritméticos (I)

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha __________

Para repartir una cantidad N en partes que sean directamente proporcionales a otras cantidades conocidas a, b, c…, se sigue el procedimiento:

a) Se calcula k, la parte de N que le corresponde a cada unidad del total de las cantidades conocidas a, b, c…, es decir:

$$k = \frac{N}{a + b + c}$$

b) Con el valor de la unidad, k, se calculan los valores de las partes deseadas.

1. Reparte 15 000 € en partes directamente proporcionales a 2, 3 y 5.

15 000 : (2 + 3 + 5) = 1 500

$x = 1\,500 \cdot 2 = 3\,000$ € $y = 1\,500 \cdot 3 = 4\,500$ € $z = 1\,500 \cdot 5 = 7\,500$ €

2. Reparte 13 500 € en partes directamente proporcionales a 4, 6 y 8.

13 000 : (4 + 6 + 8) = 750

$x = 750 \cdot 4 = 3\,000$ € $y = 750 \cdot 6 = 4\,500$ € $z = 750 \cdot 8 = 6\,000$ €

3. Tres amigos organizan una peña para jugar a las quinielas y aportan 23, 34 y 41 €. Si aciertan una quiniela por la que cobran 120 540 €, ¿qué cantidad le corresponde a cada uno si el reparto se hace de forma directamente proporcional al dinero aportado?

120 540 : (23 + 34 + 41) = 1 230

$x = 1\,230 \cdot 23 = 28\,290$ € $y = 1\,230 \cdot 34 = 41\,820$ € $z = 1\,230 \cdot 41 = 50\,430$ €

Para repartir una cantidad N en partes que sean inversamente proporcionales a otras cantidades conocidas a, b, c…, se hace un reparto directamente proporcional a las inversas $1/a$, $1/b$, $1/c$… Para ello:

a) Se calcula primero el inverso de a, b, c…, y se reducen a común denominador (m.c.m.).

b) Se hace el reparto directamente proporcional a los numeradores.

4. Reparte 11 050 € en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 4.

m.c.m. (2, 3, 4) = 12 ⇒ 1/2 = 6/12, 1/3 = 4/12, 1/4 = 3/12

Se reparte directamente proporcional a 6, 4 y 3 respectivamente: 11 050 : (6 + 4 + 3) = 850

$x = 850 \cdot 6 = 5\,100$ € $y = 850 \cdot 4 = 3\,400$ € $z = 850 \cdot 3 = 2\,550$ €

5. Reparte 11 750 € en partes inversamente proporcionales a 3, 4 y 5.

m.c.m. (3, 4, 5) = 60 ⇒ 1/3 = 20/60, 1/4 = 15/60, 1/5 = 12/60

Se reparte directamente proporcional a 20, 15 y 12, respectivamente. 11 750 : (20 + 15 + 12) = 250

$x = 250 \cdot 20 = 5\,000$ € $y = 250 \cdot 15 = 3\,750$ € $z = 250 \cdot 12 = 3\,000$ €

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 4 ▮ Ficha 6
Problemas aritméticos (II)

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

- La **disminución porcentual** de una cantidad inicial es lo que disminuye dicha cantidad según un porcentaje.
- El **aumento porcentual** de una cantidad inicial es lo que aumenta dicha cantidad según un porcentaje.

1. A un trabajador le descuentan mensualmente de su nómina el 5% para un seguro que asciende a 1 440 €. ¿Qué cantidad le descuentan?

Descuentan: 1 440 · 0,05 = 72 €

2. En la factura de un taller aplican un 16% de IVA sobre un importe de 168 €. ¿Cuánto se paga en total?

Total: 168 · 1,16 = 194,88 €

3. En una compra a plazos de 4 570,5 € suben el precio un 15,25%. ¿Cuánto se pagará en total?

Total: 4 570,5 · 1,1525 = 5 267,5 €

Para calcular **aumentos y disminuciones porcentuales encadenados** se calcula el índice de variación total multiplicando los índices de variación de cada paso.

4. En una factura de 350 € nos aplican un 20% de descuento y un 16% de IVA. Calcula el importe total de la factura.

Total: 350 · 0,8 · 1,16 = 324,8 €

5. Un determinado producto aumenta su precio un 15% en un año. Al año siguiente aumenta un 16%. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento en total?

1,15 · 1,16 = 1,334. Ha aumentado un 33,4%

6. En una tienda compramos un televisor con una rebaja del 20% y nos cobran el 16% de IVA. Si pagamos 232 € por él, ¿cuál era su precio inicial?

$x \cdot 0,8 \cdot 1,16 = 232$

Precio inicial: 232 : (0,8 · 1,16) = 250 €

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha __________

1. Determina si los siguientes pares de razones forman proporción y calcula la constante de proporcionalidad:

a) $\dfrac{15 \text{ m}}{3 \text{ m}} \quad \dfrac{10 \text{ días}}{2 \text{ días}}$

a) $\dfrac{15 \text{ m}}{3 \text{ m}} = \dfrac{10 \text{ días}}{2 \text{ días}} = 5$

b) $\dfrac{51}{121} = \dfrac{1{,}5}{4}$

b) $51 \cdot 4 \neq 121 \cdot 1{,}5 \Rightarrow$ No forman proporción.

2. Con 100 kg de harina se hacen 120 kg de pan. Calcula la harina necesaria para elaborar un pan de 120 g.

Peso de pan (kg)	(D)	Peso de harina (kg)
120	⟶	100
0,12	⟶	x

$\dfrac{120}{0{,}12} = \dfrac{100}{x} \Rightarrow x = 0{,}1 \text{ kg} = 100 \text{ g}$

3. Las ruedas delanteras de un tractor tienen un diámetro de 0,9 m y las traseras tienen un diámetro de 1,2 m. Si en un trayecto las ruedas delanteras han dado 250 vueltas, ¿cuántas vueltas habrán dado las traseras?

Longitud (m)	(I)	N.º de vueltas
9	⟶	250
1,2	⟶	x

$\dfrac{1{,}2}{0{,}9} = \dfrac{250}{x} \Rightarrow x = 187{,}5$ vueltas

4. Ocho obreros trabajan 12 días para hacer una obra y cobran 3 600 €. ¿Cuánto ganarán seis obreros si hacen en 10 días el mismo trabajo?

(D)

(D)

N.º de obreros		Tiempo (días)		Dinero (€)
8	⟶	12	⟶	3 600
6	⟶	10	⟶	x

$\dfrac{8}{6} \cdot \dfrac{12}{10} = \dfrac{3\,600}{x} \Rightarrow x = 2\,250$ €

5. Reparte mentalmente 600 € de forma proporcional a 1, 2 y 3.

$1 + 2 + 3 = 6 \Rightarrow 600 \cdot 6 = 100$ €

$100 \cdot 1 = 100$ € $\qquad 100 \cdot 2 = 200$ € $\qquad 100 \cdot 3 = 300$ €

6. Si el 80% de una masa de bollería es harina, calcula cuánta harina contiene un bollo de 300 gramos.

Cantidad de harina: $300 \cdot 0{,}8 = 240$ g

OBJETIVOS

a. Identificar un monomio y un polinomio y sus elementos.
b. Reconocer monomios semejantes.
c. Identificar polinomios iguales.
d. Sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios.
e. Reconocer y utilizar las igualdades notables.
f. Factorizar un polinomio.
g. Usar la regla de Ruffini.
h. Determinar el valor numérico de un polinomio.
i. Interpretar aritmética y gráficamente la raíz de un polinomio.
j. Conocer el teorema del resto y del factor.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en comunicación lingüística

- Expresar oralmente y por escrito distintos hechos, conceptos, relaciones, operadores y estructuras algebraicas de operaciones con polinomios.

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos del álgebra para interpretar fenómenos sencillos observables en el mundo físico y natural (cinemática).

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas de polinomios escogiendo el método más conveniente para la realización del cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador

Autonomía e iniciativa personal

- Poner en práctica modelos de operaciones con polinomios.

CONTENIDOS

Conceptos

- Monomio. Grado. Variable. Monomios semejantes.
- Polinomio. Grado. Coeficientes. Coeficiente principal. Término independiente.
- Polinomios iguales.
- Suma de polinomios.
- Opuesto de un polinomio.
- Resta de polinomios.
- Multiplicación de polinomios.
- Igualdades notables.
- Factorización de un polinomio.
- División de polinomios.
- Regla de Ruffini.
- Valor numérico de un polinomio.
- Raíz de un polinomio.
- Teorema del resto. Teorema del factor.

Procedimientos

- Interpretación y utilización del lenguaje algebraico en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso.
- Interpretación y elaboración de códigos y tablas, numéricos y alfanuméricos, para gestionar o transmitir informaciones.
- Elaboración y utilización de estrategias personales de cálculo mental.
- Utilización de los algoritmos tradicionales de suma, resta, multiplicación y división con polinomios.
- Reducción de problemas algebraicos a otros más sencillos para facilitar su comprensión y resolución.
- Decisión sobre qué operaciones son adecuadas en la resolución de problemas con polinomios.

Actitudes

- Incorporación del lenguaje y del cálculo algebraico a la forma de proceder habitual.
- Sensibilidad, interés y valoración crítica ante las informaciones y mensajes de naturaleza algebraica.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas de álgebra y realizar cálculos.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas algebraicos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Utiliza los conceptos, procedimientos y terminología de los polinomios con propiedad.
b.1. Identifica monomios semejantes.
c.1. Identifica polinomios iguales.
d.1. Opera (suma, resta, multiplica y divide) correctamente con polinomios.
e.1. Desarrolla con corrección las igualdades notables.
f.1. Factoriza un polinomio.
g.1. Conoce y usa la regla de Ruffini.
h.1. Calcula el valor numérico de un polinomio.
i.1. Interpreta aritmética y gráficamente la raíz.
j.1. Conoce el teorema del resto y del factor.

Polinomios. Suma y resta

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Un **monomio** es una expresión algebraica en la que las variables solo tienen las operaciones de producto y de potencia de exponente natural. El **grado de un monomio** es la suma de los exponentes de las variables.

Un **polinomio** es una suma de monomios. Dos **polinomios** son iguales si los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales.

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son monomios? Calcula el grado de estos.

a) $5x^3y$ ______________________

b) $3x - 2y^3$ ______________________

Es monomio: a), el grado es 4.

2. Ordena de forma decreciente, según los grados, los siguientes polinomios y calcula el grado, el coeficiente principal y el término independiente:

a) $7x^2 - 5x^3 + 4$

b) $-9x^2 - 6x^5 - 7 + 4x^6$

a) $-5x^3 + 7x^2 + 4$

Grado: 3; coeficiente principal: -5

Término independiente: 4

b) $4x^6 - 6x^5 - 9x^2 - 7$

Grado: 6; coeficiente principal: 4

Término independiente: -7

3. Halla el valor de *a*, *b* y *c* para que los siguientes polinomios sean iguales:

$P(x) = ax^4 - 8x^3 + 4x - b$ y $Q(x) = 5x^4 - 8x^3 - cx^2 + 4x + 6$

$a = 5$, $b = -6$, $c = 0$

Procedimiento para la **suma** de polinomios:

a) Se colocan los polinomios ordenados uno debajo del otro, de manera que coincidan los monomios semejantes.

b) Se suman los coeficientes del mismo grado y se pone la misma parte literal.

El **opuesto de un polinomio** es el que se obtiene al cambiar de signo todos sus monomios. Para **restar** dos polinomios se le suma al primero el opuesto del segundo.

4. Suma los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^5 - 5x^3 + 3x^2 - 1$ $Q(x) = -3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

$7x^5 - 3x^4 - x^2 + 3x$

5. Calcula $P(x) - Q(x)$: $P(x) = 4x^5 + 7x^3 - x - 2$ y $Q(x) = 5x^4 - 3x^3 + 7x + 2$

$4x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 8x - 4$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 5 ▮ Ficha 2
Multiplicación de polinomios I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Procedimiento

a) Se colocan los polinomios ordenados uno debajo del otro, de manera que coincidan los monomios semejantes. Si falta un grado, se deja un hueco, para que sea más fácil colocar los productos parciales.

b) Para multiplicar polinomios, se empieza por la izquierda y se multiplica el primer monomio del segundo polinomio por todos los monomios del primer polinomio, los coeficientes se multiplican y los exponentes se suman. Si falta un término de un grado, se deja un hueco.

c) Se continúan multiplicando los demás monomios.

d) Se suman todos los polinomios obtenidos.

1. Multiplica los polinomios: $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ y $Q(x) = 2x^3 - 5x + 1$

$2x^6 - 4x^5 - 5x^4 + 17x^3 - 2x^2 - 15x + 3$

2. Multiplica los polinomios: $P(x) = 2x^4 - 4x^3 - 5x + 1$ y $Q(x) = x^3 - 2x + 7$

$2x^7 - 4x^6 - 4x^5 + 17x^4 - 27x^3 + 10x^2 - 37x + 7$

3. Multiplica los polinomios: $P(x) = 2x^3 - 3x + 5$ y $Q(x) = 3x^2 + x - 4$

$6x^5 + 2x^4 - 17x^3 + 12x^2 + 17x - 20$

4. Multiplica los polinomios: $P(x) = x^4 - 3x^2 + x - 5$ y $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 4$

$2x^7 + x^6 - 6x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 4x + 20$

5. Multiplica los polinomios: $P(x) = 3x^5 - x^3 - 5x +1$ y $Q(x) = 2x^4 + 4x^2 - 3$

$6x^9 + 10x^7 - 23x^5 + 2x^4 - 17x^3 + 4x^2 + 15x - 3$

Matemáticas 3.º ESO | Unidad 5 | Ficha 3
Multiplicación de polinomios II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

El **cuadrado de una suma** es igual al cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El **cuadrado de una diferencia** es igual al cuadrado del primero, menos el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Una **suma por una diferencia** es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

1. Calcula mentalmente:

a) $(x + 2)^0$ 1

b) $(x - 3)^1$ $x - 3$

c) $(x - 7)^1$ $x - 7$

d) $(2x + 6)^0$ 1

e) $(x + 5)^2$ $x^2 + 10x + 25$

f) $(x - 6)^2$ $x^2 + 12x + 3$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $4x(5x^4 - 6x)$ $20x^5 - 24x$

b) $-7x^2(5x^3 - 3x^2)$ $-35x^5 + 21x$

c) $-3x^3(-6x^2 - 1)$ $18x^5 + 3x^3$

d) $5x^4(-x^2 + 5x)$ $-5x^6 + 25x^5$

3. Opera y simplifica:

a) $(2x + 5)^2 - (2x + 5)(2x - 5)$

$20x + 50$

b) $(x - 1/3)^2 + (x + 1/3)$

$x^2 + 2/9$

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como producto de factores irreducibles.

4. Factoriza mentalmente:

a) $2x^2 + 6x$ $2x\,(x + 3)$

b) $x^2 - 6x + 9$ $(x - 3)^2$

c) $x^2 - 25$ $(x + 5)(x - 5)$

d) $x^2 + 8x + 16$ $(x + 4)^2$

5. Factoriza:

a) $12x^4 + 8x^3$ $4x^3(3x + 2)$

b) $5x^3 + 20x^2 + 20x$ $5x(x + 2)^2$

c) $x^2 - 3$ $(x + \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

d) $9x^2 - 30x + 25$ $(3x - 5)^2$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 5 ▮ Ficha 4
División de polinomios I

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Procedimiento

a) Se colocan ordenados el dividendo y el divisor y, si falta algún grado, se deja un hueco.

b) Se comienza dividiendo los coeficientes principales y restando los grados correspondientes.

c) La división termina cuando el grado del resto es menor que el grado del divisor.

El dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto.

$$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x) \text{ siendo } \mathrm{gr}(R(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$$

1. Divide y haz la comprobación: $P(x) = 2x^5 - 8x^4 + 12x^2 + 18$ entre $Q(x) = x^2 - 3x - 1$

$C(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x - 2$

$R(x) = -10x + 16$

Se comprueba que $C(x) \cdot Q(x) + R(x) = P(x)$

2. Divide: $P(x) = 6x^5 + 2x^4 - 17x^3 + 20x - 25$ entre $Q(x) = 2x^3 - 3x + 5$

$C(x) = 3x^2 + x - 4$

$R(x) = -12x^2 + 3x - 5$

3. Divide: $P(x) = 2x^7 + x^6 - 9x^5 - 5x^4 + 9x^2 + 8$ entre $Q(x) = x^4 - 3x^2 + x - 5$

$C(x) = 2x\ 3 + x^2 - 3x - 4$

$R(x) = 5x^2 - 11x - 12$

4. Divide y haz la comprobación: $P(x) = 4x^6 - 12x^4 + 8x^3 + 9$ entre $Q(x) = 2x^3 - 5x + 1$

$C(x) = 2x^3 - x + 3$

$R(x) = -5x^2 + 16x + 6$

Hay que hacer la comprobación: $Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ tiene que dar $P(x)$

5. Halla un polinomio tal que al dividirlo entre $2x^3 - 5x + 1$ se obtenga de cociente $x^2 + 3x - 4$ y de resto $-7x^2 + x + 8$

$(2x^3 - 5x + 1)(x^2 + 3x - 4) - 7x^2 + x + 8 = 2x^5 + 6x^4 - 13x^3 - 21x^2 + 24x + 4$

6. Divide $P(x) = 6x^6 - 13x^5 - 20x^3 + 50x^2 - 4$ entre $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

$C(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x - 16$

$R(x) = 4x^2 + 3x + 12$

División de polinomios II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Procedimiento de la Regla de Ruffini

a) Se colocan los coeficientes del dividendo en horizontal y, si falta alguno, se pone un cero.

b) Debajo y a la izquierda se coloca a con el signo cambiado.

c) Se baja directamente el primer término del dividendo.

d) El cociente es un polinomio de un grado menor que el dividendo.

e) El resto es el último número.

1. Divide por Ruffini: $P(x) = x^4 - 6x^2 + 4x + 5$ entre $Q(x) = x + 2$

$C(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 8$
$R = -11$

2. Divide por Ruffini: $P(x) = x^5 - 4x^3 + 5x^2 + 3$ entre $Q(x) = x - 1$

$C(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x + 2$
$R = 5$

3. Divide por Ruffini: $P(x) = x^6 - 4x^4 + 6x^3 + 1$ entre $Q(x) = x - 2$

$C(x) = x^5 + 2x^4 + 6x^2 + 12x + 24$
$R = 49$

4. Divide por Ruffini: $P(x) = 2x^3 - 13x + 8$ entre $Q(x) = x + 3$

$C(x) =2x^2 - 6x + 5$
$R = -7$

5. Divide por Ruffini: $P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x + 10$ entre $Q(x) = x - 3$

$C(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 18$
$R = -44$

6. Divide por Ruffini: $(3x^4 - 7x^2 - 8x - 1) : (x - 2)$

$C(x) = 3x^3 + 6x^2 + 5x + 2$
$R = 3$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 5 ▮ Ficha 6
Teorema del resto y del factor

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

El **valor numérico de un polinomio** es el valor que se obtiene al sustituir la variable por un número y efectuar las operaciones.

El **resto** que se obtiene al dividir el polinomio $P(x)$ entre el binomio $x - a$ es el valor numérico del polinomio para $x = a$

$$\boldsymbol{R = P(a)}$$

1. Calcula mentalmente el valor numérico del polinomio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^2 - 8$ para los valores que se indican:

a) Para $x = 0$ b) Para $x = 1$

a) $P(0) = -8$ b) $P(1) = -4$

2. Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para los valores que se indican:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 2$$

a) Para $x = 3$ $P(3) = 13$

b) Para $x = -3$ $P(-3) = 145$

3. Halla, sin hacer la división, el resto de dividir el polinomio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ entre $x - 2$

Se aplica el teorema del resto:
$R = P(2) = -11$

Una **raíz de un polinomio** es un número para el que el valor numérico del polinomio es cero.

La **interpretación gráfica** de las raíces de un polinomio $P(x)$ son las abscisas de los puntos de corte de la función polinómica $y = P(x)$ con el eje X

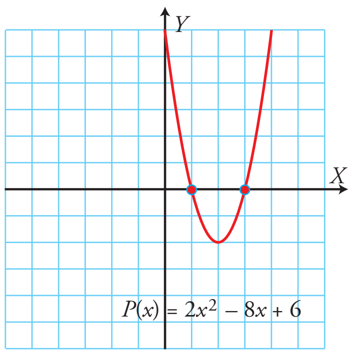
Teorema del factor: El polinomio $P(x)$ es divisible entre el binomio $x - a$ si $x = a$ es una raíz del polinomio $P(x)$

4. ¿Cuál de los números, 2 o -2, es raíz del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$?

$R = P(2) = 12 \Rightarrow$ No es raíz.
$R = P(-2) = 0 \Rightarrow$ Sí es raíz.

5. Observa la gráfica y calcula las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 - 8x + 6$

$x_1 = 1$, $x_2 = 3$



Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

1. Clasifica las siguientes expresiones algebraicas en monomios, binomios o trinomios.

a) $x - y + z$ Trinomio

b) $x - y$ Binomio

c) $3x^2 - 3$ Binomio

2. Calcula el grado, el coeficiente principal y el término independiente de los siguientes polinomios:

a) $5x^4 - 2x^3 + 1$

Grado: 4; coeficiente principal: 5

Término independiente: 1

b) $-4x^7 - 5x^4 - 7x^3 - 1$

Grado: 7; coeficiente principal: -4

Término independiente: -1

3. Multiplica los polinomios: $P(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1$ $Q(x) = x^4 - 5x^2 + 2$

$x^9 - 7x^7 + 3x^6 + 12x^5 - 16x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 2$

4. Factoriza mentalmente:

a) $8x^3 + 12x^2$ $4x^2(2x + 3)$

b) $x^2 + 10x + 25$ $(x + 5)^2$

5. Divide y haz la comprobación: $P(x) = 2x^5 - 6x^4 + 20x^2 - 38x + 12$ entre $Q(x) = x^3 - 5x + 3$

$C(x) = 2x^2 - 6x + 10$

$R(x) = -16x^2 + 30x - 18$

Hay que hacer la comprobación:

$Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ tiene que dar $P(x)$

6. Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea -11

$P(x) = x^3 + kx^2 + 7$ entre $x - 3$

Se aplica el teorema del resto:

$P(3) = -11 \Rightarrow k = -5$

7. Comprueba, sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$ es divisible entre $x - 3$

Se aplica el teorema del factor:

$R = P(3) = 0 \Rightarrow$ Sí es divisible.

OBJETIVOS

a. Identificar y resolver ecuaciones de 1.er grado.
b. Reconocer y solucionar ecuaciones de 2.º grado incompletas y completas.
c. Interpretar gráficamente las soluciones de una ecuación de segundo grado.
d. Determinar el número de soluciones de una ecuación de segundo grado utilizando el discriminante de la ecuación.
e. Descomponer factorialmente una ecuación de segundo grado.
f. Hallar una ecuación de segundo grado conociendo sus raíces.
g. Calcular la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado sin resolverla.
h. Resolver problemas de ecuaciones de segundo grado aplicando una estrategia conveniente y escogiendo adecuadamente el método más conveniente para la realización de un determinado cálculo.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en comunicación lingüística

- Expresar oralmente y por escrito distintos hechos, conceptos, relaciones, operadores y estructuras algebraicas de ecuaciones de 1.er y 2.º grado.

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos del álgebra para interpretar fenómenos sencillos observables en el mundo físico y natural (cinemática).

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas de ecuaciones escogiendo el método más conveniente para la realización del cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador

CONTENIDOS

Conceptos

- Ecuación de 1.er grado.
- Ecuaciones equivalentes. Transformaciones que mantienen la equivalencia.
- Ecuación de 2.º grado incompleta y completa.
- Discriminante.
- Descomposición factorial.

Procedimientos

- Interpretación y utilización del lenguaje algebraico y de las ecuaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso.
- Aplicación de los procedimientos tradicionales de resolución de ecuaciones de 1.er y 2.º grado.
- Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de los paréntesis en cálculos escritos y en la simplificación de expresiones algebraicas.
- Identificación de problemas de ecuaciones diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
- Decisión sobre qué ecuaciones y operaciones son adecuadas en la resolución de problemas algebraicos.

Actitudes

- Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad de las ecuaciones para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones.
- Incorporación del lenguaje y del cálculo algebraico a la forma de proceder habitual.
- Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas de ecuaciones e investigar las regularidades y relaciones que aparecen en los problemas algebraicos.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas de ecuaciones y resolverlos.
- Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier cálculo o problema de ecuaciones.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Resuelve ecuaciones de 1.er grado con paréntesis y con denominadores.
b.1. Resuelve ecuaciones de 2.º grado.
c.1. Interpreta gráficamente las soluciones de una ecuación de 2.º grado.
d.1. Calcula el número de soluciones de una ecuación de segundo grado utilizando el discriminante de la ecuación.
e.1. Factoriza un trinomio de segundo grado.
f.1. Escribe una ecuación de segundo grado con dos raíces conocidas.
g.1. Calcula la suma y el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado sin resolverla.
h.1. Resuelve problemas de ecuaciones de 1.er y de 2.º grado.

Ecuaciones de 1.er grado

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

En una **ecuación de 1.er grado con una incógnita** el exponente de la variable es 1.

1. De las siguientes ecuaciones, ¿cuáles son de 1.er grado con una incógnita y cuáles no? ¿Por qué?

a) $2x^2 + 5x = 0$ — No es de 1.er grado, el exponente de la variable x es 2.

b) $-2x + 4 = x - 1$ — Ecuación de 1.er grado con una incógnita.

c) $y - 7 = 3yx + 1$ — Esta ecuación tiene dos incógnitas.

Dos **ecuaciones son equivalentes** cuando tienen la misma solución o raíz.

Para resolver una ecuación de 1.er grado, esta se transforma en otra equivalente (Sumando, restando, multiplicando o dividiendo la misma expresión en los dos miembros) y despejando la incógnita x mediante la regla del producto.

2. Resuelve mentalmente:

a) $4x + 12 = 6x - 8$

$x = 10$

b) $8x - 2x + 4 = 2x$

$x = -1$

c) $6 + 3x = 4 + 7x - 2x$

$x = 1$

d) $4x + 3x - 4 = 3x + 8$

$x = 3$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3(x + 2) + 2x = 5x - 2(x - 4)$

$x = 1$

b) $4 - 3(2x + 5) = 5 - (x - 3)$

$x = -19/5$

c) $5 - (2x + 4) = 3 - (3x + 2)$

$x = 0$

Las **ecuaciones reducibles a 1.er grado** son aquellas que vienen expresadas como producto de factores de 1.er grado e igualadas a cero.

Si un producto de factores está igualado a cero, cada uno de los factores puede valer cero.

4. Resuelve mentalmente:

a) $x(x - 2)(x + 3) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3$

b) $(2x + 1)(x - 4)(3x + 5) = 0$

$x_1 = -1/2,\ x_2 = 4,\ x_3 = -5/3$

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **ecuación de 2.º grado** con una incógnita es una expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Es **completa** si tiene los tres términos: el de 2.º grado, el de 1.er grado y el independiente.

Es **incompleta** si le falta el término de 1.er grado, el término independiente o ambos.

La ecuación incompleta $ax^2 + bx = 0$ se resuelven sacando x factor común. Una solución es $x = 0$.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 6x = 0$
$x_1 = 0, x_2 = 6$

b) $x^2 + 5x = 0$
$x_1 = 0, x_2 = -5$

c) $x^2 - 9x = 0$
$x_1 = 0, x_2 = 9$

La ecuación incompleta $ax^2 + c = 0$ se resuelven despejando x^2 y haciendo la raíz cuadrada.

2. Resuelve mentalmente:

a) $x^2 - 9 = 0$
$x_1 = -3, x_2 = 3$

b) $x^2 - 16 = 0$
$x_1 = -4, x_2 = 4$

c) $-x^2 + 36 = 0$
$x_1 = -6, x_2 = 6$

d) $x^2 - 100 = 0$
$x_1 = -10, x_2 = 10$

Las **soluciones de la ecuación completa de 2.º grado** se obtienen aplicando la fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0, \;\Rightarrow\; x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
$x_1 = 3, x_2 = 2$

b) $2x^2 - 3x - 20 = 0$
$x_1 = -5/2, x_2 = 4$

c) $8x^2 - 2x - 3 = 0$
$x_1 = -1/2, x_2 = 3/4$

4. Lleva las siguientes ecuaciones a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y resuelve:

a) $2x(x - 3) = 3x(x - 1)$
$x_1 = -3, x_2 = 0$

b) $(x + 2)(x + 3) = 6$
$x_1 = -5, x_2 = 0$

c) $(2x - 3)2 = 8x$
$x_1 = 1/2, x_2 = 9/2$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 6 ▮ Ficha 3
Número de soluciones. Factorización (I)

Bruño

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

Se llama discriminante de la ecuación de 2.º grado, que se representa por Δ, al valor:

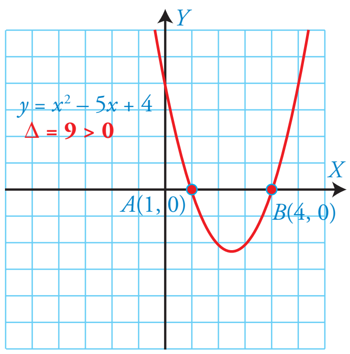
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

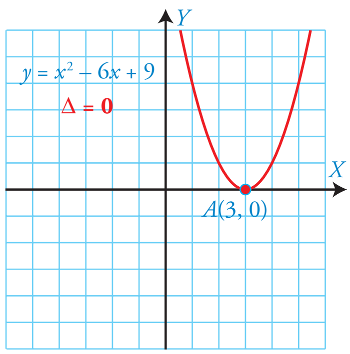
El número de soluciones de una ecuación de 2.º grado depende del signo del discriminante.

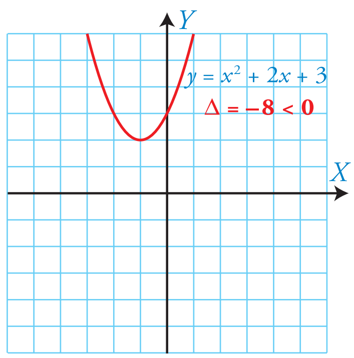
a) Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales y distintas. La gráfica corta al eje X en dos puntos.

b) Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución y se dice que es doble. La gráfica corta al eje X en un solo punto, es decir, es tangente al eje X.

c) Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales. La gráfica no corta al eje X.







1. Sin resolverlas y sin hallar el discriminante, calcula mentalmente cuántas soluciones tienen las ecuaciones:

a) $5x^2 - 12x = 0$ b) $x^2 + 25 = 0$ c) $2x^2 = 0$

Tiene dos soluciones. No tiene solución real. Tiene una solución doble.

2. Sin resolver las ecuaciones, calcula el discriminante y determina cuántas soluciones tienen:

a) $-6x + 7 = 0$ b) $x^2 - 8x + 16 = 0$ c) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$\Delta = 36 - 28 = 8 > 0$
Tiene dos soluciones.

$\Delta = 64 - 64 = 0$
Tiene una solución doble.

$\Delta = 9 - 40 = -31 < 0$
No tiene solución real.

Un trinomio de 2.º grado $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ con las soluciones x_1 y x_2 se descompone factorialmente de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

3. Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 4x + 4=0$
$(x + 2)^2$

b) $x^2 - 25$
$(x + 5)(x - 5)$

c) $4x^2 + 4x + 1$
$(2x + 1)^2$

d) $8x^2 + 14x - 15$
$8(x + 5/2)(x - 3/4)$

e) $2x^2 + 9x - 5$
$2(x + 5)(x - 1/2)$

f) $x^2 + 4x - 5$
$(x - 1)(x + 5)$

Número de soluciones. Factorización (II)

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Para hallar una ecuación de 2.º grado conociendo las soluciones x_1 y x_2, basta con multiplicar los binomios:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

1. Halla, en cada caso, una ecuación de 2.º grado cuyas soluciones son:

a) $x_1 = 5,\ x_2 = -7$

$(x - 5)(x + 7) = 0$

$x^2 + 2x - 35 = 0$

b) $x_1 = 2/5,\ x_2 = -3$

$(x - 2/5)(x + 3) = 0$

$x^2 + 13/5x - 6/5 = 0$

c) $x_1 = -4,\ x_2 = -2/3$

$(x + 4)(x + 2/3) = 0$

$x^2 + 14/3x - 8/3 = 0$

2. Halla una ecuación de 2.º grado que tenga como soluciones: $x_1 = 3/2,\ x_2 = -5$.

$(x - 3/2)(x + 5) = 0 \Rightarrow x^2 + 7/2x - 15/2 = 0$

Las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ cumplen las siguientes relaciones:

$$s = -\frac{b}{a} \qquad p = -\frac{c}{a}$$

3. Calcula, sin resolverlas, la suma y el producto de las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $5x^2 - 15x + 9 = 0$

$S = \frac{15}{5} = 3,\ P = \frac{9}{5}$

b) $x^2 - 6x + 12 = 0$

$S = 6,\ P = 12$

c) $3x^2 - 14x = 0$

$S = \frac{14}{3} = 3,\ P = 0$

4. Calcula la suma y el producto de las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - 8x + 3 = 0$

$S = 8,\ P = 3$

b) $x^2 - 7x + 2 = 0$

$S = 7,\ P = 2$

c) $6x^2 + x - 2 = 0$

$S = -16,\ P = -1/3^0$

d) $5x^2 - 16x + 3 = 0$

$S = 16/5,\ P = 3/5$

5. Transforma las siguientes ecuaciones a la forma $ax^2 + bx + c$ y luego sin resolver calcula s y p.

a) $9(x + 2/3)2$

$9x\ 2 + 12x + 4$

$S = -12;\ P = 4$

b) $20(x + 2/5)\ (x - 3/4)$

$20x\ 2 - 7x - 6$

$S = 7/20;\ P = -3/10$

Problemas de ecuaciones (II)

Nombre ______________________________ Curso ______ Fecha __________

Para resolver un problema se debe leer el enunciado tantas veces como sea necesario, hasta que se entienda cuáles son la **incógnita,** los **datos,** las **relaciones** y las **preguntas.**

En los problemas geométricos se debe hacer siempre un dibujo, y en los numéricos, un esquema.

1. La suma de dos números es 36, y uno es el doble del otro. Calcula dichos números.

$x + 2x = 36 \quad \Rightarrow \quad x = 12$

Los números son: 12 y 24.

Para resolver problemas numéricos Intenta asociar la incógnita con el número menor.

Tres números consecutivos x, $x + 1$, $x + 2$.

Un número par es $2x$.

Un número impar es $2x + 1$

El 15% de x es $0{,}15x$

2. Se ha plantado 1/5 de la superficie de una huerta con cebollas; 1/15 con patatas; 2/3 con judías, y el resto, que son 240 m^2, con tomates. ¿Qué superficie tiene la huerta?

Superficie de la huerta: x

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{15} = \frac{2x}{3} + 240 = x \quad \Rightarrow \quad x = 3\,600$$

Para resolver problemas de edades, haz una tabla como la siguiente:

	Actualmente	Dentro de x años
Ruth	17	$17 + x$
Madre	47	$47 + x$

3. Natalia y Roberto tienen, respectivamente, 8 y 2 años. ¿Al cabo de cuántos años la edad de Natalia será el doble de la de Roberto?

	Actualmente	Dentro de x años
Natalia	8	$8 + x$
Roberto	2	$2 + x$

$8 + x = 2(2 + x) \quad \Rightarrow \quad x = 4$

Dentro de 4 años, Natalia tendrá 12 y Roberto 6 años.

4. Ana tiene 12 años, su hermano Pablo tiene 14, y su padre, 42. ¿Cuántos años deben pasar para que la suma de las edades de Ana y Pablo sea igual a la de su padre?

	Actualmente	Dentro de x años
Ana	12	$12 + x$
Pablo	14	$14 + x$
Padre	42	$42 + x$

$12 + x + 14 + x = 42 + x \quad \Rightarrow \quad x = 16$

Tienen que pasar 16 años.

Problemas de ecuaciones (II)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha __________

Para trabajar con problemas de mezclas haz una tabla:

	Azúcar blanca	Azúcar morena	Mezcla
Precio (€/kg)	1,24	1,48	1,32
Masa (kg)	50	x	$50 + x$
Dinero (€)	$1{,}24 \cdot 50 + 1{,}48 \cdot x = 1{,}32(50 + x)$		

1. Se mezclan 1 800 kg de harina de 0,42 €/kg con 3500 kg de harina de 0,54 €/kg. ¿Qué precio tiene el kilo de la mezcla?

	Harina A	Harina B	Mezcla
Precio (€/kg)	0,42	0,54	x
Masa (kg)	1800	3500	5300
Dinero (€)	$0{,}42 \cdot 1800 + 0{,}54 \cdot 3500 = 5300 \cdot x$		

$0{,}42 \cdot 1800 + 0{,}54 \cdot 3500 = 5300 \cdot x$

$x = 0{,}499 = 0{,}5$

El precio de la mezcla es 0,5 €.

2. Se desea obtener 8 000 kg de pienso mezclando maíz a un precio de 0,5 €/kg con cebada a un precio de 0,3 €/kg. Si se desea que el precio de la mezcla sea de 0,45 €/kg, ¿cuántos kilos de maíz y de cebada necesitamos?

	Maíz	Cebada	Mezcla
Precio (€/kg)	0,5	0,54	x
Masa (kg)	x	$8000 - x$	8000
Dinero (€)	$0{,}5x + 0{,}3(8000 - x) = 45 \cdot 8000$		

$0{,}5x + 0{,}3(8000 - x) = 45 \cdot 8000$

$x = 6000$

Maíz: 6 000 kg

Cebada: 2 000 kg

Al resolver problemas de ecuaciones de 2.º grado, comprueba las soluciones.
Rechaza las soluciones de la ecuación que no lo sean del problema.

3. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 181. Halla dichos números.

Los números son x y $x + 1$ $\Rightarrow$ $x^2 + (x + 1)^2 = 181$ $\Rightarrow$ $x = 9, x = -10$

Hay dos soluciones:

N.º menor = 9 $\Rightarrow$ N.º mayor = 10 N.º menor = –10 $\Rightarrow$ N.º mayor = –9

4. Halla dos números cuya diferencia sea 5 y la suma de sus cuadrados sea 73.

Los números son x y el otro $x - 5$ $\Rightarrow$ $x^2 + (x - 5)^2 = 73$ $\Rightarrow$ $x = 8, x = -3$

Hay dos soluciones:

N.º mayor = 8 $\Rightarrow$ N.º menor = 3 N.º mayor = –3 $\Rightarrow$ N.º menor = –8

5. Calcula dos números enteros tales que su diferencia sea 2 y la suma de sus cuadrados sea 884.

$x^2 + (x - 2)^2 = 884$ $\Rightarrow$ $x = -20, x = 22$

Hay dos soluciones:

N.º menor = –22 $\Rightarrow$ N.º mayor = –20 N.º menor = 20 $\Rightarrow$ N.º mayor = 22

Bruño

Nombre ______________________ Curso _______ Fecha __________

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4(x + 5) + 3x = 4x – 3(x – 4)$

$x = –4/3$

b) $5(x – 2) + 3(x + 2) = 6(x – 1)$

$x = –1$

2. Aplicando la fórmula resolvente resuelve las siguientes ecuaciones de 2.º grado:

a) $25x^2 – 25x + 4 = 0$

$x_1 = 4/5, x_2 = 1/5$

b) $6x^2 + 11x – 2 = 0$

$x_1 = –2, x_2 = 1/6$

c) $4x^2 – 7x + 3 = 0$

$x_1 = 3/4, x_2 = 1$

3. Sin resolver las ecuaciones, calcula el discriminante y determina cuántas soluciones tienen:

a) $x^2 – 5x + 7 = 0$ a) $\Delta = 25 – 28 = –3 < 0 \Rightarrow$ No tiene solución real.

b) $3x^2 – 12x + 8 = 0$ b) $\Delta = 144 – 96 = 48 < 0 \Rightarrow$ Tiene dos soluciones.

c) $x^2 – 4x = 0$ c) $\Delta = 16 > 0 \Rightarrow$ Tiene dos soluciones.

d) $9x^2 + 24x + 16 = 0$ d) $\Delta = 576 – 576 = 0 \Rightarrow$ Tiene una solución doble.

4. Halla, en cada caso, una ecuación de 2.do grado cuyas soluciones son:

a) $x_1 = – 13, x_2 = 13$

$x^2 – 169 = 0$

b) $x_1 = – 2, x_2 = 6$

$x^2 – 4x – 12 = 0$

c) $x_1 = – 5, x_2 = 3$

$x^2 + 2x – 15 = 0$

5. La edad de Rubén es la quinta parte de la edad de su padre. Dentro de 3 años, la edad de Rubén será la cuarta parte de la edad de su padre. ¿Qué edad tiene cada uno actualmente?

	Actualmente	Dentro de x años
Rubén	x	$x + 3$
Padre	$5x$	$5x + 3$

$4(x + 3) = 5x + 3 \Rightarrow x = 9$

Edad de Rubén = 9 años.

Edad del padre = 45 años.

6. Calcula dos números naturales consecutivos tales que su producto sea 132.

$x(x + 1) = 132 \Rightarrow x = –12, x = 11$

Hay dos soluciones:

Número menor = –12, número mayor = –11

Número menor = 11, número mayor = 12

OBJETIVOS

a. Identificar un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.
b. Interpretar gráficamente un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas y su solución.
c. Resolver gráficamente un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.
d. Clasificar un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas en compatible determinado, incompatible y compatible indeterminado.
e. Resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando el método de sustitución, el de reducción y el de sustitución.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Adoptar una actitud investigadora en el planteamiento y resolución de problemas susceptibles de ser tratados algebraicamente.

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales escogiendo el método más conveniente para la realización del cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador

Autonomía e iniciativa personal

- Poner en práctica modelos de resolución de ecuaciones.

CONTENIDOS

Conceptos

- Sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Solución de un sistema. Sistemas equivalentes.
- Sistema compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.
- Método de resolución: gráfico, sustitución, reducción e igualación.

Procedimientos

- Interpretación y utilización del lenguaje algebraico y de los sistemas lineales en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso.
- Formulación verbal de problemas de sistemas lineales de ecuaciones, de los términos en que se plantean y del proceso y cálculos utilizados para resolverlos, confrontándolos con otros posibles.
- Elaboración y utilización de estrategias personales de cálculo mental.
- Utilización de los procedimientos tradicionales de resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas: gráfico, sustitución, reducción e igualación.
- Identificación de problemas de sistema de ecuaciones diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
- Decisión sobre qué sistemas y métodos son adecuados en la resolución de problemas de sistemas de ecuaciones.

Actitudes

- Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad de las ecuaciones para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones.
- Incorporación del lenguaje y del cálculo algebraico a la forma de proceder habitual.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas de sistemas de ecuaciones.
- Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier cálculo o problema de sistemas de ecuaciones.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Identifica un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.
b.1. Interpreta gráficamente un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas y su solución.
c.1. Resuelve un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas gráficamente.
d.1. Clasifica un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas en compatible determinado, incompatible y compatible indeterminado.
e.1. Soluciona un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando el método de sustitución, el de reducción y el de igualación.

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

Un **sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas** es una expresión algebraica de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

donde a, b, c, a', b' y c' son números conocidos: x e y son las incógnitas.

Una solución de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de valores (x, y) que verifican las dos ecuaciones.

1. Comprueba que $x = –1$, $y = 5$ es solución del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -3x + 2y = 13 \\ 4x + y = 1 \end{array}\right\}$$

$$-3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 = 3 + 10 = 13$$

$$4 \,.\, (-1) + 5 = -4 + 5 = 1$$

Resolución gráfica de un sistema lineal

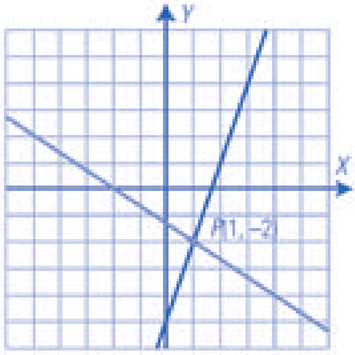
a) Se representa la recta correspondiente a la 1.ª ecuación.

b) Se representa la recta correspondiente a la 2.ª ecuación.

c) La solución es el punto de corte de ambas rectas.

2. Resuelve gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y = 5 \\ 2x + 3y = -4 \end{array}\right\}$$



$x = 1$, $y = –2$

3. Escribe un sistema que tenga como solución $x = 2$, $y = 3$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{array}\right\}$$

Métodos de sustitución e igualación

Bruño

Nombre ______________________ Curso _______ Fecha __________

Se resuelven fácilmente por **sustitución** los sistemas en los que una de las incógnitas ya esté despejada.
a) Se sustituye el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación.
b) Se resuelve la ecuación resultante.
c) El valor obtenido se sustituye en la ecuación donde estaba despejada la 1.ª incógnita.

1. Resuelve por el método más sencillo:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3 - 2x \\ 3x + 4y &= 10 \end{aligned}\right\}$$

Se sustituye el valor de *y* de la primera ecuación en la segunda.
$x = 2,\ y = -1$

Se resuelven fácilmente por igualación los sistemas en los que una de las dos incógnitas ya esté despejada en las dos ecuaciones.
a) Se igualan los valores de la incógnita despejada.
b) Se resuelve la ecuación resultante.
c) El valor obtenido se sustituye en la ecuación más sencilla donde estaba despejada la otra incógnita.

2. Resuelve por el método más sencillo:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x - 7 \\ y &= 13 - 2x \end{aligned}\right\}$$

Se igualan los valores de la *y*.
$x = 4,\ y = 5$

3. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2y + 1 \\ x &= -1 - 6y \end{aligned}\right\}$$

Se igualan los valores de la *x*.
$x = 1/2,\ y = -1/4$

Cuando un sistema tiene denominadores, primero hay que transformarlo en otro equivalente que no los tenga. Para ello se halla el m.c.m. de los denominadores de cada una de las ecuaciones y se multiplica toda la ecuación por dicho m.c.m.

4. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{4} &= 11 - 3y \\ 2x - \frac{y}{3} &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Se eliminan los denominadores:

$$\left.\begin{aligned} x &= 22 - 6y \\ 6x - y &= 21 \end{aligned}\right\}$$

Se sustituye el valor de *x* de la primera ecuación en la segunda.
$x = 4,\ y = 3$

Reducción y qué método utilizar I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Método de reducción

a) Mediante multiplicaciones apropiadas, se obtiene un sistema equivalente con los coeficientes de una misma incógnita opuestos.

b) Se suman las dos ecuaciones.

c) Se resuelve la ecuación resultante.

d) El valor obtenido se sustituye en la ecuación más sencilla y se halla el valor de la otra incógnita.

Se resuelven fácilmente por **reducción** los sistemas en los que una incógnita tenga los coeficientes:

a) Iguales: restando ambas ecuaciones.

b) Opuestos: sumando ambas ecuaciones.

c) Uno múltiplo de otro: multiplicando la ecuación que tenga el menor coeficiente por un número para que ambos coeficientes sean opuestos.

1. Resuelve por el método más sencillo:

$$\left.\begin{array}{r}3x + 2y = 7\\ 5x - 4y = 1\end{array}\right\}$$

Se suman las dos ecuaciones.

$x = 1,\ y = 2$

2. Resuelve por el método más sencillo:

$$\left.\begin{array}{r}3x - 2y = 8\\ 3x + 7y = -1\end{array}\right\}$$

Se cambia de signo la primera ecuación y se suman.

$x = 2,\ y = -1$

3. Resuelve por el método más sencillo:

$$\left.\begin{array}{r}2x + 3y = 5\\ 6x + 5y = 3\end{array}\right\}$$

Se multiplica la primera ecuación por 3 y se le resta la segunda.

$x = -2,\ y = 3$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 7 ▮ Ficha 4
Reducción y qué método utilizar II

Bruño

Nombre ____________________ Curso ______ Fecha ________

Todos los sistemas se pueden resolver por los tres métodos, pero hay sistemas en los que un método es mucho más sencillo de aplicar que otro. Para elegir un método se puede tener en cuenta:

a) Se resuelven fácilmente por **sustitución** los sistemas en los que una de las incógnitas ya esté despejada.

b) Se resuelven fácilmente por **igualación** los sistemas en los que una de las dos incógnitas ya esté despejada en las dos ecuaciones.

c) Se resuelven por **reducción** los sistemas en los que no parezca fácil aplicar sustitución o igualación.

1. Resuelve el siguiente sistema por el método más sencillo:

$$\left.\begin{aligned} y &= 4x - 1 \\ 2x + 3y &= 25 \end{aligned}\right\}$$

Por sustitución.

$x = 2$, $y = 7$

2. Resuelve por el método más sencillo el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 4x - 3y &= -4 \end{aligned}\right\}$$

Por reducción, se suman las dos ecuaciones.

$x = 1/2$, $y = 2$

3. Resuelve el siguiente sistema por el método más sencillo

$$\left.\begin{aligned} x &= 2y - 1 \\ x &= 3y - 6 \end{aligned}\right\}$$

Por igualación.

$x = 9$, $y = 5$

4. Resuelve por el método más sencillo

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-2}{4} + \frac{y}{5} &= \frac{1}{4} \\ 3(x - 1) + 2(y + 3) &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Se eliminan los denominadores:

$$\left.\begin{aligned} 5x - 4y &= 20 \\ 3x - 2y &= 51 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por reducción multiplicando la segunda ecuación por 2 y sumando.

$x = 2$, $y = -5/2$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 7 ▮ Ficha 5
Problemas de sistemas I

Bruño

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ____________

Para resolver un problema se debe leer el enunciado varias veces hasta que se entienda muy bien cuáles son las **incógnitas,** los **datos,** las **relaciones** y las **preguntas.** En los problemas geométricos se debe hacer siempre el dibujo, y en los numéricos, un esquema. Este procedimiento se puede dividir en:

a) **Entérate:** se escriben las **incógnitas,** los **datos** y las **preguntas.**

b) **Manos a la obra:** se plantean las relaciones, se transforman en un sistema y se resuelve este sistema.

c) **Solución y comprobación:** se escriben las respuestas a las preguntas que plantea el problema, se comprueba que son coherentes y que cumplen las relaciones dadas.

1. Halla dos números sabiendo que uno es el doble del otro y que entre los dos suman 51

Primer número: x

Segundo número: y

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x \\ x + y &= 51 \end{aligned}\right\}$$

$x = 17$, $y = 34$

2. En un garaje hay 18 vehículos entre coches y motos. Sin contar las ruedas de repuesto hay 58 ruedas. ¿Cuántas motos y coches hay?

Número de coches: x

Número de motos: y

$$\left.\begin{aligned} 4x + 4y &= 18 \\ 4x + 2y &= 58 \end{aligned}\right\}$$

Coches: $x = 11$, motos: $y = 7$

3. El perímetro de un triángulo isósceles mide 65 m, y cada uno de los lados iguales mide el doble del lado desigual. ¿Cuánto mide cada lado?

Medida del lado desigual: x

Medida de cada uno de los lados iguales: y

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 65 \\ x + 2y &= 2x \end{aligned}\right\}$$

Lado desigual: $x = 13$ m

Cada lado igual: $y = 26$ m

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 7 ▮ Ficha 6
Problemas de sistemas II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. El doble de un número más el triple de otro número es igual a 80, y el quíntuplo del primero menos la mitad del segundo es igual a 56. ¿De qué números se trata?

Primer número: x

Segundo número: y

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 80 \\ 5x - y/2 = 56 \end{array}\right\}$$

$x = 13$, $y = 18$

2. Los alumnos de un centro van a ir al teatro. El precio de una entrada sin descuento es de 4,5 y con descuento especial para colegios es de 1,5. Se sacan 250 entradas, unas con descuento y otras sin descuento, y en total se pagan 675. ¿Cuántas entradas se han comprado con descuento? ¿Y sin descuento?

Número de entradas sin descuento: x

Número de entradas con descuento: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 250 \\ 4{,}5x + 1{,}5y = 675 \end{array}\right\}$$

Entradas sin descuento: $x = 100$ entradas.

Entradas con descuento: $y = 150$ entradas.

3. Tres DVD y 2 CD cuestan 12 ; 4 DVD y 4 CD cuestan. Calcula cuánto cuestan cada DVD y cada CD.

Precio del DVD: x

Precio del CD: y

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 12 \\ 4x + 4y = 18 \end{array}\right\}$$

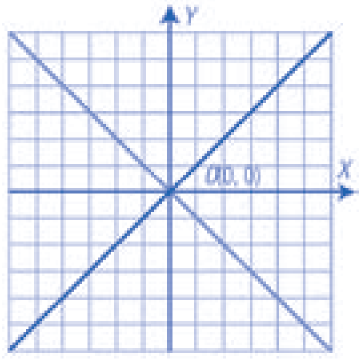
Cada DVD: $x = 3$ €

Cada CD: $y = 1{,}5$ €

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ________

1. Resuelve gráficamente el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$$



$x = 0$, $y = 0$

2. Resuelve por el método más sencillo los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} x = 16 - y \\ x = y - 2 \end{array}\right\}$

Se aplica el método de igualación.

Se igualan los valores de x.

$x = 7$, $y = 9$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{array}\right\}$

Se aplica el método de reducción.

Se multiplica la primera ecuación por 2, la segunda por 3 y se suman.

$x = 3$, $y = 2$

3. Para una fiesta se compran refrescos a 0,85 € y bolsas de frutos secos a 1,25 €. Por cada refresco se compran tres bolsas de frutos secos y en total se pagan 230 €. ¿Cuántos refrescos y bolsas se han comprado?

N.º de refrescos: x

N.º de bolsas de frutos secos: y

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}85x + 1{,}25y = 230 \\ y = 3x \end{array}\right\}$$

N.º de refrescos: $x = 50$

N.º de bolsas de frutos secos: $y = 150$

Bruño

OBJETIVOS

a. Identificar una función definida por un enunciado, una tabla, una gráfica y una fórmula.
b. Reconocer las fórmulas de las funciones polinómicas de grado cero, uno y dos.
c. Determinar la continuidad de una función definida por una gráfica.
d. Hallar las asíntotas de una función definida por una gráfica.
e. Identificar una función periódica definida por una gráfica.
f. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos de una función definida por una gráfica.
g. Calcular los intervalos de concavidad y convexidad, de una función definida por una gráfica.
h. Hallar los puntos de corte con los ejes de una función definida por una gráfica y de una recta y una parábola definida por su fórmula.
i. Trasladar horizontal y verticalmente la gráfica de una función.
j. Determinar si una función definida por una gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas.
k. Interpretar conjuntamente dos gráficas.
l. Resolver problemas de funciones aplicando una estrategia conveniente y escogiendo adecuadamente el método más idóneo para la realización de un determinado cálculo y representación: por escrito, con calculadora o con ordenador.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos de tablas y gráficas para interpretar fenómenos sencillos observables en el mundo físico y natural.

Competencia social y ciudadana

- Trabajar en grupo y valorar el intercambio de puntos de vista.

CONTENIDOS

Conceptos

- Función. Variable independiente y dependiente.
- Gráfica de una función. Tabla de valores de una función. Dominio y recorrido de una función.
- Función polinómica. Función continua. Función discontinua.
- Asíntota vertical y horizontal. Tendencia de una función.
- Función periódica. Función creciente y decreciente. Máximo y mínimo en un punto.
- Función cóncava y convexa.
- Puntos de corte con los ejes.

Procedimientos

- Utilización e interpretación del lenguaje gráfico teniendo en cuenta la situación que se representa y utilizando el vocabulario y los símbolos adecuados.
- Uso de expresiones algebraicas para describir gráficas de funciones polinómicas de grado cero, uno y dos.
- Utilización del sistema de ejes coordenados para representar gráficas.

Actitudes

- Reconocimiento y valoración de la utilidad del lenguaje gráfico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana y del conocimiento científico.
- Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a observaciones y experiencias.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

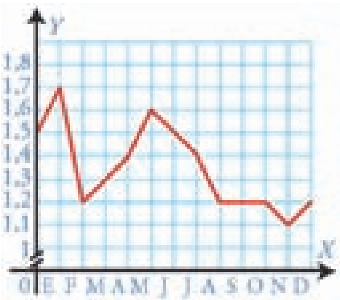
a.1. Utiliza los conceptos, procedimientos y terminología de las funciones con propiedad.
b.1. Reconoce las fórmulas de las funciones polinómicas de grado cero, uno y dos.
c.1. Identifica funciones continuas definidas por su gráfica.
d.1. Halla las asíntotas de una función definida por una gráfica.
e.1. Reconoce funciones periódicas definidas por su gráfica.
f.1. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos de una función definida por una gráfica.
g.1. Calcula los intervalos de concavidad y convexidad, de una función definida por una gráfica.
h.1. Calcula los puntos de corte de una función afín y de una parábola definida por su fórmula.
i.1. Dibuja una función trasladada.
j.1. Identifica funciones simétricas respecto del eje de ordenadas.
k.1. Resuelve problemas de interpretación conjunta de gráficas.
l.1. Resuelve problemas representando situaciones en unos ejes coordenados y estudiando las gráficas obtenidas.

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 8 ▮ Ficha 1
Funciones (I)

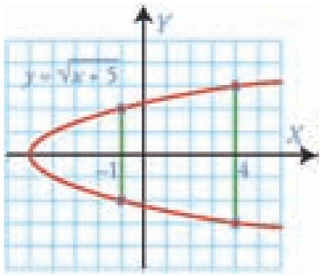
Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **función** es una relación entre dos variables de forma que a cada valor de la variable independiente ***x*** le corresponde **un único** valor de la variable dependiente ***y***.

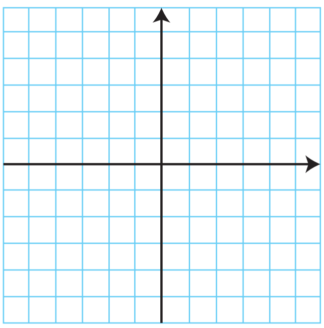


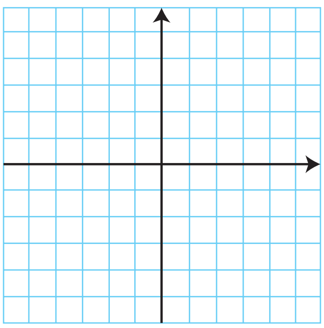
La gráfica representa una función, donde para cada valor de x corresponde un único valor de y.



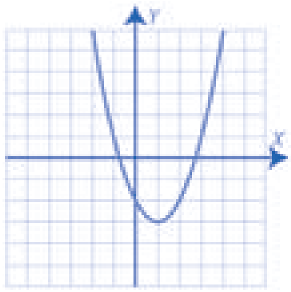
Esta gráfica no representa una función, ya que hay valores de x para los que hay dos valores de y; por ejemplo: Para $x = -1$ corresponden los valores de $y = -2$, $y = 2$.

1. Dibuja una gráfica que sea función y otra que no.

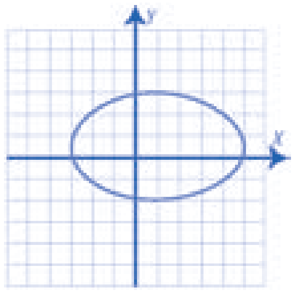




Es una función.

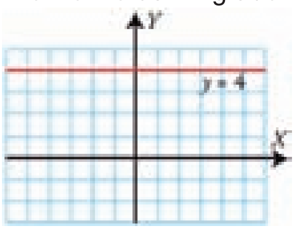


No es una función.

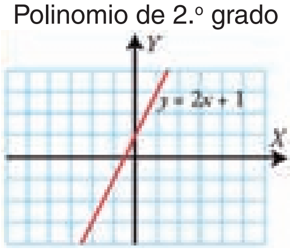


Una función es **polinómica** cuando está definida por un polinomio; una función es **racional** cuando está definida por un cociente de polinomios.

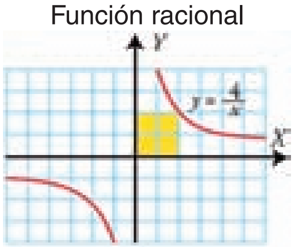
Polinomio de 1.er grado



Polinomio de 2.º grado



Función racional



2. Indica que tipo de función es:

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ (Polinómica 2.º grado)

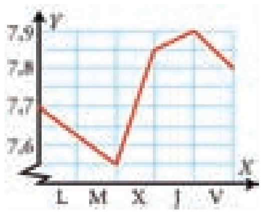
b) $y = 2x^{-2} - 5$ (Racional)

c) $y = 3x$ (Polinómica 1.er grado)

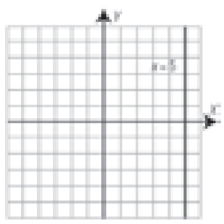
d) $y = \frac{12}{x}$ (Racional)

3. De las siguientes gráficas ¿Cuáles representan funciones?

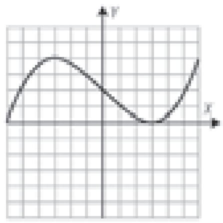
a)



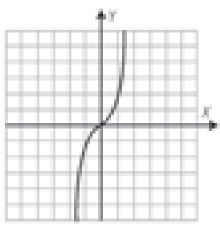
b)



c)



d)



La gráfica ***a***, y ***d*** representan funciones.

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ______________

Una función se puede expresar por:

- Un enunciado, cuando se describe verbalmente.
- Una tabla, cuando se dan valores de la variable independiente, x, con los correspondientes de la variable dependiente, y.
- Una gráfica, cuando se representan los pares (x, y) en unos ejes cartesianos.
- Una fórmula o expresión algebraica, cuando se representa por $y = f(x)$ (y es función de x).

1. En la representación gráfica de una función, la suma de la abscisa y de la ordenada de cada punto es 5.

a) Escribe la ecuación que relaciona la ordenada, y, en función de la abscisa, x.

b) ¿De qué grado es la función polinómica que se obtiene?

a) $x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$ b) Es un polinomio de grado uno.

2. Un rectángulo tiene 12 m de perímetro.

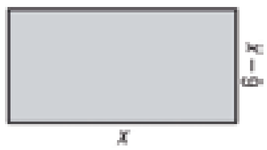
a) Escribe el área del rectángulo, y, en función de la longitud de la base, x

b) ¿De qué grado es la función polinómica que se obtiene?

c) Haz una tabla de valores.

d) Halla el dominio.

e) Halla la imagen o recorrido.



a) $y = x\,(6 - x) = 6x - x^2$

b) Es un polinomio de grados dos.

c) Tabla:

Base: x	0	1	2	3	4	5	6
Área: y	0	5	8	9	8	5	0

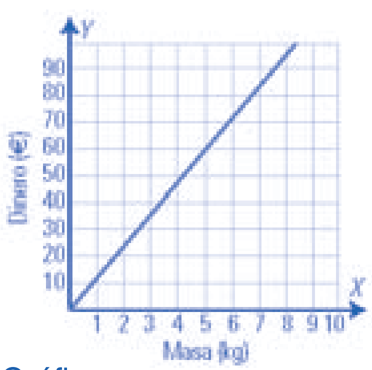
d) Dominio: $0 \leq x \leq 6$

e) Imagen o recorrido: $0 \leq x \leq 9$

3. La siguiente función está expresada de una de las cuatro formas. Halla, la expresión de las otras tres formas:

El precio de un jamón es de 12 €/kg.

Enunciado



Gráfica

Masa (kg): x	1	2	3	4	5	...
Dinero (€): y	12	24	36	48	60	...

Tabla

Fórmula: $y = 12\,x$

Continuidad, asíntotas y periodicidad (I)

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

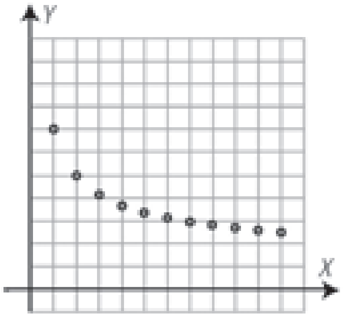
- Una función es continua si la gráfica se puede dibujar de un solo trazo, es decir, la gráfica no se rompe.
- Una función es discontinua si la gráfica no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

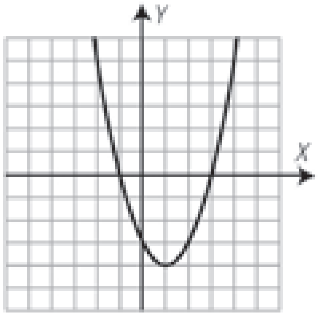
Las discontinuidades pueden presentarse cuando:

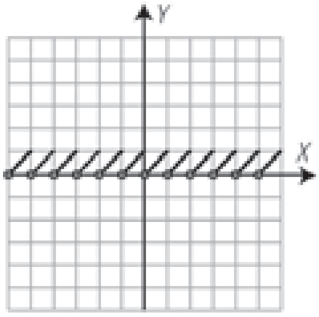
a) La variable independiente es discreta (x solo puede tomar valores determinados, por ejemplo los números enteros, la gráfica será una función de puntos).

b) Hay un salto (si la función da un salto en un punto).

1. Observa las gráficas y contesta a las siguientes preguntas:







a) ¿Qué gráfica es continua?

a) La segunda.

b) ¿En alguna de las gráficas se repite algún trozo?

b) La tercera.

2. Un dependiente de una tienda gana 50 € por cada día que va a trabajar, más 20 € por cada frigorífico que vende.

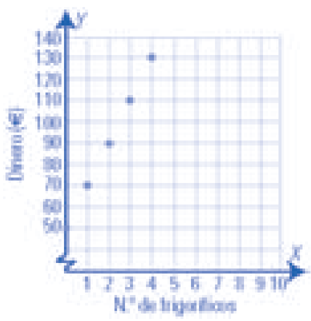
a) Expresa el salario del vendedor durante un día en función de los frigoríficos que vende.

b) Esboza la gráfica de la función.

c) ¿Es continua? ¿Por qué?

a) $y = 50 + 20x$

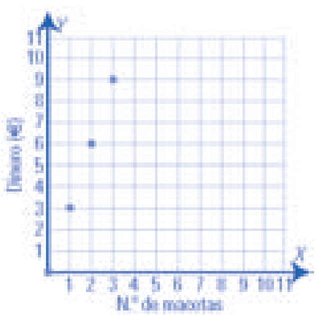
b) Gráfica:



c) No es continua. Los valores de x son discretos.

3. En una floristería cobran 3 € por cada maceta que venden. Escribe la fórmula que expresa el dinero cobrado en función de las macetas vendidas. Represéntala y analiza si es continua.

$y = 3x$

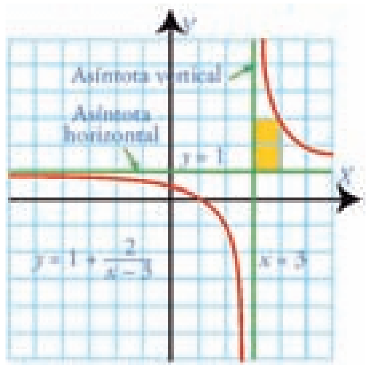


Es discontinua porque la variable x es discreta.

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 8 ▮ Ficha 4
Continuidad, asíntotas y periodicidad (II)

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

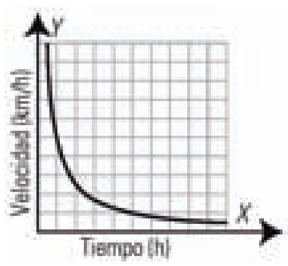
Una **asíntota vertical** es una recta vertical, $x = s$, de forma que, cuando el valor de x está muy próximo a s, la función toma valores muy gran-des o muy pequeños. Se dice que la función tiende hacia más infinito (+∞) o menos infinito (–∞). En el valor de la abscisa $x = s$, la función es discontinua.



Una **asíntota horizontal** es una recta horizontal, $y = r$, a la que se acerca la gráfica de la función cuando la variable independiente se aleja del origen.

Estudiar la **tendencia** de una función es calcular los valores de la función cuando la variable x, toma valores muy alejados del origen de coordenadas.

1. La siguiente gráfica recoge la velocidad (v = e /t) de una persona que recorre 5 km. Indica las asíntotas de la gráfica y explica su significado.



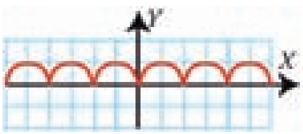
Asíntota horizontal: $y = 0$.

Si recorre los 5 km en mucho tiempo, la velocidad debe ser muy baja. Al aumentar mucho el tiempo, la velocidad se aproximará a cero.
Asíntota vertical: $x = 0$.

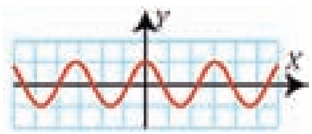
Si recorre los 5 km en poco tiempo, la velocidad debe ser muy alta. Al disminuir mucho el tiempo y aproximarse a cero, la velocidad tenderá a ser muy alta.

Una **función** es **periódica** si su gráfica se repite en intervalos de amplitud constante. Se llama **período** a la longitud de dicho intervalo.

2. Analiza si las siguientes gráficas son periódicas, y en caso afirmativo calcula el período:

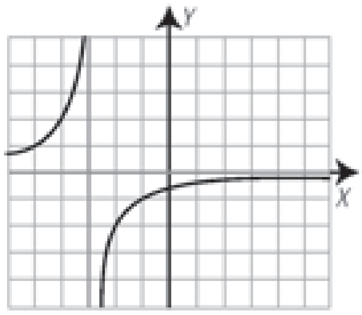


Es periódica de período 2.



Es periódica de período π.

3. Dada la función de la gráfica.



a) ¿Es continua?
b) ¿Es periódica?
c) ¿Es simétrica respecto al eje Y?
d) Halla sus asíntotas.

a) No es continua, es discontinua en $x = -3$
b) No es periódica.
c) No es simétrica respecto del eje Y
d) Asíntota vertical $x = -3$
Asíntota horizontal $y = 0$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 8 ▮ Ficha 5
Crecimiento y punto de corte con los ejes

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

- Una gráfica es creciente cuando, al aumentar los valores de la variable independiente x, la variable dependiente y aumenta.
- Una gráfica es decreciente cuando, al aumentar los valores de la variable independiente x, la variable dependiente y disminuye.
- Máximo relativo: es un punto en que el valor de la función es mayor que en los puntos que están muy próximos.
- Mínimo relativo: es un punto en que el valor de la función es menor que en los puntos que están muy próximos.

1. La gráfica de la cotización en bolsa de cierta empresa durante una semana es la siguiente:

a) ¿En qué momento alcanza la mayor cotización? ¿Cuál es el valor? Al cierre del jueves con 7,9 €.

b) ¿En qué momento alcanza la menor cotización? ¿Cuál es el valor? Al cierre del martes con 7,55 €.

c) ¿Durante qué días ha subido? Miércoles y jueves.

d) ¿Durante qué días ha bajado? Lunes, martes y viernes.

e) En la semana, ¿ha subido o ha bajado? ¿Cuánto? Ha subido: 7,8 – 7,7 = 0,1 €.

Los **puntos de corte de una función con el eje *X*** se obtienen igualando a cero la expresión de la función y resolviendo la ecuación.

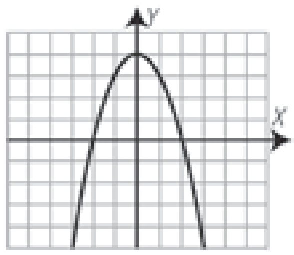
Los **puntos de corte de una función con el eje *Y*** se obtienen sustituyendo el valor $x = 0$ en la fórmula de la función.

2. Representa la función $\boldsymbol{y = -x^2 + 4}$ y halla:

a) ¿Dónde son crecientes y dónde decrecientes?

b) Máximos y mínimos.

c) Los puntos de corte con los ejes.



a) Creciente: a la izquierda de cero.

Decreciente: a la derecha de cero.

b) Máximo: $A(0, 4)$

d) Eje X: $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$

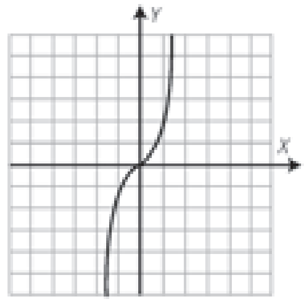
Eje Y: $C(0, 4)$

3. Representa la función $\boldsymbol{y = x^3}$ y halla:

a) Crecimiento y decrecimiento.

b) Máximos y mínimos.

c) Los puntos de corte con los ejes.



a) Creciente: siempre.

Decreciente: nunca.

b) No tiene máximos ni mínimos.

d) Eje X: $O(0, 0)$

Eje Y: $O(0, 0)$

Traslaciones. Simetrías. Interpretación conjunta de gráficas

Bruño

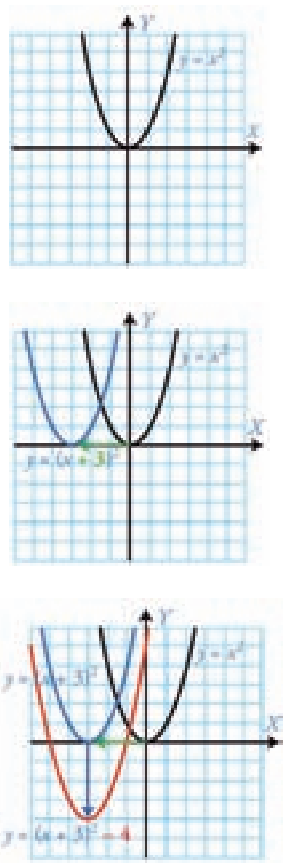
Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Trasladar verticalmente *k* unidades una función $y = f(x)$ es sumarle a la variable dependiente y la constante k $\Rightarrow$ Se obtiene la función: $\boldsymbol{y = f(x) + k}$

- Si k es positiva ($k > 0$), la función se traslada hacia arriba.
- Si k es negativa ($k < 0$), la función se traslada hacia abajo.

Trasladar horizontalmente *p* unidades una función $y = f(x)$ es restarle a la variable independiente x la constante p $\Rightarrow$ Se obtiene la función: $\boldsymbol{y = f(x - p)}$

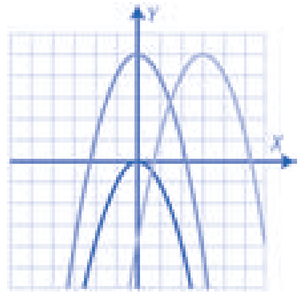
- Si p es positiva ($p > 0$), la función se traslada hacia la derecha.
- Si p es negativa ($p < 0$), la función se traslada hacia la izquierda.



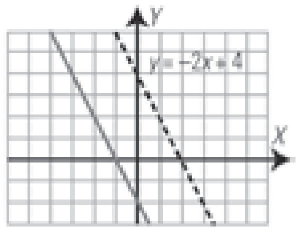
1. Representa la función $y = -x^2$. Haz una traslación de 5 unidades hacia arriba, y luego haz una traslación de 3 unidades hacia la derecha.

y = – x 2 + 5

y = – (x – 3)2 + 5



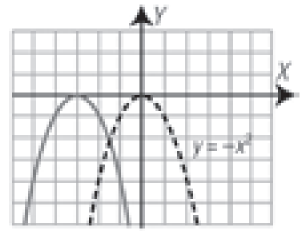
2. Escribe la fórmula de la gráfica gris, que es una traslación de la punteada, ¿Cuáles son simétricas respecto del eje Y?



$y = -2x - 2$

$y = \dfrac{x^2}{2} - 3$

Ambas son simétricas respecto de *y*.



$y = -(x + 3)^2$

La punteada respecto de *y*.

Una **función es par** cuando se cumple que $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$, es decir, al cambiar el valor de x por su opuesto $-x$ se obtiene el mismo valor de la ordenada y.
Una **función par** tiene una gráfica **simétrica** respecto del eje Y.

3. ¿Cuáles de las siguientes funciones son pares?

a) $y = x + 2$ b) $y = x^2 - 3$

¿Alguna de ellas es simétrica respecto del eje Y? ¿Por qué?

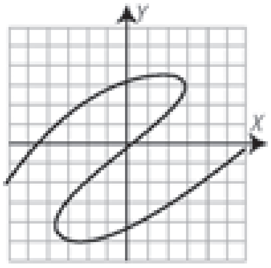
a) $f(-x) = -x + 2 \neq f(x)$ $\Rightarrow$ No es par.

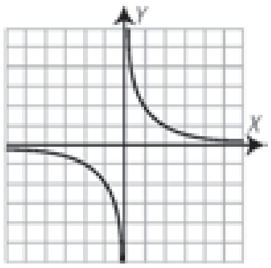
b) $f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x)$ $\Rightarrow$ Sí es par.

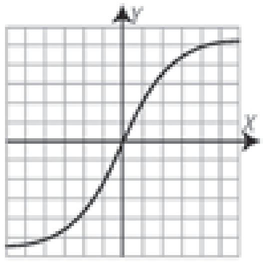
La función $y = x^2 - 3$ es simétrica respecto del eje Y por ser par.

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

1. Indica cuál de las siguientes gráficas es una función:

a)


b)


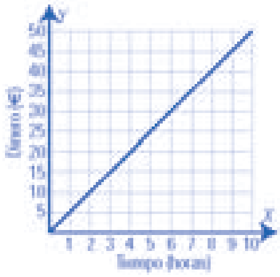
c)


a) No es función.
b) Sí es función.
c) Sí es función.

2. Expresa la función $y = 5x$ mediante una tabla, una gráfica y un enunciado.

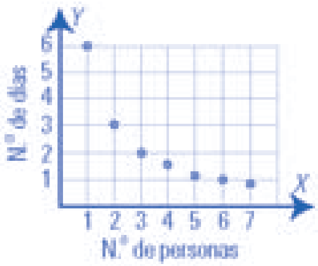
Tabla

Tiempo (h): x	1	2	3	...
Dinero (€): *y*	5	10	15	...

Gráfica


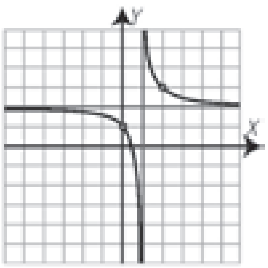
Enunciado: un trabajador cobra 5 € por cada hora trabajada.

3. Una persona tarda 6 días en recoger las fresas de una finca. Representa la gráfica. ¿Es continua la función?



Es discontinua. La variable independiente es discreta.

4. Dada la función de la gráfica.



a) ¿Es continua?
b) ¿Es periódica?
c) ¿Es simétrica respecto al eje *Y*?
d) Halla sus asíntotas.

a) No es continua, es discontinua en $x = 1$
b) No es periódica.
c) No es simétrica respecto del eje *Y*
d) Asíntota vertical $x = 1$
Asíntota horizontal $y = 0$

5. Indica en la función del ejercicio 4: Crecimiento y decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de corte con los ejes.

La función es decreciente, no tiene máximo ni mínimo y los puntos de corte con los ejes son:
Con el eje x (0,5;0) y con el eje y (0,1).

6. ¿Cuáles de las siguientes funciones son pares?

a) $y = x^2 + 2$

b) $y = x - 3$

a) $f(-x) = (-x)^2 + 2 = f(x) \Rightarrow$ Sí es par.

b) $f(-x) = -x - 3 \neq f(x) \Rightarrow$ No es par.

OBJETIVOS

a. Identificar una función constante por su gráfica y por su fórmula.
b. Identificar una función lineal o de proporcionalidad directa por su gráfica y por su fórmula.
c. Calcular la pendiente de una función lineal en su fórmula y en su gráfica.
d. Determinar la fórmula de una función de proporcionalidad directa a partir de los datos de una tabla o su gráfica y viceversa.
e. Identificar una función afín por su gráfica y por su fórmula.
f. Calcular la pendiente de una función afín en su fórmula y en su gráfica.
g. Determinar la fórmula de una función afín a partir de los datos de una tabla o su gráfica y viceversa.
h. Identificar una función de proporcionalidad inversa por su gráfica y por su fórmula.
i. Calcular la constante de proporcionalidad de una función de proporcionalidad inversa en su fórmula y en su gráfica.
j. Determinar la fórmula de una función de proporcionalidad inversa a partir de los datos de una tabla o su gráfica y viceversa.
k. Trasladar horizontalmente y verticalmente una hipérbola.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos de rectas e hipérbolas para interpretar fenómenos sencillos en el mundo físico y natural.

Autonomía e iniciativa personal

- Adaptarse a usar distintas técnicas, instrumentos y métodos para el aprendizaje de los contenidos matemáticos de rectas e hipérbolas.

CONTENIDOS

Conceptos

- Función constante. Función lineal o de proporcionalidad directa. Función afín.
- Pendiente de una recta.
- Ecuación general, explícita y pendiente de una recta.
- Función de proporcionalidad inversa. Constante de proporcionalidad.
- Hipérbola.

Procedimientos

- Utilización e interpretación del lenguaje gráfico teniendo en cuenta la situación que se representa y utilizando el vocabulario y los símbolos adecuados.
- Uso de expresiones algebraicas para describir funciones constantes, lineales, afines y de proporcionalidad inversa.
- Determinación de fórmulas de funciones constantes, lineales, afines y de proporcionalidad inversa a partir de sus gráficas.
- Determinación de la ecuación de una hipérbola a partir de su gráfica.

Actitudes

- Reconocimiento y valoración de la utilidad del lenguaje gráfico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana y del conocimiento científico.
- Reconocimiento y valoración de las relaciones entre el lenguaje gráfico y otros conceptos y lenguajes matemáticos.
- Curiosidad por investigar relaciones entre magnitudes o fenómenos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Identifica una función constante por su gráfica y por su fórmula.
b.1. Identifica una función lineal o de proporcionalidad directa por su gráfica y por su fórmula.
c.1. Calcula la pendiente de una función lineal en su fórmula y en su gráfica.
d.1. Determina la fórmula de una función de proporcionalidad directa a partir de los datos de una tabla o su gráfica y viceversa.
e.1. Identifica una función afín por su gráfica y por su fórmula.
f.1. Calcula la pendiente de una función afín en su fórmula y en su gráfica.
g.1. Determina la fórmula de una función afín a partir de los datos de una tabla o su gráfica y viceversa.
h.1. Reconoce las fórmulas que corresponden a una función de proporcionalidad inversa y calcula la constante de proporcionalidad.
i.1. Calcula la constante de proporcionalidad de una función de proporcionalidad inversa en su fórmula y en su gráfica.
j.1. Determina la fórmula de una función de proporcionalidad inversa a partir de los datos de una tabla o su gráfica y viceversa.
k.1. Dibuja una hipérbola a partir de su fórmula.

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 9 ▮ Ficha 1
Funciones constantes y lineales

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

y* = *k (siendo k la ordenada del punto en el que la recta corta al eje y), representa a una función constante, porque para cualquier valor de x, la variable y es siempre la misma.

$x = k$ (siendo k la abscisa del punto en el que la recta corta al eje X), no es una función, porque para el valor de $x = k$ existen infinitos valores de y.

La **función es lineal o de proporcionalidad directa** si responde a la forma $y = mx$, ($m = 0$, m es la constante de proporcionalidad directa) y su representación gráfica es una recta que pasa por $O(0, 0)$.

La **pendiente** de una recta es la inclinación que tiene respecto al eje X. En las funciones lineales, coincide con el valor de m:

a) Si la pendiente es positiva **($m > 0$),** la recta es **creciente.**

b) Si la pendiente es negativa **($m < 0$),** la recta es **decreciente.**

Para dibujar una función lineal se calculan las coordenadas de un punto y se une con el origen de coordenadas.

Si una **función lineal o de proporcionalidad directa** viene dada por una tabla o una gráfica, para hallar m se tiene en cuenta que despejando m de $\boldsymbol{y = mx}$ se obtiene:

$$m = \frac{y}{x}$$

Luego m es el cociente de cualquier valor de y dividido entre el valor correspondiente de x, siempre que $x \neq 0$.

1. Halla mentalmente la pendiente de las siguientes funciones lineales, y di si son crecientes o decrecientes:

a) $y = 3x$ $\quad m = 3 > 0 \Rightarrow$ Función creciente.

b) $y = -x/3$ $\quad m = -1/3 < 0 \Rightarrow$ Función decreciente.

2. Halla la ecuación de la siguiente función definida por una tabla de valores y clasifícala:

x	1	2	5	10
y	1,2	2,4	6	12

$y = 1,2x$

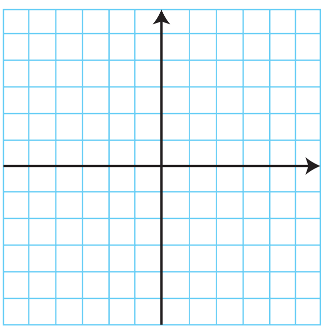
Es una función lineal o de proporcionalidad directa.

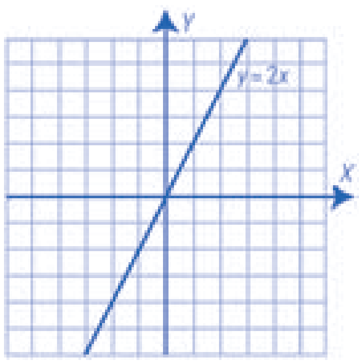
3. La temperatura baja 2 grados cada hora. Halla la temperatura en función del tiempo.

$y = -2x \Rightarrow$ Es una función lineal.

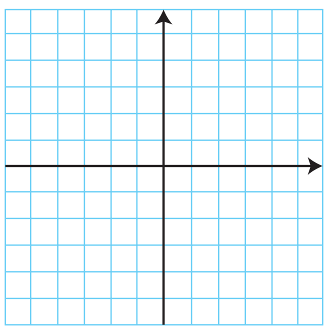
4. Representa gráficamente las siguientes ecuaciones. Di cuáles son funciones y clasifícalas:

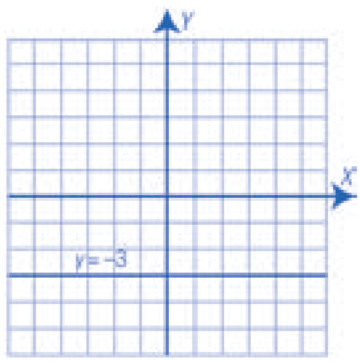
$y = 2x$ Función lineal





$y = -3$ Función constante





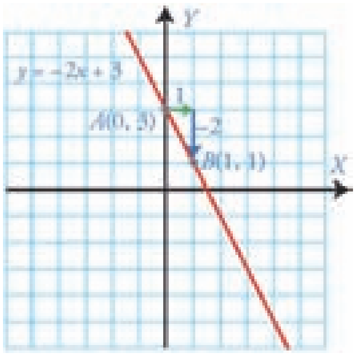
Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha __________

Una **función** es **afín** si su ecuación es del tipo:

$$\boldsymbol{y = mx + b} \text{ (siendo } m \text{ y } b \text{ números reales, } m \neq 0,\ b \neq 0)$$

Su representación gráfica es una recta que tiene de pendiente m y pasa por el punto $P(0, b)$. A b se le llama **valor de la ordenada en el origen.**

Para dibujar la gráfica de una función afín de forma sencilla, se hace una tabla con los valores de $x = 0$ y $x = 1$.



x	y = −2x + 3
0	3

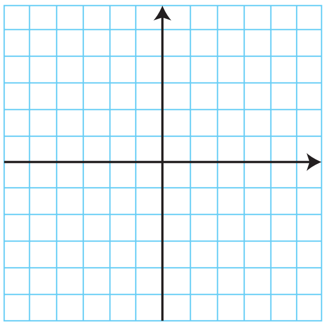
$m = -2$

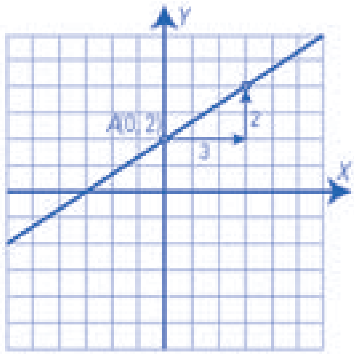
$A(0, 3)$

La ecuación explícita de una función es aquella en la que la variable independiente ***y*** está despejada.

$$\boldsymbol{y = ax + b}$$

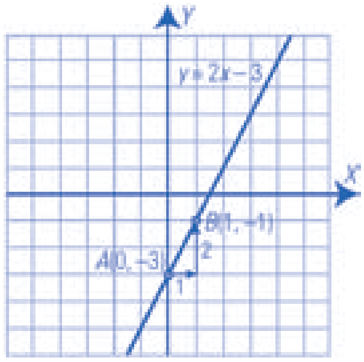
1. Dibuja la recta que pasa por el punto $A(0, 2)$ y tiene de pendiente $m = 2/3$



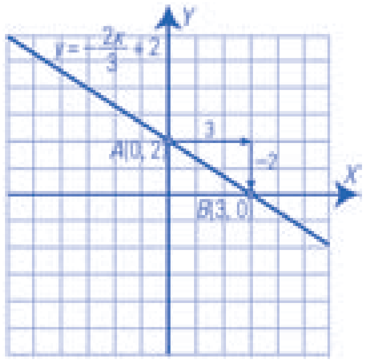


2. Llevar las siguientes ecuaciones a la forma explícita de la función y representa gráficamente:

a) $2x - y = 3$

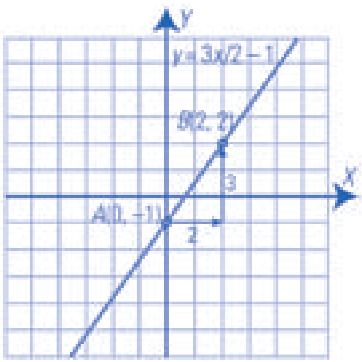


b) $2x + 3y = 6$



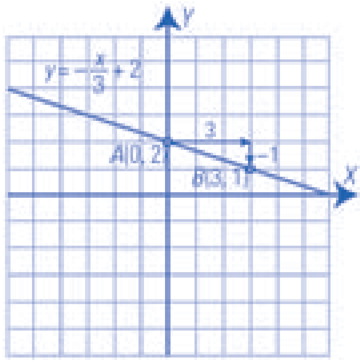
3. Dibuja la gráfica de las funciones afines siguientes. Halla en cada una de ellas la pendiente y la ordenada en el origen. ¿Cuál es creciente? ¿Cuál es decreciente?

a) $y = 3x/2 - 1$



La pendiente:
$m = 3/2 > 0$ Función creciente.
La ordenada en el origen: $b = -1$.

b) $y = -x/3 + 2$



La pendiente:
$m = -1/3 > 0$ Función decreciente.
La ordenada en el origen: $b = 2$.

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 9 ▮ Ficha 3
Función afín (II)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

La **ecuación punto-pendiente** de la recta es: $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$ donde $P(x_1, y_1)$ es un punto de la recta y m es la pendiente.

La pendiente de la recta que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se halla aplicando la fórmula:

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-2, 1)$ y cuya pendiente es $m = 3$.

Pendiente: $m = 3$ Punto: $P(-2, 1)$

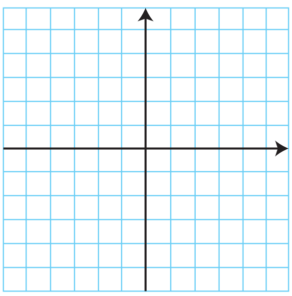
$y - 1 = 3(x + 2) \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 7$

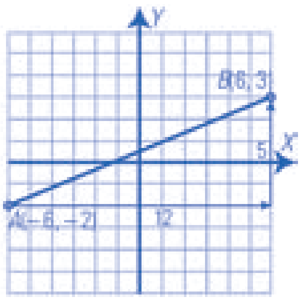
2. Halla la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A(-2, 3)$ y $B(4, 5)$.

Pendiente: $m = \dfrac{5 - 3}{4 + 2} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Punto: $A(-2, 3)$ $\quad y - 3 = \dfrac{1}{3} \cdot (x + 2) \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{11}{3}$

3. Representa la recta que pasa por los puntos A (– 6, – 2) y B (6, 3). Halla su ecuación.





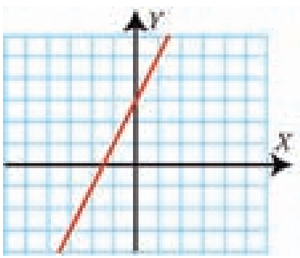
Pendiente: $m = \dfrac{3 - (-2)}{8 - (-6)} = \dfrac{5}{12}$

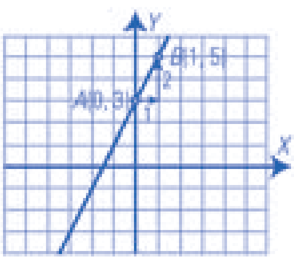
Punto: $A(-6, -2)$

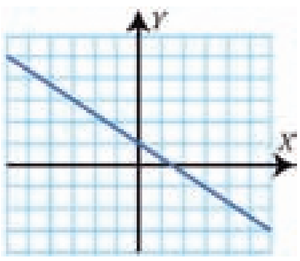
$y + 2 = \dfrac{5}{12} \cdot (x + 6) \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{5}{12}x + \dfrac{1}{2}$

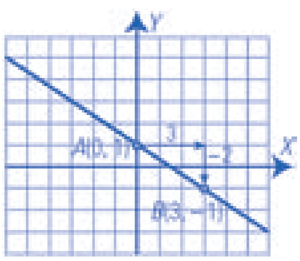
Para hallar la ecuación de una recta a partir de su gráfica, se utiliza la ecuación y = mx + b, donde m es la pendiente y b es la ordenada en el origen.

4. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:









$A(0, 3) \quad \Rightarrow \quad b = 3$

$A(0, 3)$ y $B(1, 5) \quad \Rightarrow \quad m = 2$

$y = 2x + 3$

$A(0, 1) \quad \Rightarrow \quad b = 1$

$A(0, 1)$ y $B(3, -1) \quad \Rightarrow \quad m = -2/3$

$y = -\dfrac{2}{3}x + 1$

Funciones de proporcionalidad inversa (I)

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha __________

Una **función** es de **proporcionalidad inversa** si al multiplicar la variable independiente x por un número, la variable dependiente y queda dividida por dicho número. Su ecuación es:

$$y = \frac{k}{x} \quad (k \text{ es la } \textbf{constante de proporcionalidad inversa}, k = 0)$$

Su representación gráfica es una hipérbola, que es discontinua para $x = 0$, tiene como asíntotas los ejes y es simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$.

La **constante de proporcionalidad** k es el área del rectángulo que tiene como vértices opuestos un punto cualquiera $P(x, y)$ de la hipérbola y el punto de corte de las asíntotas.

a) Si $k > 0$, la hipérbola está en el 1.er y 3.er cuadrantes y es decreciente.

b) Si $k < 0$, la hipérbola está en el 2.º y 4.º cuadrantes y es creciente.

Para dibujar una función de proporcionalidad inversa se hace una tabla de valores. Los valores más cómodos son los divisores de k

La ecuación $y = \dfrac{k}{x}$ es equivalente a $x \cdot y = k$

1. Halla mentalmente la constante de proporcionalidad inversa de las siguientes funciones y di si son crecientes o decrecientes:

a) $y = 2/x$ — $k = 2 > 0 \Rightarrow$ Decreciente

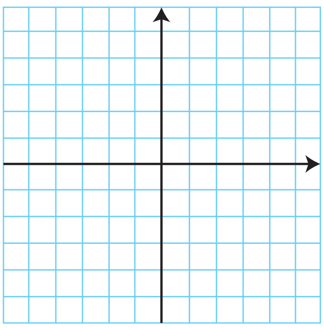
b) $y = -3/x$ — $k = -3 < 0 \Rightarrow$ Creciente

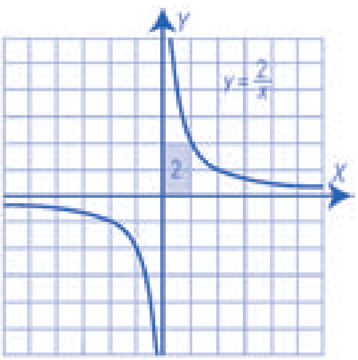
c) $y = -4/x$ — $k = -4 < 0 \Rightarrow$ Creciente

d) $y = 6/x$ — $k = 6 > 0 \Rightarrow$ Decreciente

2. Representa gráficamente las siguientes hipérbolas, indica si son crecientes o decrecientes.

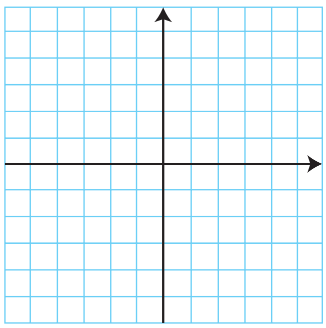
a) $y = 2/x$

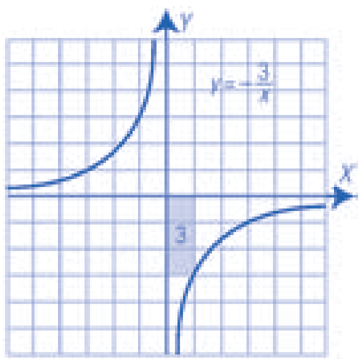




$k = 2 > 0 \Rightarrow$ Decreciente

b) $y = -3/x$





$k = -3 < 0 \Rightarrow$ Creciente

3. Halla las ecuaciones de las siguientes funciones definidas verbalmente. ¿De qué tipo son?

a) Doce personas tardan un día en recoger las patatas de una finca. Obtén el tiempo que se tarda en función del número de personas.

$y = 12/x \Rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

b) Un vehículo hace un trayecto de 400 km a velocidad constante. Obtén el tiempo del trayecto en función de la velocidad.

$t = 400/v \Rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 9 ▮ Ficha 5
Funciones de proporcionalidad inversa (II)

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Si una **función de proporcionalidad inversa** está dada por una tabla, para hallar k hay que tener en cuenta que:

$$\boldsymbol{y = \frac{k}{x}} \text{ es equivalente a } \boldsymbol{xy = k}$$

Luego k es igual a cualquier valor de x multiplicado por el valor correspondiente de y.

1. Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por una tabla de valores. ¿Qué tipo de funciones son? Indica si son crecientes o decrecientes.

x	1	–1	3	–3	9	–9
y	–9	9	–3	3	–1	1

$y = -9/x \Rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.
$k = -9 < 0 \Rightarrow$ Creciente.

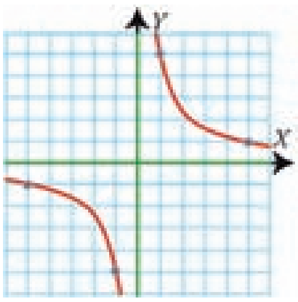
x	1/2	–1/2	1	–1	2	–2
y	2	–2	1	–1	1/2	–1/2

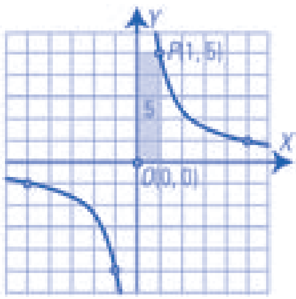
$xy = 1 \Rightarrow y = 1/x \Rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa. $k = 1 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.

Dada la **gráfica** de una función de proporcionalidad inversa, para calcular ***k*** se hallan las coordenadas de un punto cualquiera de la hipérbola y se multiplica el valor de la abscisa ***x*** por el valor correspondiente de la ordenada ***y***. El mejor punto es el primero en el que la abscisa sea positiva y entera, y la ordenada sea entera.

2. Halla las ecuaciones de las siguientes hipérbolas:

a)



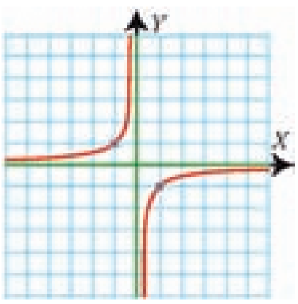


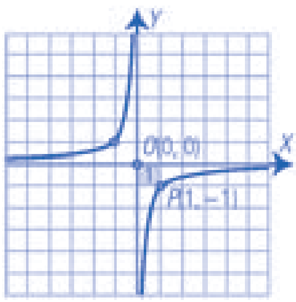
El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(1, 5)$ y el punto de corte de las asíntotas, $O(0, 0)$ tiene de área 5.

Como la hipérbola es decreciente:

$k = 5 \Rightarrow y = 5/x$

b)





El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(1, -1)$ y el punto de corte de las asíntotas, $O(0, 0)$ tiene de área 1.

Como la hipérbola es creciente:

$k = -1 \Rightarrow y = -1/x$

Bruño

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

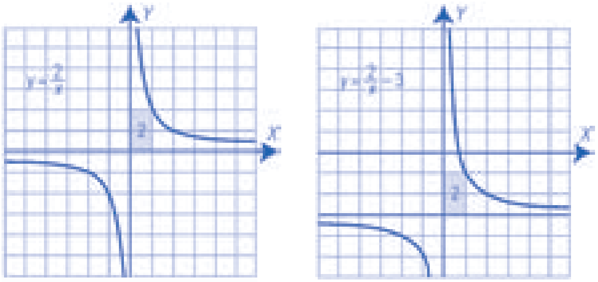
La ecuación que se obtiene al hacer una **traslación vertical de *r* unidades** es $y = \dfrac{k}{x} + r$

Si r es positiva, $r > 0$, la traslación es hacia arriba; si es negativa, $r < 0$, es hacia abajo.

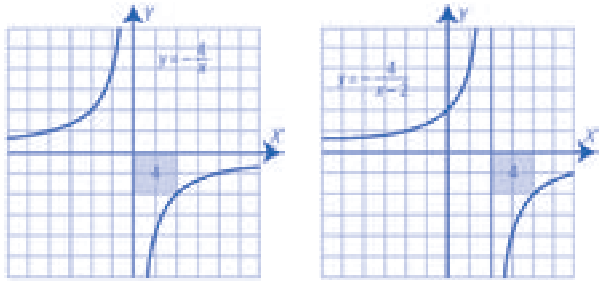
La ecuación que se obtiene al hacer una traslación horizontal de s unidades es $y = \dfrac{k}{x - s}$

Si s es positiva, $s > 0$, la traslación es hacia la derecha; si es negativa, $s < 0$, es hacia la izquierda.

1. Dibuja la hipérbola $y = 2/x$, trasládala 3 unidades hacia abajo y halla su nueva ecuación.



2. Dibuja la hipérbola $y = -4/x$, trasládala 2 unidades hacia la derecha y halla su nueva ecuación.

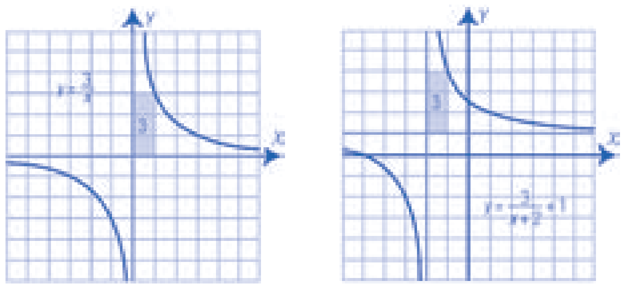


La ecuación que se obtiene al hacer una **traslación vertical de *r* unidades y una traslación horizontal de *s* unidades** es $y = \dfrac{k}{x - s} = r$

Si r es positiva, $r > 0$, la traslación es hacia arriba; si es negativa, $r < 0$, es hacia abajo.

Si s es positiva, $s > 0$, la traslación es hacia la derecha; si es negativa, $s < 0$, es hacia la izquierda.

3. Dibuja la hipérbola $y = 3/x$, trasládala 1 unidad hacia arriba y 2 hacia la izquierda, halla su nueva ecuación.



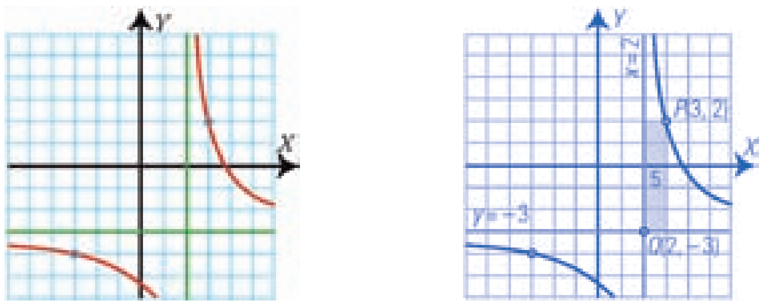
Para hallarla la ecuación

$$\boldsymbol{y = \frac{k}{x - s} + r}$$

k es el área del rectángulo formado entre un punto cualquiera de la hipérbola, $P(x, y)$, y el punto de corte de las asíntotas. La constante k es positiva si la hipérbola es decreciente, y es negativa si la hipérbola es creciente.

Para hallar r y s se hallan las ecuaciones de las asíntotas, $\boldsymbol{y = r, x = s}$.

4. Halla la ecuación de la siguiente hipérbola:



El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(3, 2)$ y el punto de corte de las asíntotas, $Q(2, -3)$, tiene de área 5.

Como la hipérbola es decreciente $\Rightarrow$ $k = 5$ y las ecuaciones de las asíntotas son: $y = -3 \Rightarrow r = -3$ $\quad x = 2 \Rightarrow s = 2$ $\quad \Rightarrow$

La ecuación es: $y = \dfrac{5}{x - 2} - 3$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 9 ▮ Evaluación Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Halla la ecuación de la siguiente función definida por una tabla de valores y clasifica esta:

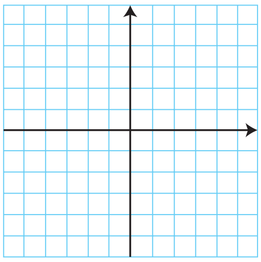
x	1	–2	5	–10
y	–0,5	1	–2,5	5

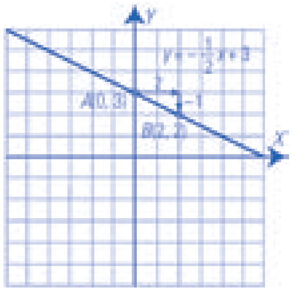
$m = -0{,}5$ $\quad y = -x/2$

Es una función de proporcionalidad directa.

2. Dibuja la gráfica de la función afín y halla la pendiente y la ordenada en el origen. Indica si es creciente o decreciente.

$y = -x/2 + 3$





Pendiente: $m = -1/2 < 0$

Función decreciente.

Ordenada en el origen: $b = 3$

3. Halla la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(4, -5)$.

Pendiente: $A(-1, 2), B(2, -3) \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{-3-2}{2-(-1)} = -\dfrac{5}{3}$

Punto: $A(-1, 2) \quad y - 2 = -\dfrac{5}{3}(x+1) \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{1}{3}$

4. Halla mentalmente la constante de proporcionalidad inversa de las siguientes funciones y di si son crecientes o decrecientes:

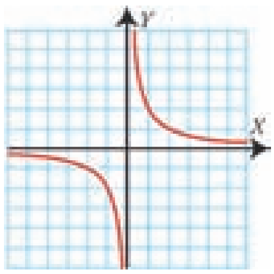
a) $y = 5/x$ $\quad k = 5 > 0 \Rightarrow$ Decreciente

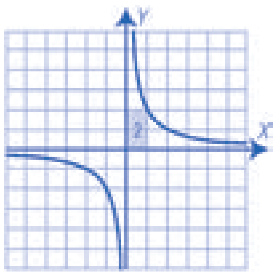
b) $y = -7/x$ $\quad k = -7 < 0 \Rightarrow$ Creciente

c) $y = -1/x$ $\quad k = -1 < 0 \Rightarrow$ Creciente

d) $y = 1/x$ $\quad k = 1 > 0 \Rightarrow$ Decreciente

5. Halla la ecuación de la siguiente hipérbola:

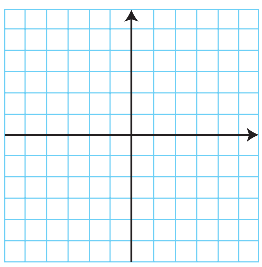


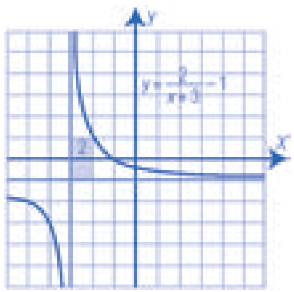


$k = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2/x$

6. Dibuja la siguiente hipérbola:

$$y = \frac{2}{x+3} - 1$$





OBJETIVOS

a. Identificar y dibujar un lugar geométrico sencillo.
b. Determinar la relación de los ángulos formados con dos rectas paralelas cortadas por una secante.
c. Identificar y conocer la relación entre ángulos de lados paralelos y de lados perpendiculares.
d. Calcular la amplitud de los ángulos de un polígono regular.
e. Construir figuras semejantes.
f. Conocer y usar el teorema de Thales.
g. Dividir un segmento en partes proporcionales.
h. Identificar triángulos en posición de Thales.
i. Conocer y usar el teorema de Pitágoras.
j. Conocer y usar las fórmulas que permiten calcular las áreas de los polígonos.
k. Conocer y usar la fórmula que permite calcular la longitud de una circunferencia y de un arco de circunferencia.
l. Conocer y usar la fórmula que permite calcular el área de un círculo, un sector circular y una corona circular.
m. Calcular perímetros y áreas de figuras compuestas.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos sobre lugares geométricos y formas geométricas para interpretar formas sencillas observables en el mundo natural.

Competencia cultural y artística

- Valorar el conocimiento geométrico como instrumento artístico.

CONTENIDOS

Conceptos

- Lugar geométrico.
- Ángulos complementarios y suplementarios.
- Ángulos opuestos por el vértice.
- Figuras semejantes.
- Teorema de Thales.
- Triángulos en posición de Thales.
- Teorema de Pitágoras.
- Perímetro. Semiperímetro.
- Área.
- Forma geométrica compuesta.

Procedimientos

- Utilización del vocabulario adecuado para interpretar y transmitir informaciones sobre elementos geométricos, semejanza, perímetros y áreas.
- Expresión de las medidas efectuadas en las unidades y con la precisión adecuada a la situación y al instrumento utilizado.
- Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en polígonos y figuras semejantes.

Actitudes

- Reconocimiento y valoración de la utilidad de la geometría para conocer y resolver diferentes situaciones relativas al entorno físico.
- Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.
- Flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Identifica un lugar geométrico sencillo como la mediatriz o la bisectriz.
b.1. Determina la relación de los ángulos formados con dos rectas paralelas cortadas por una secante.
c.1. Identifica y conoce la relación entre ángulos de lados paralelos y de lados perpendiculares.
d.1. Calcula la amplitud de los ángulos de un polígono regular.
e.1. Dibuja figuras semejantes a una dada.
f.1. Conoce y usa el teorema de Thales.
g.1. Divide un segmento en partes proporcionales.
h.1. Identifica triángulos en posición de Thales.
i.1. Resuelve problemas geométricos utilizando el teorema de Pitágoras.
j.1. Calcula el perímetro y el área de un triángulo, un cuadrado, un rectángulo, un rombo, un romboide, un trapecio y un polígono regular.
k.1. Calcula la longitud de una circunferencia y de un arco de circunferencia.
l.1. Calcula el área de un círculo, un sector circular y una corona circular.
m.1. Calcula perímetros y áreas de figuras compuestas

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 10 ▮ Ficha 1
Lugares geométricos y ángulos (I)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos que verifica una determinada propiedad.

Por ejemplo: La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos.

1. Define circunferencia como un lugar geométrico.

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan o están a igual distancia de un punto fijo llamado centro.

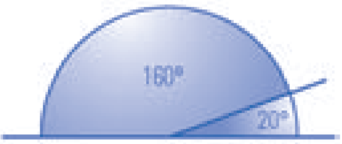
Dos ángulos son **complementarios** si entre los dos suman 90°, es decir, un ángulo recto.

Dos ángulos son **suplementarios** si entre los dos suman 180°, es decir, un ángulo llano.

Los **ángulos que forman una recta secante que corta a otras paralelas** son iguales o suplementarios.

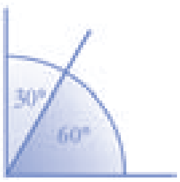
Los ángulos opuestos por el vértice son iguales y los ángulos adyacentes son suplementarios.

2. Dibuja un ángulo de 20° y su suplementario. ¿Cuánto vale?



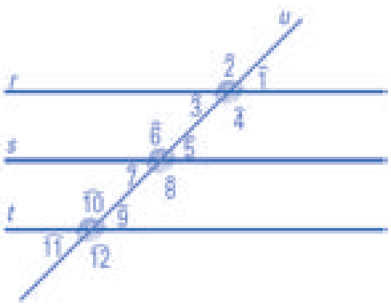
Vale 180° – 20° = 160°

3. Dibuja un ángulo de 60° y su complementario. ¿Cuánto vale?



Vale 90° – 60° = 30°

4. Dibuja tres rectas paralelas cortadas por una secante e indica cuáles de los ángulos que se forman son iguales.



$\hat{1} = \hat{3} = \hat{5} = \hat{7} = \hat{9} = \widehat{11}$

$\hat{2} = \hat{4} = \hat{6} = \hat{8} = \widehat{10} = \widehat{12}$

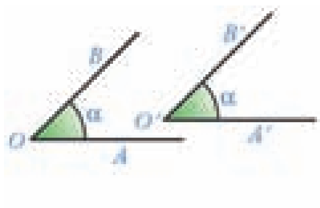
Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 10 ▮ Ficha 2
Lugares geométricos y ángulos (II)

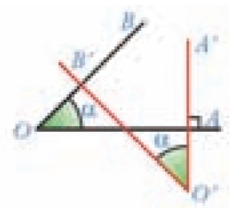
Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

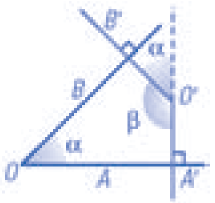
Si dos **ángulos** tienen los **lados paralelos,** son **iguales** o **suplementarios.**

Si dos ángulos tienen los **lados perpendiculares,** son **iguales.**

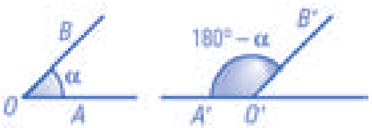




1. Dibuja dos ángulos de lados perpendiculares y que sean suplementarios.



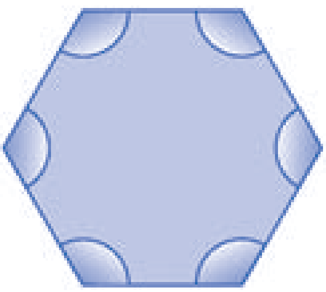
2. Dibuja dos ángulos de lados paralelos y que sean suplementarios.



La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

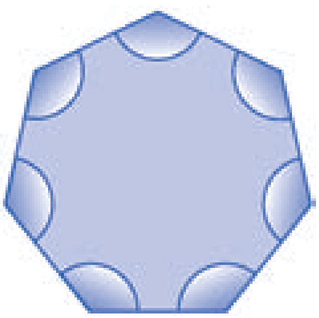
La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual a tantos llanos como lados tenga menos dos: $S = (n - 2) \cdot 180°$

3. Dibuja un hexágono y todos sus ángulos. ¿Cuánto suman entre todos ellos?



$S = (n - 2) \cdot 180°$
$S = (6 - 2) \cdot 180° = 4 \cdot 180° = 720°$

4. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de un heptágono regular?



$S = (n - 2) \cdot 180°$
$S = (7 - 2) \cdot 180° = 5 \cdot 180° = 900°$
Cada uno de los siete ángulos mide
$900° : 7 = 128°\ 34'\ 17''$

Bruño

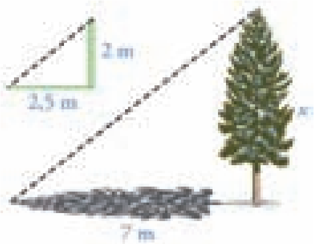
Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

El teorema de Thales dice: si dos rectas *r* y s se cortan por rectas paralelas *a*, *b*, *c*…, los segmentos que se determinan sobre las rectas *r* y *s* son proporcionales.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{bc} = k$$

A′, *B′*, *C′* se llaman los homólogos de los puntos *A*, *B*, *C* y *k* es la razón de semejanza.

En la vida real, en multitud de ocasiones, se puede aplicar el teorema de Thales para el cálculo de distancias cuando uno de los extremos es inaccesible; por ejemplo, medir la altura de un árbol.



1. Calcula la altura de un molino eólico, sabiendo que su sombra mide 25 m y que en ese mismo instante un objeto de 1,5 m proyecta una sombra de 1,2 m.

Se aplica el teorema de Thales.

$$\frac{\text{Sombra del objeto}}{\text{Altura del objeto}} = \frac{\text{Sombra del molino}}{\text{Altura del molino}}$$

$$\frac{1{,}2}{1{,}5} = \frac{25}{x} \Rightarrow x \; \frac{1{,}5 \cdot 25}{1{,}2} = 31{,}25 \text{ m}$$

Dos **triángulos están en posición de Thales** si tienen un ángulo común y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos.

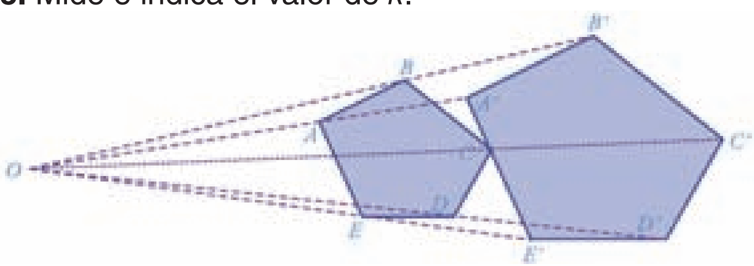
Dos triángulos en posición de Thales son semejantes si los ángulos son iguales y los lados correspondientes son proporcionales. Dos **polígonos son semejantes** si los ángulos son iguales, y los lados, proporcionales.

Para dibujar polígonos semejantes Se toma un punto cualquiera *O*, se une con cada vértice y se prolonga de forma que $OA' = k \cdot OA$

2. Dos triángulos están en posición de Thales y sabemos que $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm y $AB' = 4$ cm. Calcula cuánto mide AC'.

$$x = \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{AC'}{3} \Rightarrow AC' \; \frac{4 \cdot 3}{5} = 2{,}4 \text{ cm}$$

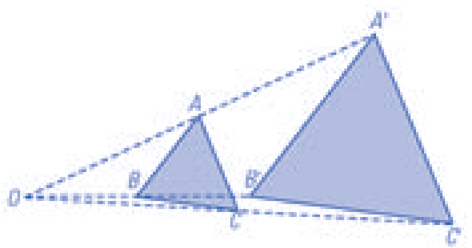
3. Mide e indica el valor de *k*.



$OA' = 1{,}5 \cdot OA$

$K = 1{,}5$

4. Dibuja un triángulo equilátero de 1,5 cm de lado.
Dibuja otro semejante de razón de semejanza dos.



Bruño

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ________

El **teorema de Pitágoras** dice que, en un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$

Una **terna pitagórica** son tres números enteros que verifican el teorema de Pitágoras. Así, dados tres números, forman un triángulo acutángulo, rectángulo u obtusángulo si el cuadrado del lado mayor es respectivamente menor, igual o mayor a la suma de los cuadrados de los otros dos.

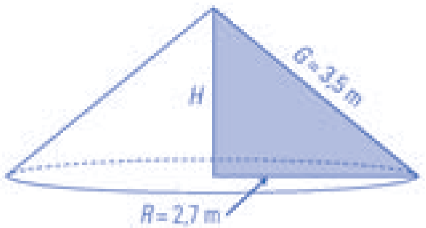
1. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que los catetos miden 12,5 cm y 14,7 cm.

$a^2 + b^2 = c^2 \;\Rightarrow\; 12{,}2^2 + 14{,}7^2 = 371{,}34 \;\Rightarrow\; c = 19{,}30$ cm

2. Los lados de un triángulo miden 4 m, 5 m y 6 m. ¿Qué clase de triángulo es?

$6^2 = 36$
42 + 52 = 16 + 25 = 41
Como 62 < 42 + 52 $\Rightarrow$ El triángulo es acutángulo.

3. Halla la altura de un cono en el que el radio de la base mide 2,7 m y la generatriz, 3,5 m



$R^2 + H^2 = G^2 \;\Rightarrow\; 2{,}72 + H^2 = 3{,}52 \;\Rightarrow\; H^2 = 4{,}96$

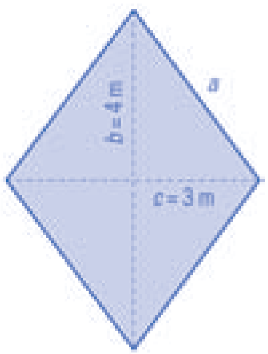
$H = \sqrt{4{,}96} = 2{,}23$ m.

4. Halla el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 8 m y 6 m.

$a^2 + b^2 + c^2$

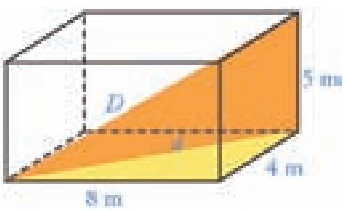
$a^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \;\Rightarrow\; c^2 = \sqrt{25} = 5$ m

Perímetro del rombo $4 \cdot 5 = 20$ m.

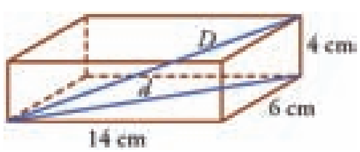


El **teorema de Pitágoras en el espacio** dice que en un ortoedro la diagonal al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de las aristas:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



5. Calcula la diagonal del ortoedro de la figura:



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

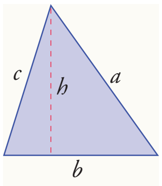
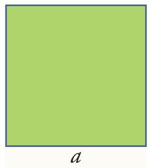
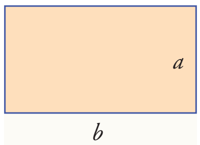
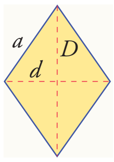
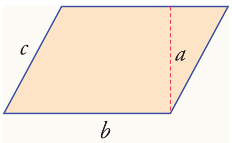
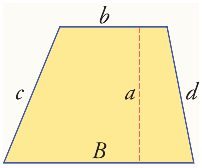
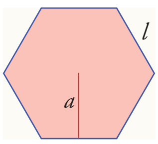
$D^2 = 14^2 + 6^2 + 4^2 = 196 + 36 + 16 = 248$

$D = \sqrt{248} = 15{,}75$ cm

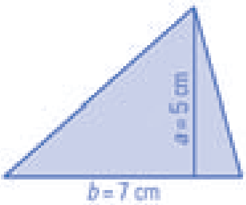
Áreas de figuras planas (I)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

	Dibujo	Perímetro/Área
Triángulo		$P = a + b + c$ $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$
Cuadrado		$P = 4a$ $A = a^2$
Rectángulo		$P = 2(b + a)$ $A = b \cdot a$
Rombo		$P = 4a$ $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$
Romboide		$P = 2(b + c)$ $A = b \cdot a$
Trapecio		$P = B + c + b + d$ $A = \dfrac{B + b}{2} \cdot a$
Polígono regular		$P = nl$ n = n.º de lados $A = \dfrac{P \cdot a}{2}$

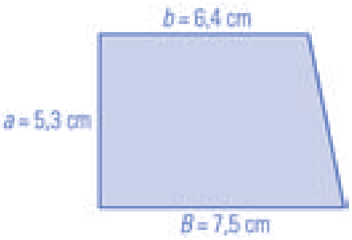
1. Calcula mentalmente el área de un triángulo cuya base mide 7 cm y cuya altura es de 5 cm.



$$A = \frac{b \cdot a}{2} \Rightarrow A = \frac{7 \cdot 5}{2}$$

$$A = 17{,}6 \text{ cm}^2$$

2. Calcula el área de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 7,5 cm y 6,4 cm, y el lado perpendicular a las bases mide 5,3 cm.



$$A = \frac{B \cdot b}{2} \cdot a$$

$$A = \frac{7{,}5 + 6{,}4}{2} \cdot 5{,}3$$

$$A = 36{,}84 \text{ cm}^2$$

3. Calcula mentalmente el área de un rectángulo que mide la mitad de alto que de largo y cuya altura es de 5 m.

$$A = b \cdot a$$

$$A = 10 \cdot 5 = 50 \text{ m}^2$$

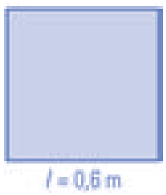
4. Calcula el área del siguiente pentágono:

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$A = \frac{5 \cdot 2{,}33 \cdot 1{,}6}{6}$$

$$A = 9{,}32 \text{ cm}^2$$

5. Calcula mentalmente el área de un cuadrado cuyo lado mide 0,6 m.

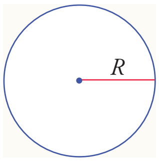
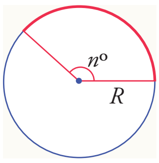
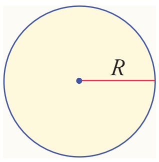
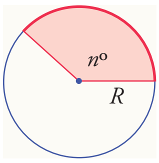
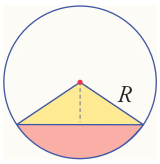
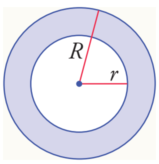
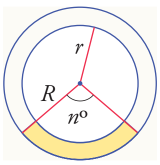


$$A = l^2$$

$$A = 0{,}6^2 = 0{,}36 \text{ m}^2$$

Áreas de figuras planas (II)

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

	Dibujo	Longitud/Área
Circunferencia		$L = 2\pi R$
Arco		$L_{\text{Arco}} = \dfrac{2\pi R}{360°} \cdot n°$
Círculo		$A = \pi R^2$
Sector circular		$A_{\text{Sector}} = \dfrac{\pi R^2}{360°} \cdot n°$
Segmento circular		$A_{\text{Segmento}} = A_{\text{Sector}} - A_{\text{Triángulo}}$
Corona circular		$A_{\text{Corona}} = \pi\left(R^2 - r^2\right)$
Trapecio circular		$A_{\text{Trapecio circular}} = \dfrac{\pi\left(R^2 - r^2\right)}{360°} \cdot n°$

1. Calcula el área de un círculo cuyo radio mide 7,23 m.

Área:

$A = \pi R^2$

$A = \pi \cdot 7{,}23^2 = 164{,}22 \text{ m}^2$

2. Calcula el área de una corona circular cuyos radios miden: R = 6,7 m y r = 5,5 m.

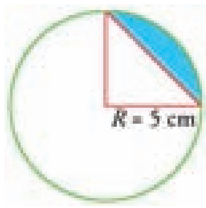
Área:

$A = \pi(R^2 - r^2)$

$A = \pi(6{,}7^2 - 5{,}5^2)$

$A = 45{,}99 \text{ m}^2$

3. Calcula el área del segmento circular coloreado de azul en la siguiente figura:



Área:

$A_{\text{segmento}} = A_{\text{sector}} - A_{\text{triángulo}}$

$A_{\text{segmento}} = \dfrac{\pi R^2}{360°} \cdot n° - \dfrac{b \cdot a}{2}$

$A = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{360°} \cdot 90° - \dfrac{5 \cdot 5}{2} = 7{,}13 \text{ m}^2$

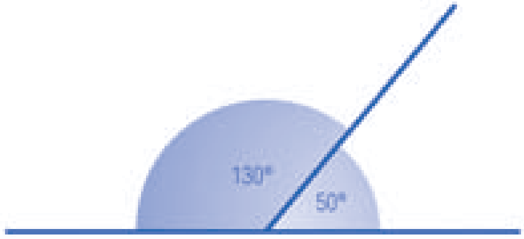
4. Calcula el radio de una circunferencia que mide 37,5 m de longitud.

$L = 2\pi R \;\Rightarrow\; 2\pi R = 37{,}5 \;\Rightarrow\; R = \dfrac{37{,}5}{2\pi} = 5{,}97 \text{ m}$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 10 ▮ Evaluación Bruño

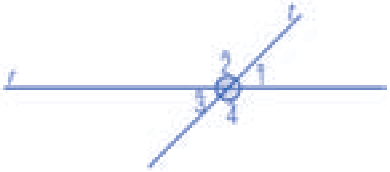
Nombre ______________________ Curso ________ Fecha __________

1. Dibuja un ángulo de 50° y su suplementario. ¿Cuánto vale?



Vale 180° – 50° = 130°

2. Dibuja dos rectas secantes y los ángulos que forman, di cuáles son iguales y cuáles suplementarios.



Cada uno de los impares es suplementario de cada uno de los pares.

$\hat{1} = \hat{3}$ y $\hat{2} = \hat{4}$

3. Calcula la altura de las torres de Hércules en Los Barrios (Cádiz), sabiendo que su sombra mide 42 m y que en ese mismo instante una persona de 1,74 m proyecta una sombra de 58 cm.

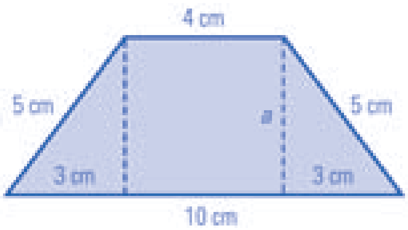
$$\frac{0{,}58}{1{,}74} = \frac{42}{x} \Rightarrow x = \frac{1{,}74 \cdot 42}{5} = 126 \text{ cm}$$

4. Halla todas las ternas pitagóricas en las que los tres números sean menores o iguales que 10.

3, 4 y 5 $\Rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + 16 = 25$

6, 8 y 10 $\Rightarrow 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow 36 + 64 = 100$

5. Calcula el área de un trapecio isósceles en el que las bases miden 10 cm y 4 cm, y los otros dos lados tienen 5 cm cada uno.

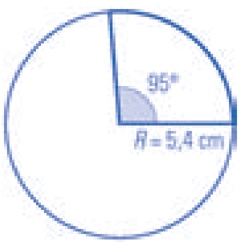


$$a = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot a$$

$$A = \frac{10 + 4}{2} \cdot 4 = 28 \text{ m}^2$$

6. Calcula la longitud de un arco cuyo radio mide 5,4 cm y cuya amplitud es de 95°.



$$L = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot n° \qquad L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5{,}4}{360°} \cdot 95° = 8{,}95 \text{ m}$$

OBJETIVOS

a. Hacer una traslación de un vector dado. Hacer la composición de dos traslaciones.
b. Calcular el centro de giro observando un giro dibujado.
c. Identificar figuras planas con centro de giro.
d. Identificar figuras planas con centro de simetría.
e. Identificar figuras planas con eje de simetría.
f. Reconocer frisos y mosaicos regulares y semirregulares.
g. Identificar cuerpos con planos de simetría y ejes de simetría.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos sobre transformaciones geométricas para interpretar formas sencillas observables en el mundo natural.

Competencia cultural y artística

- Valorar el conocimiento geométrico como instrumento artístico.

Autonomía e iniciativa personal

- Poner en práctica modelos sobre distintas técnicas de dibujo y representación.

CONTENIDOS

Conceptos

- Vector. Módulo, dirección sentido.
- Suma de vectores.
- Traslación, giro y simetría axial y central.
- Composición de dos traslaciones.
- Composición de dos simetrías de ejes paralelos.
- Friso.
- Mosaico.
- Plano de simetría de un cuerpo.
- Eje de simetría de un cuerpo.

Procedimientos

- Utilización de la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas.
- Utilización de los sistemas de referencia para situar y localizar un objeto.
- Uso diestro de los instrumentos de dibujo habituales.
- Construcción de figuras planas utilizando la escala, los instrumentos, los materiales y las técnicas adecuados a cada caso.
- Identificación de figuras mediante un movimiento: traslación, giro o simetría.
- Elección de las formas o configuraciones geométricas que se ajustan mejor a unas condiciones dadas.
- Formulación y comprobación de conjeturas acerca de propiedades geométricas en cuerpos y figuras y de la solución de problemas geométricos en general.

Actitudes

- Reconocimiento y valoración de la utilidad de la geometría para conocer y resolver diferentes situaciones relativas al entorno físico.
- Reconocimiento y valoración de las relaciones entre diferentes conceptos, como la forma y el tamaño de los objetos, y entre los métodos y lenguajes matemáticos que permiten tratarlos.
- Interés y gusto por la descripción verbal precisa de formas y características geométricas.
- Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.
- Flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.
- Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas geométricos distintas de las propias.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Utiliza los conceptos, procedimientos y terminología de los vectores y las isometrías con propiedad.
b.1. Halla el centro de giro en un giro dibujado.
c.1. Identifica figuras planas con centro de giro.
d.1. Identifica figuras planas con centro de simetría.
e.1. Identifica figuras planas con ejes de simetría.
f.1. Reconoce frisos y mosaicos regulares y semirregulares.
g.1. Identifica y dibuja ejes de simetría y planos de simetría en cuerpos sencillos.

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 11 ▮ Ficha 1
Vectores y traslaciones (I)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

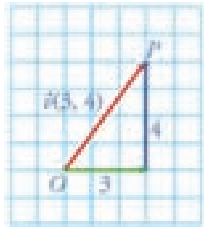
Un vector es un segmento orientado.

Las características de un vector son las siguientes:

a) **Módulo:** la longitud del vector. Se representa por $|\vec{v}|$

b) **Dirección:** la definida por la recta que lo contiene.

c) **Sentido:** el indicado por la punta de la flecha.



$|\vec{v}|$ se calcula aplicando el teorema de Pitágoras:

$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{25} = 5$ Unid.

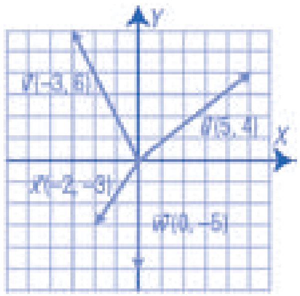
1. Dibuja unos ejes coordenados y representa en ellos los siguientes vectores de forma que el origen de cada vector sea el origen de coordenadas:

a) $\vec{u}(5, 4)$

b $\vec{v}(-3, 6)$

c) $\vec{w}(0, -5)$

d) $\vec{x}(-2, -3)$



2. Calcula $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$ y $|\vec{x}|$, del ejercicio 1.

$|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6{,}40$ unidades

$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = 6{,}70$ unidades

$|\vec{w}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$ unidades

$|\vec{x}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = 3{,}60$ unidades

Podemos sumar vectores de forma analítica y geométrica.

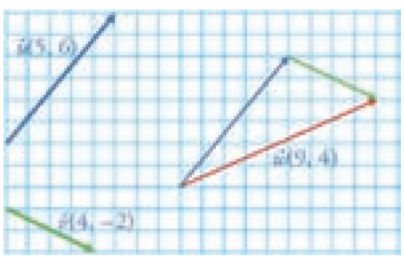
a) Para **sumar vectores de forma analítica,** estos se suman componente a componente.

b) Para **sumar vectores de forma geométrica,** se dibuja el segundo vector de forma que su origen coincida con el extremo del primero. El vector suma se obtiene uniendo el origen del primero con el extremo del segundo.

a) Analíticamente:

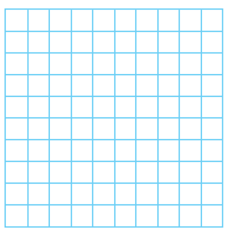
$$\begin{array}{r} \vec{u}(5, \ \ 6) \\ \vec{v}(4, -2) \\ \hline \vec{w}(9, \ \ 4) \end{array}$$

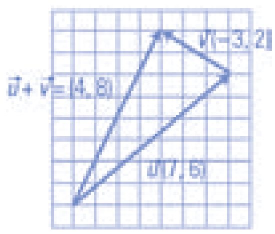
b) Geométricamente:



3. Suma de forma analítica y geométrica los vectores $\vec{u}(7, 6)$ y $\vec{v}(-3, 2)$.

$\vec{u} + \vec{v} = (4, 8)$





4. Suma de forma analítica y geométrica los vectores $\vec{u}(-5, 3)$ y $\vec{v}(3, -7)$.

$\vec{u} + \vec{v} = (-2, -4)$

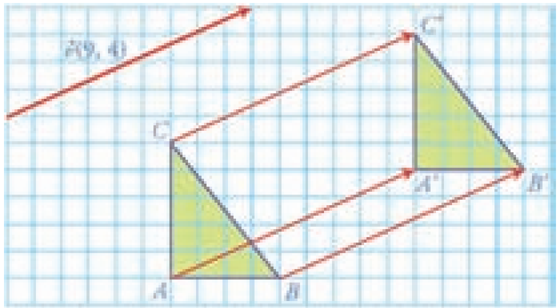
Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 11 ▮ Ficha 2
Vectores y traslaciones (II)

Bruño

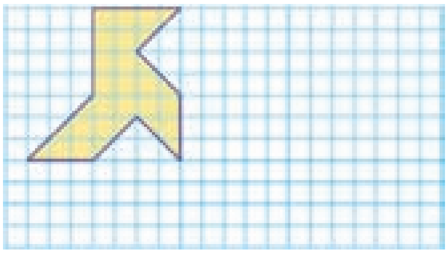
Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

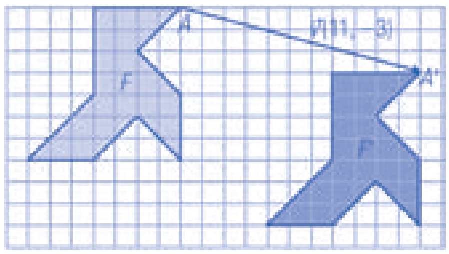
Una **traslación de vector $\vec{v}$** es un movimiento directo que lleva cada punto *A* a otro *A′* de forma que el vector $\overrightarrow{AA'}$ tiene el mismo módulo, dirección y sentido que el $\vec{v}$

Se traslada la figura 9 unidades a la derecha y 4 hacia arriba.



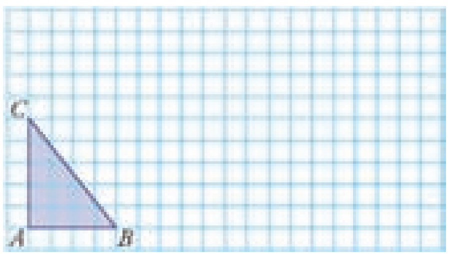
1. Dada la pajarita del dibujo, trasládala según el vector $\vec{v}$ (11, –3).



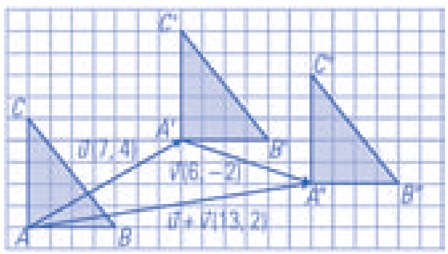


La **composición de dos traslaciones** de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otra traslación de vector $\vec{w}$ suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

2. Halla la composición de las traslaciones de vectores $\vec{u}$(7, 4) y $\vec{v}$ (6, –2) y escribe el vector correspondiente. Después aplica la traslación resultante al triángulo del dibujo.



$\vec{u} + \vec{v} = (13, 2)$



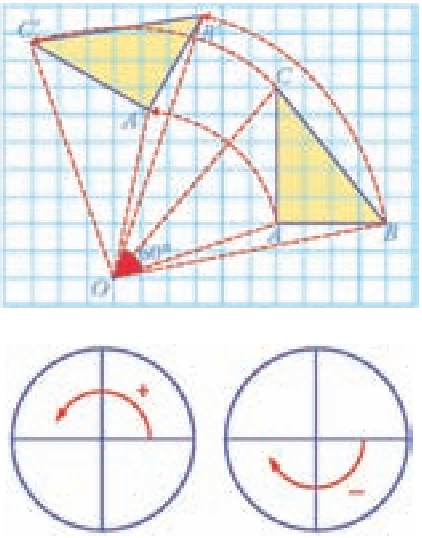
Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 11 ▮ Ficha 3
Giros y simetría central

Bruño

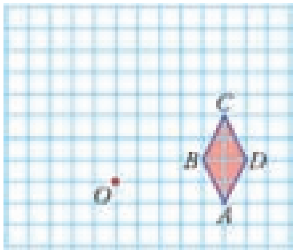
Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

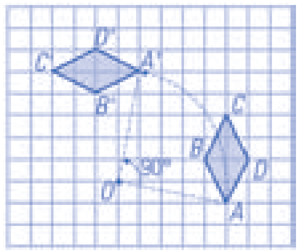
Un **giro o rotación de centro *O* y ángulo α** es un movimiento directo que hace corresponder a un punto *A* otro *A′* de forma que: ***OA* = *OA′*** y ***AOA′* = α** y se representa por ***g* (*O*, α)**.

Un giro es positivo cuando va en sentido contrario de las agujas del reloj, y es negativo cuando va en el mismo sentido.

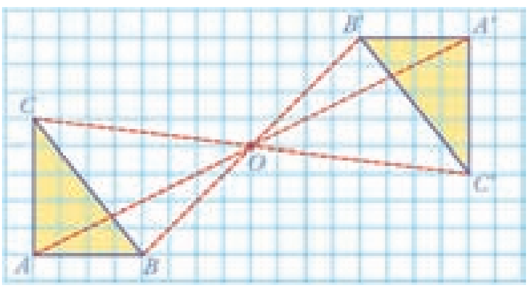


1. Aplica al rombo de la figura un giro de 90° respecto del centro *O*.



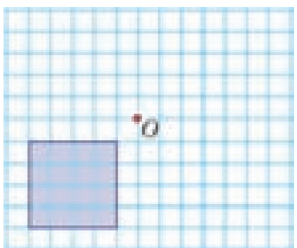


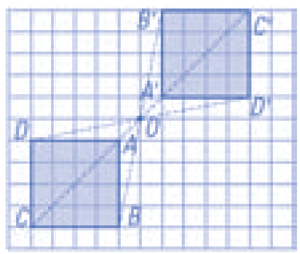
Una **simetría central de centro *O*** es un movimiento directo que hace corresponder a un punto *A* otro *A′* de forma que *OA* = *OA′* y, además, *A*, *O* y *A′* están en la misma recta. *A* y *A′* están uno a cada lado del centro *O* y a igual distancia de él.



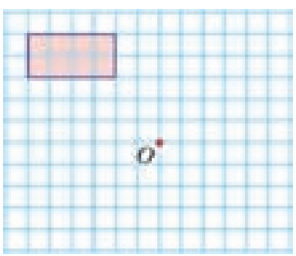
Una simetría central es un giro de centro *O* y ángulo 180°: *g* (*O*, 180°).

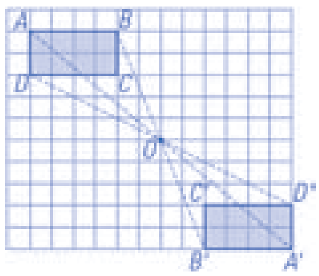
2. Aplica al cuadrado de la figura una simetría central de centro el punto *O.*





3. Aplica al rectángulo de la figura siguiente una simetría central de centro el punto *O*:





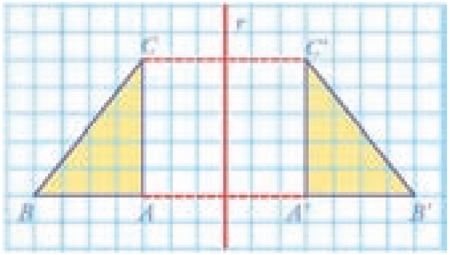
Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 11 ▮ Ficha 4
Simetría axial. Frisos y mosaicos (I)

Nombre ____ Curso ________ Fecha ______________

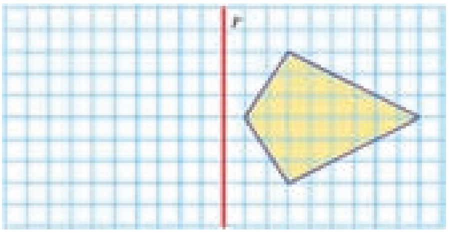
Una **simetría axial de eje *r*** es un movimiento inverso que lleva cada punto *A* a otro *A′* de forma que la recta r es la mediatriz del segmento *AA′*.

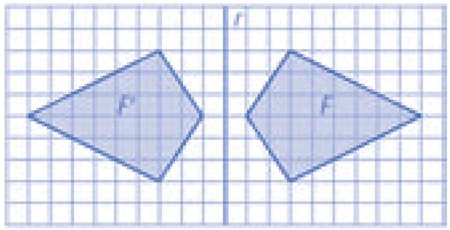
Para hallar el simétrico de un punto *A* respecto de la recta *r*, se traza una perpendicular a la recta *r* por el punto *A*.

El punto *A′* se encontrará a igual distancia que el punto *A* de *r*, pero al otro lado de la recta.

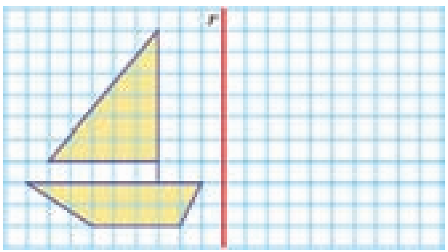


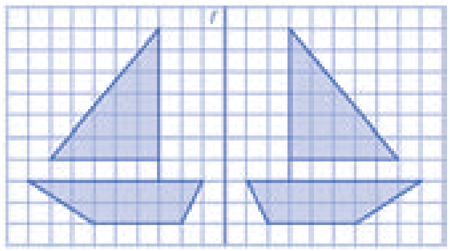
1. Dibuja la cometa simétrica de la del dibujo respecto del eje *r*.



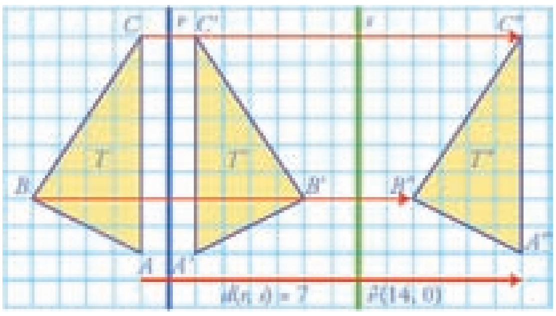


2. Halla el simétrico del barco respecto del eje *r*.

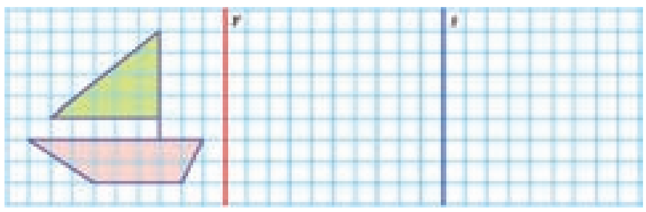


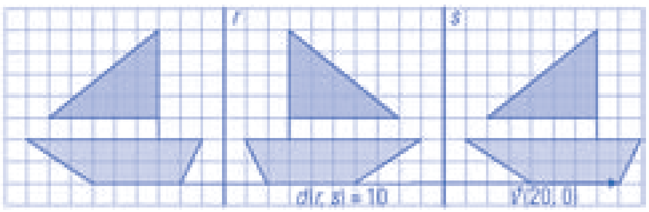


La **composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos** es una traslación cuyo vector tiene por módulo el doble de la distancia que hay entre los dos ejes, dirección perpendicular a los ejes y sentido desde el primer eje al segundo.



3. Dibuja el simétrico del barco respecto de la recta *r*, y después el simétrico del obtenido respecto de la recta *s*. ¿A qué movimiento corresponde la composición de las dos simetrías?

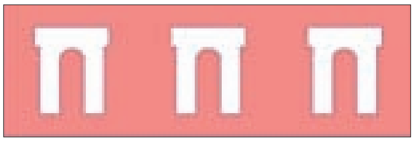




Simetría axial. Frisos y mosaicos (II)

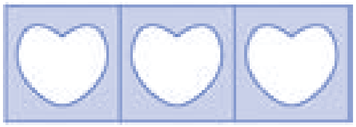
Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ______

Un **friso** es un rectángulo decorado al que se le aplica reiteradamente una traslación.



1. Dibuja un friso.

Solución abierta, por ejemplo:



Un **mosaico** está formado por un conjunto de figuras que recubren el plano mediante traslaciones.

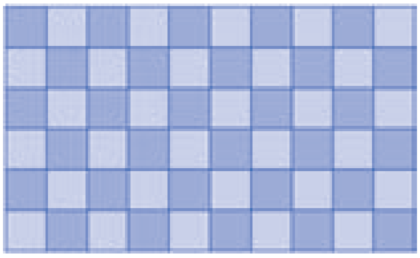
Un **mosaico** se llama **regular** si está generado por un polígono regular.

Los únicos polígonos regulares que recubren el plano son: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular.

Un **mosaico** se llama **semirregular** si está compuesto por dos o más polígonos regulares.

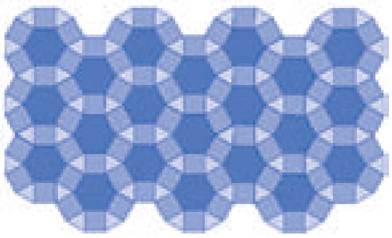
2. Dibuja un mosaico regular.

Solución abierta, por ejemplo:



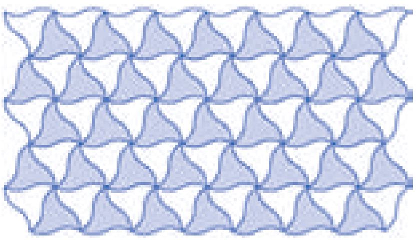
3. Dibuja un mosaico semirregular.

Solución abierta, por ejemplo:



4. Dibuja un mosaico que no sea regular ni semirregular.

Solución abierta, por ejemplo:

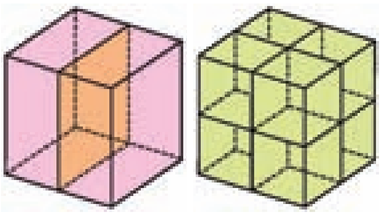


Planos y ejes de simetría

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

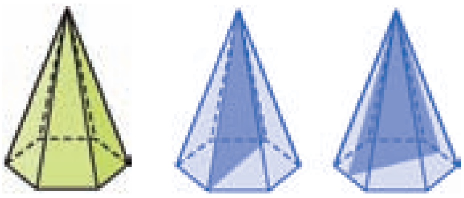
Un plano de simetría de un poliedro o un cuerpo redondo es aquel que lo divide en dos mitades simétricas. Es decir, el plano es como un espejo en el que se dibuja una parte especular (reflejada) de la otra.

Ejemplo: Si en un cubo se traza un plano que pasa por el punto medio de una arista y es paralelo a dos caras opuestas, se obtiene un plano de simetría.



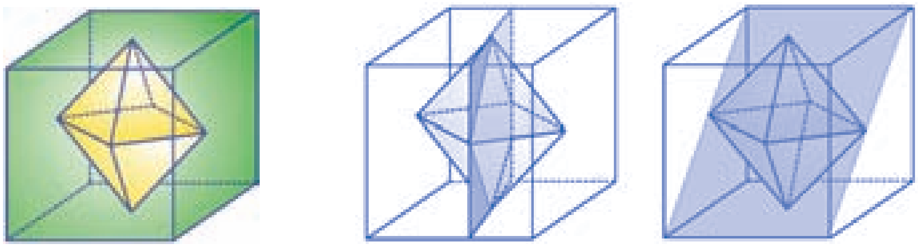
De esta forma se pueden obtener tres planos de simetría.

1. Dibuja una pirámide hexagonal regular. ¿Cuántos planos de simetría tiene?



Tiene tantos planos como ejes de simetría tiene la base. Como la base tiene 6 ejes de simetría, la pirámide tiene 6 planos que contiene a un eje de simetría que va de la base al vértice de la pirámide.

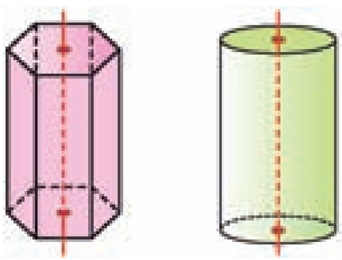
2. El cubo y el octaedro son dos poliedros duales. Teniendo esto en cuenta, ¿cuántos planos de simetría tiene el octaedro?



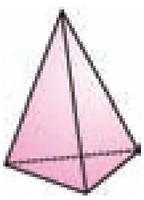
Como el octaedro y cubo son duales, ambos tienen el mismo número de planos. Hay tres planos que son paralelos a dos caras opuestas del cubo y que pasan por las aristas del octaedro.

Hay seis planos que pasan por las diagonales de dos caras opuestas del cubo y por el punto medio de una arista del octaedro y contiene a otra.

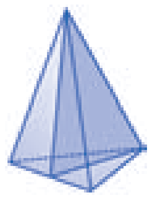
Un **eje de simetría de un cuerpo** es una recta tal que si se gira el cuerpo alrededor de dicha recta, antes de dar una vuelta completa, este aparece con el mismo aspecto que en la posición inicial.



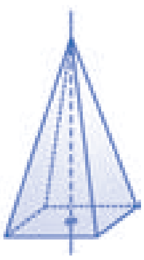
3. ¿Cuántos planos de simetría tiene el siguiente tetraedro?



Tiene seis planos de simetría que pasan por una arista y el punto medio de otra arista, como el dibujo siguiente:



4. Dibuja una pirámide de base cuadrada, marca su eje de simetría e indica la amplitud de los giros que dejan al cuerpo con el mismo aspecto.

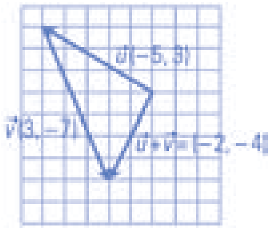


En la pirámide cuadrangular el eje pasa por el centro de la base. Un giro de 90°, 180° y 270° deja la pirámide con el mismo aspecto.

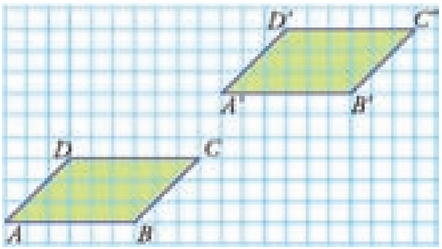
Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Suma de forma analítica y geométrica los vectores $\vec{u}(7, 6)$ y $\vec{v}(3, -7)$.

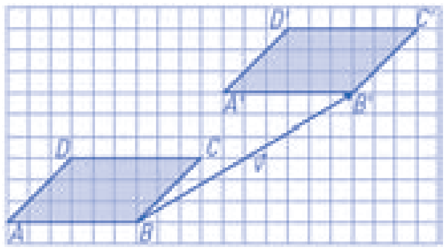
$\vec{u} + \vec{v} = (-2, -4)$



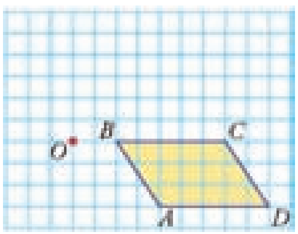
2. Calcula el vector que transforma el romboide *ABCD* en el romboide *A′B′C′D′*.

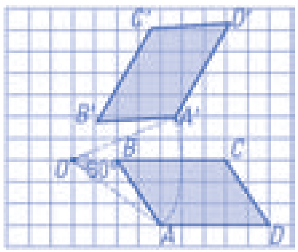


$\vec{v}\,(10, 6)$

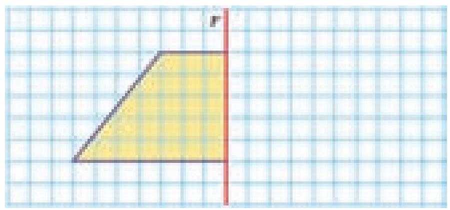


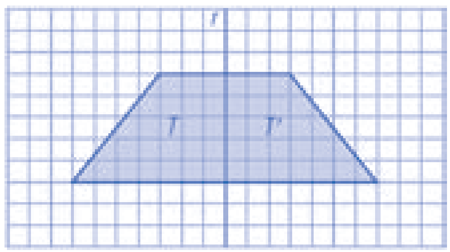
3. Aplica un giro de 60° al romboide de la figura respecto del centro *O*.





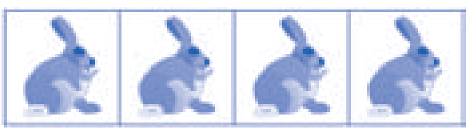
4. Dibuja el simétrico del trapecio rectángulo respecto del eje *r*.



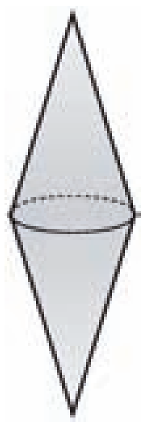


5. Dibuja un friso.

Solución abierta, por ejemplo:



6. Encuentra los planos y los ejes de simetría del siguiente cuerpo.



La figura está compuesta por dos conos unidos por su base.

Los planos de simetría serán todos los que pasan por un eje de simetría de la circunferencia y por los vértices de los conos.

El eje de simetría es la recta que pasa por los vértices.

Bruño

OBJETIVOS

a. Identificar cuerpos en el espacio y su desarrollo plano así como sus características.
b. Utilizar las fórmulas del área y volumen del prisma, del cilindro, de la pirámide, del cono, del tronco de pirámide, del tronco de cono y de la esfera.
c. Identificar el globo terráqueo y sobre él el eje de la Tierra, polos, el ecuador terrestre, hemisferios, paralelos y meridianos.
d. Usar las coordenadas geográficas.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar los conocimientos de áreas y volúmenes para valorar las informaciones supuestamente científicas que puedan encontrar en los medios de comunicación y en muchos mensajes publicitarios.

Competencia cultural y artística

- Valorar el conocimiento geométrico como instrumento artístico.

Competencia para aprender a aprender

- Valorar la regularidad y constancia del trabajo diario dedicado al estudio y a la realización de actividades de aprendizaje.

CONTENIDOS

Conceptos

- Cubo, ortoedro, prisma, cilindro, pirámide, cono, tronco de pirámide, tronco de cono y esfera.
- Desarrollo plano de un cuerpo en el espacio.
- Área lateral. Volumen.
- Globo terráqueo: eje de la Tierra, polos, el ecuador terrestre, hemisferios, paralelos y meridianos.
- Coordenadas geográficas: longitud y latitud.

Procedimientos

- Utilización de la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas.
- Utilización de los sistemas de referencia para situar y localizar un objeto.
- Uso diestro de los instrumentos de dibujo habituales.
- Construcción de figuras planas y cuerpos en el espacio utilizando la escala, los instrumentos, los materiales y las técnicas adecuados a cada caso.
- Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en cuerpos, figuras y configuraciones geométricas.
- Identificación de problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
- Elección de las formas o configuraciones geométricas que se ajustan mejor a unas condiciones dadas.

Actitudes

- Reconocimiento y valoración de la utilidad de la geometría para conocer y resolver diferentes situaciones relativas al entorno físico.
- Reconocimiento y valoración de las relaciones entre diferentes conceptos, como la forma y el tamaño de los objetos, y entre los métodos y lenguajes matemáticos que permiten tratarlos.
- Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.
- Flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.
- Sensibilidad y gusto por la realización sistemática y presentación cuidadosa y ordenada de trabajos geométricos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

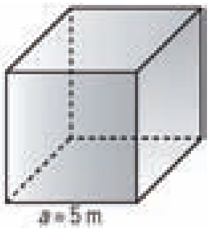
a.1. Utiliza los conceptos, procedimientos y terminología de las figuras planas, los cuerpos en el espacio y la esfera terrestre con propiedad. Identifica cuerpos en el espacio y su desarrollo plano.
b.1. Halla el área y el volumen de un cubo, ortoedro, prisma, cilindro, pirámide, cono, tronco de pirámide, tronco de cono y esfera.
c.1. Identifica el globo terráqueo y sobre él el eje de la Tierra, polos, el ecuador terrestre, hemisferios, paralelos y meridianos.
d.1. Determina la longitud y la latitud de una población en un mapa.

Área y volumen de cuerpos en el espacio I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

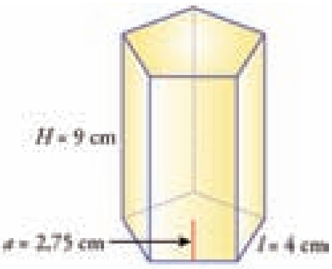
El **área total del prisma** se deduce de su desarrollo plano, formado por dos bases iguales que son polígonos regulares, y tantos rectángulos iguales como aristas tenga la base.
El **volumen del prisma** se obtiene multiplicando el área de la base por la altura.

1. Calcula mentalmente el área y el volumen de un cubo de 5 m de arista.



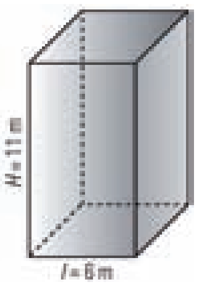
Área:
$A = 6a^2$
$A = 6 \cdot 52 = 150$ m^2
Volumen:
$V = a^3$
$V = 53 = 125$ m^3

2. Calcula el área y el volumen del prisma pentagonal del siguiente dibujo:



$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$
$A_B = 5 \cdot 4 \cdot,75 : 2 = 27,5$ cm^2
$A_L = 5l \cdot H \Rightarrow A_L = 5 \cdot 4 \cdot 9 = 180$ cm^2
$A_T = 2A_B \cdot A_L \Rightarrow A_T = 2 \cdot 27,5 + 180 = 235$ cm^2
$V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 27,5 \cdot 9 = 247,5$ cm^3

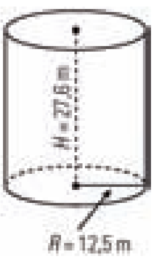
3. Calcula el área y el volumen de un prisma cuadrangular en el que la arista de la base mide 6 m y su altura es de 11 m.



$A_B = l$
$A_B = 6^2 = 36$ m^2
$A_L = 4l \cdot H$
$A_L = 4 \cdot 6 \cdot 11 = 264$ m^2
$A_T = 2A_B + A_L \Rightarrow A_T = 2 \cdot 36 + 264 = 336$ m^2
$V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 36 \cdot 11 = 396$ m^3

El **área total del cilindro** se deduce de su desarrollo plano, formado por dos bases iguales que son círculos, y un rectángulo.
El **volumen del cilindro** se obtiene multiplicando el área de la base por la altura.

4. Calcula el área y el volumen de un cilindro recto en el que el radio de la base mide 12,5 m y cuya altura es de 27,6 m.



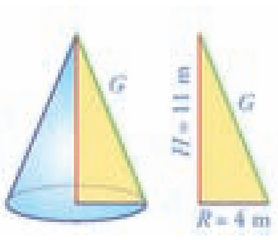
$A_B = \pi R^2$
$A_B = \pi \cdot 12,5^2 = 490,87$ m^2
$A_L = 2\pi RH \Rightarrow A_L = 2 \cdot \pi \cdot 12,5 \cdot 27,6 = 2\,167,70$ m^2
$A_T = 2A_B + A_L \Rightarrow A_T = 2 \cdot 490,87 + 2167,7 = 3\,149,44$ m^2
$V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 490,87 \cdot 27,6 = 13\,548$ m^3

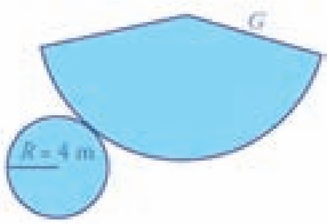
Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 12 ▮ Ficha 2
Área y volumen de cuerpos en el espacio II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Halla el área y el volumen de un cono recto sabiendo que el radio de la base mide 4 m y la altura es de 11 m.





Área total = 197,3 m^2

Volumen = 184,31 m^3

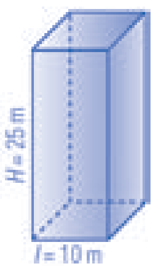
2. Calcula el volumen de la siguiente pieza:

Volumen:

$V = A_B \cdot H$

$V = \pi(6^2 - 5^2) \cdot 23 = 794{,}84\ \text{cm}^3$

3. Un silo, que es un edificio para almacenar cereales, tiene forma de prisma cuadrangular. Si la arista de la base mide 10 m y la altura es de 25 m, ¿qué volumen contiene?

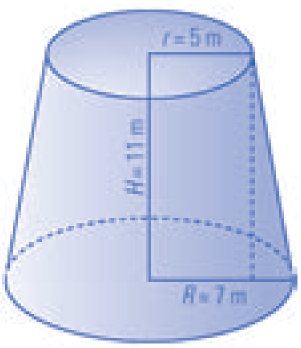


Volumen:

$V = A_B \cdot H$

$V = 10 \cdot 10 \cdot 25 = 2\,500\ \text{m}^3$

4. Calcula el volumen de un tronco de cono en el que el radio de la base mayor mide 7 m; el de la base menor, 5 m; y la altura, 11 m.



$A_{B_1} = \pi R^2$

$A_{B_1} = \pi \cdot 7^2 = 153{,}94\ \text{m}^2$

$A_{B_2} = \pi r^2$

$A_{B_2} = \pi \cdot 5^2 = 78{,}54\ \text{m}^2$

$V = \frac{1}{3}\left(A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}\right) \cdot H$

$V = \left(153{,}94 + 78{,}54 + \sqrt{153{,}94 \cdot 78{,}54}\right) \cdot 11 : 3 = 1\,255{,}6\ \text{m}^3$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 12 ▮ Ficha 3
Área y volumen de pirámides y conos

Bruño

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

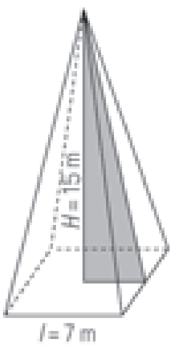
El **área total de la pirámide** se deduce de su desarrollo plano, formado por una base que es un polígono regular, y tantos triángulos isósceles iguales como aristas tenga la base:

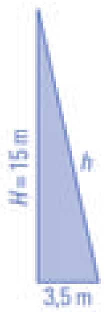
$$A_T = A_B + A_L$$

El **volumen de la pirámide** se obtiene multiplicando un tercio por el área de la base y por la altura:

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

1. Calcula el área y el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene 7 m de arista y cuya altura mide 15 m:





$A_B = l^2$

$A_B = 7^2 = 49\ m^2$

Tenemos que hallar la apotema de la pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{15^2 + 3{,}5^2} = \sqrt{237{,}25} = 15{,}40\ m$

$A_L = 4 \cdot \dfrac{l \cdot h}{2}$

$A_L = 4 \cdot 7 \cdot 15{,}4 : 2 = 215{,}6\ m^2$

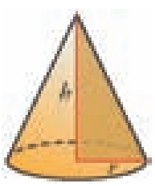
El **área total del cono** se deduce de su desarrollo plano, formado por una base que es un círculo, y un sector circular:

$$A_B = \pi R^2 \qquad A_L = \pi RG \qquad A_T = A_B + A_L$$

El **volumen del cono** se obtiene multiplicando un tercio por el área de la base y por la altura:

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

2. Calcula el área y el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 3,5 m y la altura es el triple de dicho radio.



$A_B = \pi R^2$

$A_B = \pi \cdot 3{,}5^2 = 38{,}48\ m^2$

Tenemos que hallar la generatriz aplicando el teorema de Pitágoras:

$G = \sqrt{10{,}5^2 + 3{,}5^2} = \sqrt{122{,}5} = 11{,}07\ m$

$A_L = \pi r G$

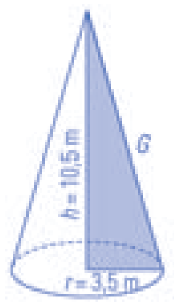
$A_L = \pi \cdot 3{,}5 \cdot 11{,}07 = 121{,}72\ m^2$

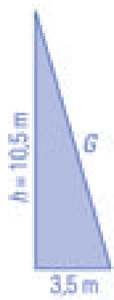
$A_T = A_B + A_L$

$A_T = 38{,}48 + 121{,}72 = 160{,}2\ m^2$

$V = \dfrac{1}{3} A_B + h$

$V = 38{,}48 \cdot 10{,}5 : 3 = 134{,}68\ m^3$





Área y volumen de troncos y esfera I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

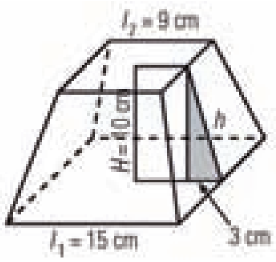
El **área total de un tronco de pirámide** se deduce de su desarrollo plano, formado por dos bases que son polígonos regulares desiguales, y tantos trapecios isósceles iguales como aristas tenga la base:

$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

El **volumen de un tronco de pirámide** se obtiene multiplicando un tercio por la suma de las áreas de las bases, más la raíz cuadrada del producto de dichas áreas, multiplicado todo por la altura:

$$V = \frac{1}{3}\left(A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}\right) \cdot H$$

1. Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular sabiendo que la arista de la base mayor mide 15 cm; la arista de la base menor, 9 cm; y la altura, 10 cm:



$A_{B_1} = l_1^2$

$A_{B_1} = 15^2 = 225 \text{ cm}^2$

$A_{B_2} = l_2^2$

$A_{B_2} = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$

Tenemos que hallar la apotema del tronco de pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109} = 10{,}44 \text{ m}$

$A_L = 4 \cdot \dfrac{l_1 + l_2}{2} \cdot h$

$A_L = 4 \cdot \dfrac{15 + 9}{2} \cdot 10{,}44 = 501{,}12 \text{ m}^2$

$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$

$A_T = 225 + 81 + 501{,}12 = 807{,}12 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{1}{3}\left(A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}\right) \cdot H$

$V = \left(225 + 81 + \sqrt{225 \cdot 81}\right) \cdot 10 : 3 = 1\,470 \text{ m}^3$

La esfera no tiene desarrollo plano. El **área de la esfera** es igual a la de cuatro círculos máximos:

$$A = 4\pi R^2$$

El **volumen de la esfera** se obtiene multiplicando cuatro tercios por π y por el radio al cubo:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2. Calcula el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 7,5 m.

$A = 4\pi R^2$

$A = 4\pi \cdot 7{,}5^2 = 706{,}86 \text{ m}^2$

$V = \dfrac{4}{3} = \pi R^3$

$V = 4 : 3 \cdot \pi \cdot 7{,}5^3 = 1767{,}15 \text{ m}^3$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 12 ▮ Ficha 5
Área y volumen de troncos y esfera II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Varias

1. Calcula el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 5,25 cm.

$A = 4\pi R^2$

$A = 4\pi \cdot 5{,}25^2 = 346{,}36 \text{ m}^2$

$V = \dfrac{4}{3} = \pi R^3$

$V = 4 : 3 \cdot \pi \cdot 5{,}25^3 = 606{,}13 \text{ m}^3$

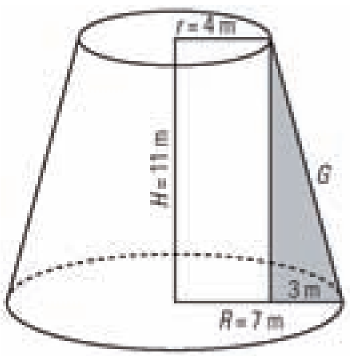
El **área total de un tronco de cono** se deduce de su desarrollo plano, formado por dos bases que son dos círculos desiguales, y un trapecio circular:

$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L;\ A_{B_1} = \pi R^2;\ A_{B_2} = \pi r^2;\ A_L = (R + r)G$$

El **volumen de un tronco de cono** se obtiene multiplicando un tercio por la suma de las áreas de las bases, más la raíz cuadrada del producto de dichas áreas, multiplicado todo por la altura.

$$V = \frac{1}{3}\left(A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}\right) \cdot H$$

2. Calcula el área y el volumen de un tronco de cono sabiendo que el radio de la base mayor mide 7 m; el de la base menor, 4 m; y la altura, 11 m:



$A_{B_1} = \pi \cdot R^2$

$A_{B_1} = \pi \cdot 7^2 = 153{,}94 \text{ m}^2$

$A_{B_2} = \pi \cdot r^2$

$A_{B_2} = \pi \cdot 4^2 = 50{,}27 \text{ m}^2$

Tenemos que hallar la generatriz del tronco de cono aplicando el teorema de Pitágoras:

$G = \sqrt{11^2 + 3^2} = \sqrt{130} = 11{,}40 \text{ m}$

$A_L = \pi \cdot (R + r) \cdot G$

$A_L = \pi \cdot (7 + 4) \cdot 11{,}4 = 393{,}96 \text{ m}^2$

$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$

$A_T = 153{,}94 + 50{,}27 + 393{,}96 = 598{,}17 \text{ m}^2$

$V = \dfrac{1}{3}\left(A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}\right) \cdot H$

$V = \left(153{,}94 + 50{,}27 + \sqrt{153{,}94 \cdot 50{,}27}\right) \cdot 11 : 3 = 1\,071{,}32 \text{ m}^3$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 12 ▮ Ficha 6
La esfera y el globo terráqueo

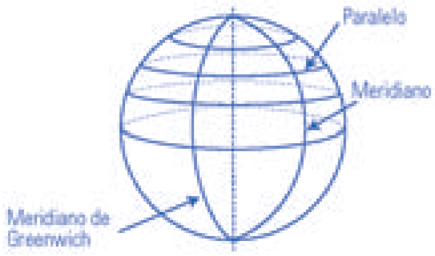
Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Define paralelos y meridianos. Pon un ejemplo haciendo un dibujo y marcando varios de ellos.

Paralelos: son las circunferencias paralelas al Ecuador.

Meridianos: son las circunferencias máximas que pasan por los polos.



La **longitud** de un lugar es el arco de paralelo que forman el meridiano de Greenwich y el meridiano que pasa por ese lugar. La longitud **se mide de 0° a 180°** a partir del meridiano de Greenwich, distinguiéndose entre este y oeste.

2. Si la longitud del Ecuador es de unos 40 000 km, calcula la distancia que se recorre sobre el Ecuador al avanzar 1° en longitud.

40 000 : 360 = 111,11 km

La **latitud** de un lugar es el arco de meridiano que forman entre el Ecuador y el paralelo que pasa por ese lugar. La latitud **se mide de 0° a 90°** a partir del Ecuador, distinguiéndose entre latitud Norte y latitud Sur.

3. Si la longitud de un meridiano es de unos 40 000 km, calcula la distancia que se recorre sobre un meridiano al avanzar 1° en latitud.

40 000 : 360 = 111,11 km

4. Busca en el mapa las ciudades cuyas coordenadas geográficas son las siguientes:

a) 2° 28′ O 36° 50′ N   b) 3° 41′ O 40° 24′ N

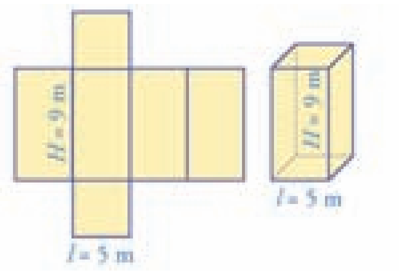
c) 4° 25′ O 36° 43′ N   d) 5° 34′ O 42° 36′ N

a) Almería.   b) Madrid.

c) Málaga.   d) León.

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Halla el área y el volumen de un prisma cuadrangular en el que la arista de la base mide 5 m y la altura tiene 9 m



Área total: $A_T = 2A_B + A_L$; $A_B \cdot l^2 \Rightarrow A_B = 5^2 = 25$ m²; $A_L = 4lH \Rightarrow$

$A_L = 4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$ m²

$A_T = 2 \cdot 25 + 180 = 50 + 180 = 230$ m²

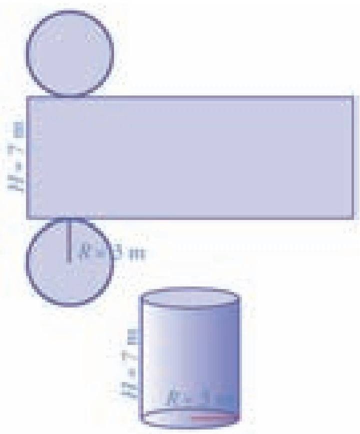
Volumen: $V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 25 \cdot 9 = 225$ m³

2. Halla el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 5 m.

Área total = 197,3 m²

Volumen = 184,31 m³

3. Halla el área total y el volumen de un cilindro recto cuya base tiene 3 m de radio y su altura es de 7 m.



Área total: $A_T = 2A_B + A_L$; $A_B \cdot \pi R^2 \Rightarrow A_B = \pi \cdot 3^2 = 28{,}27$ m²

$A_L = 2 \cdot \pi RH \Rightarrow A_L = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 7 = 131{,}95$ m²

$A_T = 2 \cdot 28{,}27 + 131{,}95 = 188{,}49$ m²

Volumen: $V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 28{,}27 \cdot 7 = 197{,}89$ m³

4. Busca en el mapa anterior las ciudades cuyas coordenadas geográficas son las siguientes:

a) 1° 52′ O 39° N b) 2° 11′ E 41° 23′ N

b) 8° 39′ O 42° 26′ N d) 3° 47′ O 37° 46′ N

a) Albacete. b) Barcelona.

c) Pontevedra. d) Jaén.

OBJETIVOS

a. Identificar la población y la muestra de un estudio estadístico.

b. Reconocer y clasificar el carácter estadístico observado en un estudio estadístico.

c. Hacer tablas de frecuencias con datos discretos y con datos agrupados en intervalos.

d. Dibujar e interpretar diagramas de barras, de sectores e histogramas.

e. Calcular la media, la moda y la mediana e interpretar sus resultados.

f. Hallar la varianza, la desviación típica, el coeficiente de variación e interpretar sus resultados.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos de la estadística para interpretar fenómenos sencillos observables en el mundo físico y natural.

Competencia social y ciudadana

- Trabajar en grupo y valorar el intercambio de puntos de vista.

Competencia para aprender a aprender

- Valorar la regularidad y constancia del trabajo diario dedicado al estudio y a la realización de actividades de aprendizaje.

Autonomía e iniciativa personal

- Adaptarse a usar distintas técnicas, instrumentos y métodos para el aprendizaje de los contenidos matemáticos de estadística.

CONTENIDOS

Conceptos

- Población y muestra.
- Carácter estadístico cualitativo, cuantitativo, cuantitativo discreto y cuantitativo continuo.
- Frecuencia: absoluta y relativa.
- Marca de clase.
- Diagrama de barras, de sectores e histograma.
- Parámetro de centralización: moda, mediana y media.
- Parámetro de dispersión: recorrido, varianza, desviación típica.
- El coeficiente de variación.

Procedimientos

- Utilización e interpretación del lenguaje gráfico teniendo en cuenta la situación que se representa y utilizando el vocabulario y los símbolos adecuados.
- Interpretación y elaboración de tablas numéricas a partir de conjuntos de datos, de gráficas, teniendo en cuenta el fenómeno al que se refieren.
- Utilización e interpretación de los parámetros de una distribución y análisis de su representatividad en relación con el fenómeno al que se refieren.
- Construcción de gráficas a partir de tablas estadísticas, eligiendo en cada caso el tipo de gráfica y medio de representación más adecuado.
- Planteamiento de conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa.

Actitudes

- Reconocimiento y valoración de la utilidad de los lenguajes gráfico y estadístico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana y del conocimiento científico.
- Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a observaciones, experiencias y encuestas.
- Interés y respeto por las estrategias e interpretaciones a problemas estadísticos distintas de las propias.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Identifica población y muestra en un estudio estadístico.

b.1. Identifica y clasifica el carácter estadístico observado en un estudio estadístico.

c.1. Hace una tabla de frecuencias con datos discretos y agrupados.

d.1. Dibuja una representación gráfica que recoge los datos de un estudio estadístico con un carácter cualitativo y cuantitativo.

e.1. Calcula la moda, la mediana y la media e interpreta sus resultados.

f.1. Halla la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación e interpreta sus resultados.

Tablas de frecuencias I

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

- La **estadística** es la ciencia que trata la información con la finalidad de describir un fenómeno que se está estudiando, y obtener conclusiones.
- Una **población** es el conjunto de elementos que son objeto de estudio. Pueden ser personas, animales, plantas o cosas.
- Una **muestra** es una parte de la población cuyo estudio sirve para sacar conclusiones de toda la población.

Un **carácter estadístico** es una propiedad que se estudia en los individuos de la población. Puede ser cualitativo o cuantitativo.

Carácter estadístico cualitativo: aquel que indica una cualidad. No se puede contar ni medir.

Carácter estadístico cuantitativo: aquel que indica una cantidad. Se puede contar o medir. Se clasifica en:

a) **Cuantitativo discreto:** sus valores son el resultado de un recuento. Únicamente puede tomar ciertos valores aislados.

b) **Cuantitativo continuo:** sus valores.

1. Pon un ejemplo de cada tipo de carácter estadístico.

a) Carácter cualitativo: El color del pelo.

b) Carácter cuantitativo discreto: Número de hijos de una familia.

c) Carácter cuantitativo continuo: La estatura de unas personas.

2. El número de tornillos defectuosos que se han obtenido por término medio en 25 cajas envasadas en una fábrica ha sido: 3, 2, 5, 3, 3, 2, 1, 3, 2, 2, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 5, 2, 4, 1, 1, 3, 2.

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

a) Carácter discreto.

b)

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	5	0,20	5	0,20
2	8	0,32	13	0,52
3	6	0,24	19	0,76
4	2	0,08	21	0,84
5	4	0,16	25	1,00
Suma	**25**	**1,00**		

Tablas de frecuencias II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

La frecuencia absoluta de un valor es el número de individuos de la población para los que la variable toma ese valor. Se representa por n_i.

La frecuencia relativa de un valor es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de individuos. Se representa por $f_i = n_i/N$.

1. Se ha preguntado a una muestra de personas sobre el funcionamiento de su ayuntamiento, obteniéndose los siguientes resultados:

Respuesta	Muy mal	Mal	Normal	Bien	Muy bien
N.º personas	8	10	20	8	4

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

a) Carácter cualitativo.

b)

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
Muy mal	8	0,16	8	0,16
Mal	10	0,20	18	0,36
Normal	20	0,40	38	0,76
Bien	8	0,16	46	0,92
Muy bien	4	0,08	50	1,00
Suma	**50**	**1,00**		

2. Se ha realizado un estudio sobre el peso de un grupo de jóvenes, obteniéndose los siguientes resultados:

Peso (kg)	51,5-56,5	56,5-61,5	61,5-66,5	66,5-71,5	71,5-76,5	76,5-81,5
N.º jóvenes	6	8	10	12	9	5

Clasifica el carácter estudiado:

Carácter cuantitativo continuo.

3. Utilizando los datos de la consigna anterior, escribe la marca de clase y completa una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Peso	x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
51,5 a 56,5	54	6	0,12	6	0,12
56,5 a 61,5	59	8	0,16	14	0,28
61,5 a 66,5	64	10	0,20	24	0,48
66,5 a 71,5	69	12	0,24	36	0,72
71,5 a 76,5	74	9	0,18	45	0,90
76,5 a 81,5	79	5	0,10	50	1,00
Suma		**50**	**1,00**		

Gráficos estadísticos

Nombre ____________________ Curso ______ Fecha ________

Un **diagrama de barras** es un gráfico que está formado por barras separadas de altura proporcional a la frecuencia de cada valor. En el eje de abscisas se representan los valores del carácter estadístico, y en el eje de ordenadas, las frecuencias absolutas. Se utiliza con datos cualitativos y cuantitativos discretos.

Un **diagrama de sectores** es un gráfico que consiste en un círculo dividido en sectores de amplitud proporcional a la frecuencia de cada valor. Se utiliza con cualquier tipo de datos.

Para dibujarlo se sigue el procedimiento:

a) Se calcula la amplitud correspondiente a la frecuencia 1 dividiendo 360° entre el número total de datos, N:

$$\text{Amplitud de una unidad} = 360°/N$$

b) Se calcula la amplitud de cada valor multiplicando la amplitud de una unidad por cada frecuencia:

$$\text{Amplitud de } x = (360°/N) \cdot n_i$$

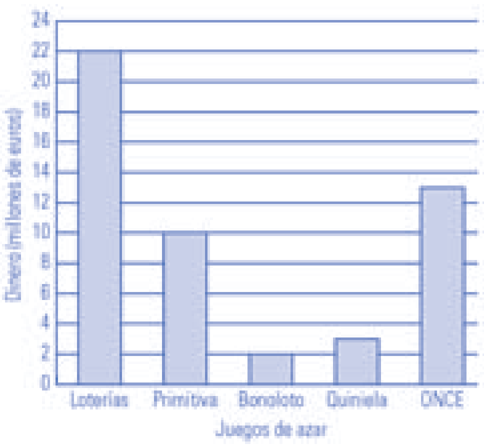
Un **histograma** es una representación gráfica mediante rectángulos adosados de base el intervalo y altura proporcional a la frecuencia. Se utiliza cuando los datos son cuantitativos continuos o están agrupados en intervalos.

1. En la tabla se recogen las cantidades, en miles de euros, recaudadas por una administración. ¿Cuál es la representación gráfica más idónea?

Loterías	Primitiva	Bonoloto	Quiniela	ONCE
22	10	2	3	13

El diagrama de barras.

2. Representa gráficamente los datos de la tabla anterior.



3. Interpreta el resultado.

Casi la mitad del dinero se juega en loterías y casi la otra mitad entre la ONCE y la Primitiva.

Parámetros de centralización

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

La **media** de un conjunto de datos es el resultado que se obtiene al dividir la suma de todos los datos entre el número total de ellos.

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i n_i}{N}$$

La **moda** de una distribución es el valor que tiene mayor frecuencia.

La **mediana** de una distribución es el valor que está en el centro al ordenar los datos.

1. Se ha estudiado el tiempo, en horas, que tarda un antibiótico en hacer efecto sobre un tipo de bacteria, obteniéndose los siguientes resultados:

Tiempo (h)	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32
n_i	4	6	12	6	5	3	2

Calcula la moda, la media y la mediana para estos datos.

Media: 16 $\Rightarrow \overline{x} = \frac{\Sigma x_i n_i}{N} \Rightarrow \overline{x} = \frac{608}{38} = 16$

Moda 14

Mediana 14

Tiempo (h)	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
4-8	6	4	4	24
8-12	10	6	10	60
12-16	14	12	22	168
16-20	18	6	28	108
20-24	22	5	33	110
24-28	26	3	36	78
28-32	30	2	38	60
Total		**38**		**608**

2. Interpreta los resultados de la actividad anterior.

Los datos se distribuyen alrededor de 16 horas.

3. Se ha estudiado el tipo de literatura que les gusta a los alumnos de una clase, obteniéndose los siguientes resultados:

Tipo de literatura	**N.º de personas**
Novela	10
Aventuras	12
Ciencia ficción	8
Poesía	4

Calcula la moda:

Moda: aventuras

Parámetros de dispersión I

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ______

Los **parámetros de dispersión** son unos valores que indican si los datos de la distribución están más o menos cercanos a los parámetros centrales.

El **recorrido** es la diferencia entre el valor mayor y el menor de la distribución.

La **varianza** es la media de las desviaciones al cuadrado. Se calcula así:

$$V = \frac{\Sigma x_i^2 n_i}{N} - \overline{x}^2$$

La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza. Se representa con el símbolo σ y se calcula aplicando la fórmula: $\sigma = \sqrt{V}$

El **coeficiente de variación** es la comparación entre la desviación típica y la media aritmética.

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

1. Durante los últimos 26 días, el número de alumnos que ha faltado a clase ha sido:

N.º de alumnos	0	1	2	3	4	5
N.º de días	5	4	8	5	3	1

Calcula la desviación típica y el coeficiente de variación.

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
0	5	0	0	0
1	4	4	1	4
2	8	16	4	32
3	5	15	9	45
4	3	12	16	48
5	1	5	25	25
Total	26	52		154

Media: $\overline{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \overline{x} = \frac{52}{26} = 2$

Varianza: $V = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2 \Rightarrow V = \frac{154}{26} - 2^2 = 1{,}92$

$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 1{,}39$

$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} \Rightarrow CV = 0{,}69 = 69\% > 30\%$

2. Interpreta los resultados de la actividad anterior.

Las faltas de asistencia se distribuyen alrededor de dos faltas, pero con una dispersión muy grande.

Parámetros de dispersión II

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ________

1. Se ha medido la temperatura máxima en una ciudad durante los últimos días, obteniéndose los siguientes resultados:

Temperatura (°C)	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
N.º de días	3	4	9	3	1

Calcula la desviación típica y el coeficiente de variación.

Media: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{250}{20} = 12{,}50$

Varianza: $V = \dfrac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$

$V = \dfrac{3212}{20} - 12{,}5^2 = 4{,}35$

$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 2{,}09$

$CV = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0{,}17 = 17\% < 30\%$

Temperatura (°C)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
8-10	9	3	27	81	243
10-12	11	4	44	121	484
12-14	13	9	117	169	1521
14-16	15	3	45	225	675
16-18	17	1	17	289	289
Total		20	250		3212

2. Interpreta los resultados de la actividad anterior.

La temperatura se distribuye alrededor de 12,5 °C con una dispersión pequeña.

3. Las semanas en cartel que han estado distintas películas en un determinado cine han sido 3, 1, 4, 3, 2, 5, 2, 11, 5, 2. Calcula la desviación típica y el coeficiente de variación.

Media: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{38}{10} = 3{,}8$

Varianza: $V = \dfrac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$

$V = \dfrac{218}{10} - 3{,}8^2 = 7{,}36$

$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 2{,}17$

$CV = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0{,}71 = 71\% > 30\%$

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
1	1	1	1	1
2	3	6	4	12
3	2	6	9	18
4	1	4	16	16
5	2	10	25	50
11	1	11	121	121
Total	10	38		218

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Clasifica los siguientes caracteres en cualitativos, cuantitativos discretos o cuantitativos continuos:

El color de pelo: Cualitativo.

La estatura de un grupo de personas: Cuantitativo continuo.

El deporte preferido: Cualitativo.

El número de libros leídos: Cuantitativo discreto.

2. Haz la representación gráfica más idónea del tiempo que dedican a estudiar Matemáticas en su casa los alumnos de un grupo de 3.° de la ESO, e interpreta el resultado:

Tiempo (min)	0-15	15-30	30-45	45-60	60-75
N.º de alumnos	3	12	9	4	2

La mayoría de los alumnos dedican al estudio entre 15 y 45 minutos.

3. Las edades de los componentes de una asociación deportiva son las siguientes:

Edad (años)	Componentes
15-19	5
19-23	6
23-27	10
27-31	5
31-35	2

Calcula la desviación típica y el coeficiente de variación.

Media: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{672}{28} = 24$

Varianza: $V = \dfrac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$

$V = \dfrac{16\,724}{28} - 24^2 = 21{,}29$

$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 4{,}61$

$CV = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0{,}19 = 19\% < 30\%$

Edad (años)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
15-19	17	5	85	289	1 445
19-23	21	6	126	441	2 646
23-27	25	10	250	625	6 250
27-31	29	5	145	841	4 205
31-35	33	2	66	1 089	2 178
Total		**28**	**672**		**16 724**

OBJETIVOS

a. Discriminar entre experimentos aleatorios y deterministas.
b. Determinar el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.
c. Expresar el suceso seguro y el suceso imposible de un experimento aleatorio.
d. Expresar el suceso contrario de un suceso dado.
e. Calcular la unión y la intersección de sucesos.
f. Identificar sucesos compatibles e incompatibles.
g. Conocer y usar la regla de Laplace.
h. Utilizar las propiedades de la probabilidad para resolver problemas.
i. Resolver problemas de experimentos simples.
j. Solucionar problemas de experimentos compuestos aplicando distintas estrategias como los diagramas cartesianos, diagramas de árbol, etc. y aplicando la regla del producto y la regla de la suma.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos de la probabilidad para interpretar fenómenos sencillos observables en el mundo físico y natural.

Autonomía e iniciativa personal

- Adaptarse a usar distintas técnicas, instrumentos y métodos para el aprendizaje de los contenidos matemáticos de probabilidad.

CONTENIDOS

Conceptos

- Experimento determinista y aleatorio.
- Espacio muestral.
- Suceso: elemental, contrario, seguro e imposible.
- Unión e intersección de sucesos.
- Sucesos compatibles e incompatibles.
- Frecuencia de un suceso. Ley de los grandes números.
- Experimentos simples.
- Experimentos compuestos.

Procedimientos

- Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
- Confección de tablas de frecuencias y gráficas para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios.
- Cálculo de probabilidades en casos sencillos con la Ley de Laplace.
- Reconocimiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana y en el conocimiento científico.
- Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.

Actitudes

- Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.
- Disposición favorable a tener en cuenta las informaciones probabilísticas en la toma de decisiones sobre fenómenos aleatorios.
- Curiosidad e interés por investigar fenómenos relacionados con el azar.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Utiliza los conceptos, los procedimientos y la terminología de probabilidad con propiedad.
b.1. Determina el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.
c.1. Expresa el suceso seguro y el suceso imposible de un experimento aleatorio.
d.1. Expresa el suceso contrario de un suceso dado.
e.1. Calcula la unión y la intersección de sucesos.
f.1. Identifica sucesos compatibles e incompatibles.
g.1. Conoce y usa la regla de Laplace.
h.1. Resuelve problemas de operaciones con sucesos y su probabilidad aplicando las propiedades de la probabilidad.
i.1. Soluciona problemas de experimentos simples.
j.1. Resuelve problemas de experimentos compuestos con la regla del producto y de la suma.

Experimentos aleatorios

Bruño

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ______

Un **experimento** es **determinista** si, al realizarse en las mismas condiciones, se obtiene siempre el mismo resultado.

Un **experimento** es **aleatorio o de azar** si, al realizarse en las mismas condiciones, no es posible predecir el resultado.

- El **espacio muestral** está formado por el conjunto de todos los resultados que se pueden presentar. Se representa con la letra ***E***.
- Un **suceso elemental** es cada uno de los resultados del espacio muestral.
- Un **suceso** es un conjunto de sucesos elementales. Estos se representan con letras mayúsculas, escribiendo sus elementos entre llaves y separados por comas.

1. Clasifica los siguientes experimentos como deterministas (*D*) o de azar (*A*):

a) Lanzar una moneda al aire. → De azar

b) Pinchar un globo. → Determinista

c) Frenar un coche. → Determinista

d) Sacar una carta de una baraja. → De azar

2. Escribe dos experimentos deterministas y dos de azar.

Dos deterministas pueden ser:

a) Pesar un melón. b) Medir la longitud de una mesa.

Dos de azar pueden ser:

a) Sacar una carta de una baraja. b) Jugar a la lotería.

- El **suceso contrario** de un suceso A está formado por todos los sucesos elementales que no están en *A*. Se representa con $\bar{A}$.
- El **suceso seguro** es el que siempre se presenta, y es igual al espacio muestral ***E***.
- El **suceso imposible** es el que nunca se presenta. Se representa con el símbolo **Ø**.
- **Unión de dos sucesos *A* y *B*:** suceso formado por todos los sucesos elementales de A y de B. Se representa: $A \cup B$.
- **Intersección de dos sucesos *A* y *B*:** suceso formado por todos los sucesos elementales comunes a *A* y a *B*, es decir, que están en los dos al mismo tiempo. Se representa: $A \cap B$.
- Dos sucesos son **compatibles** si se pueden presentar al mismo tiempo: si $A \cap B \neq \emptyset$.
- Dos sucesos son **incompatibles** si no se pueden presentar al mismo tiempo:,si $A \cap B = \emptyset$.

3. En el experimento de lanzar al aire un dado en forma de dodecaedro con las caras numeradas del 1 al 12, halla:

a) El espacio muestral.

b) Los sucesos elementales.

c) El suceso *A* formado por los múltiplos de 3

d) El suceso contrario $\bar{A}$

e) El suceso *B* formado por los números pares.

f) El suceso $A \cup B$

g) El suceso $A \cap B$. ¿Los sucesos *A* y *B* son compatibles o incompatibles?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {10}, {11} y {12}

c) $A = \{3, 6, 9, 12\}$

d) $\bar{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

e) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

f) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

g) $A \cap B = \{6, 12\} \neq \emptyset \Rightarrow A$ y B compatibles

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 14 ▮ Ficha 2
Regla de Laplace (I)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ______________

La **frecuencia absoluta de un suceso *A*,** al realizarse un experimento *N* veces, es el número de veces que se verifica el suceso *A*. Se representa por ***n***.

La **frecuencia relativa de un suceso A,** al realizarse un experimento *N* veces, es igual al cociente de la frecuencia absoluta *n*, dividido por el número total de veces *N* que se ha repetido el experimento. Se representa por:

$$f \rightarrow f = \frac{n}{N}$$

La **ley de los grandes números** dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse hacia una constante a medida que se repite el experimento muchas veces.

1. Lanzamos al aire una chincheta 25 veces. De ellas, 10 veces queda con la punta hacia abajo y 15 veces hacia arriba. Halla:

a) La frecuencia absoluta de que quede con la punta hacia arriba.

b) La frecuencia relativa de que quede con la punta hacia arriba.

a) $n = 15$

b) $f = 15/25 = 3/5 = 0{,}6$

2. Lanzamos 100 veces al aire una moneda y se obtiene cara 45 veces. Halla:

a) La frecuencia absoluta de obtener cruz. a) $n = 55$

b) La frecuencia relativa de obtener cruz. b) $f = 55/100 = 0{,}55$

La **probabilidad** de un suceso es la constante a la que se aproxima la frecuencia relativa cuando el experimento se repite muchísimas veces. Según la **regla de Laplace** la probabilidad de un suceso *A*, de un espacio muestral *E*, formado por sucesos elementales **equiprobables,** es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles:

$$P(A) = \frac{\text{N.º de casos favorables al suceso } A}{\text{N.º de casos posibles}}$$

3. Aplicando la regla de Laplace, calcula la probabilidad de obtener un número impar al lanzar un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, 5\}$

$P(A) = 3/6 = 1/2 = 0{,}5$

4. Aplicando la regla de Laplace, calcula la probabilidad de obtener un número múltiplo de 3 al lanzar un dado con forma de dodecaedro, con las caras numeradas del 1 al 12.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A = \{3, 6, 9, 12\}$

$P(A) = 4/12 = 1/3 = 0{,}33$

Regla de Laplace (II)

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Propiedades de la probabilidad:

a) La probabilidad del suceso seguro es uno: $P(E) = 1$

b) La probabilidad del suceso imposible es cero: $P(\varnothing) = 0$

c) La probabilidad de cualquier suceso está comprendida entre cero y uno: $0 \leq P(A) \leq 1$

d) La probabilidad del suceso contrario es: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

e) Si los sucesos A y B son incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

f) Si los sucesos A y B son compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1. Si en un experimento $P(A) = 1/3$, calcula $P(\bar{A})$.

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

2. Si los sucesos A y B son incompatibles con: $P(A) = 1/2$ y $P(B) = 1/3$, calcula $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

3. Si los sucesos A y B son compatibles con: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$ y $P(A \cap B) = 1/3$ calcula $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

4. En el experimento de lanzar una moneda al aire, halla:

a) El espacio muestral.

b) Los sucesos elementales.

c) Si $A = \{C\}$, el suceso contrario $\bar{A}$

d) Si $B = \{X\}$, el suceso $A \cup B$

e) El suceso $A \cap B$. ¿Los sucesos A y B son compatibles o incompatibles?

a) $E = \{C, X\}$

b) $\{C\}, \{X\}$

c) $\bar{A} = \{X\}$

d) $A \cup B = \{C, X\} = E$

e) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A$ y B son incompatibles.

Experimentos simples

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ________

- Si se lanza al aire una **moneda,** puede salir cara ***C***, o cruz ***X***, luego la probabilidad de obtener cara es igual a la probabilidad de obtener cruz e igual a ½.
- Si se tiene una urna con **bolas** de distinto color, la probabilidad de extraer una bola de un color es igual al número de bolas que hay de ese color, dividido entre el número total de bolas.
- Si los dados son regulares, la probabilidad de que caiga en una cara es igual a uno dividido entre el número total de caras que tenga el dado.

1. Calcula la probabilidad de obtener cruz, *X*, al lanzar al aire una moneda de un euro.

E = {*C*, *X*}   *A* = {X}   *P*(*A*) = 1/2 = 0,5

2. Calcula la probabilidad de obtener una bola de color azul al extraer una bola de una urna que tiene 3 bolas rojas, 5 azules y 2 verdes.

E = {3R, 5A, 2V}   *A* = {5A}   *P*(*A*) = 5/10 = 1/2 = 0,5

3. Calcula la probabilidad de obtener un número múltiplo de 4 al lanzar al aire un dado con forma de dodecaedro y con las caras numeradas del 1 al 12.

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}   *A* = {4, 8, 125}   *P*(*A*) = 3/6 = 1/2 = 0,5

La baraja **española** tiene 40 cartas distribuidas en cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos. Cada palo tiene 10 cartas numeradas 1 (as), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10 (sota), 11 (caballo) y 12 (rey).

La baraja **francesa** está compuesta por 52 cartas distribuidas en dos colores: rojo y negro. A su vez, las rojas se dividen en dos palos: corazones y diamantes, y las negras en otros dos palos: picas y tréboles. Cada uno de los palos tiene los números del 1 al 10; y las letras J, Q y K.

4. Calcula la probabilidad de obtener un as al extraer una carta de una baraja española.

E = {1O, 2O, 3O, …, 11B, 12B}
A = {As O, AS C, As E, As B}
P(*A*) = 4/40 = 1/10 = 0,1

5. Calcula la probabilidad de obtener una K al extraer una carta de una baraja francesa.

E = {1RC, 2RC, 3RC, …, QNT, KNT}
A = {KRC, KRD, KNP, KNT}
P(*A*) = 4/52 = 1/13 = 0,077

6. Calcula la probabilidad de obtener una carta roja al extraer una carta de una baraja francesa.

E = {1RC, 2RC, 3RC, …, QNT, KNT}
A = {1RC, 2RC, …, KRC, 1RD, 2RD, …, KRD}
P(*A*) = 26/52 = 1/2 = 0,5

Experimentos compuestos (I)

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Un **experimento compuesto** es el que está formado por varios experimentos simples. Por ejemplo: lanzar dos monedas, o bien lanzar la misma moneda dos veces; lanzar tres monedas, o bien lanzar la misma moneda tres veces.

1. Una familia tiene dos hijos. Calcula mentalmente:

a) La probabilidad de que los dos sean varones. → a) 1/4

b) La probabilidad de que los dos sean mujeres. → b) 1/4

c) La probabilidad de que uno sea varón, y el otro, mujer. → c) 1/4

Un **diagrama cartesiano** es una tabla de doble entrada, que tiene utilidad en experimentos compuestos formados por dos simples. En la fila superior se colocan los sucesos elementales de un experimento simple, y en la columna de la izquierda, los sucesos elementales del otro experimento simple.

2. Haz un diagrama cartesiano para el experimento de lanzar al aire dos monedas, y calcula la probabilidad de obtener:

a) Dos caras.

b) Dos cruces.

c) Una cara y una cruz.

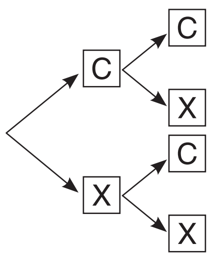
	C	X
C	(C, C)	(C, X)
X	(X, C)	(X, X)

a) $P(2C) = P(C, C) = 1/4$

b) $P(2X) = P(X, X) = 1/4$

c) $P(1C \text{ y } 1X) = P(C, X) + P(X, C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

- Un **diagrama en árbol** es un diagrama que se hace para resolver los problemas de experimentos compuestos, y se llama así porque está formado por ramas.
- Una **rama** es cada una de las flechas del diagrama. Siempre se escribe en ellas la probabilidad que corresponde a un experimento simple.
- Un **camino** es un conjunto de ramas que van desde el principio al final.



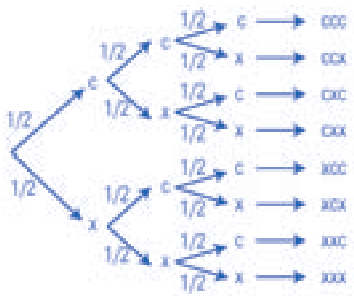
3. Haz un diagrama en árbol para el experimento de lanzar al aire tres monedas, y calcula la probabilidad de obtener:

a) Tres caras.

b) Dos caras y una cruz.

c) Una cara y dos cruces.

d) Tres cruces.



a) $P(3C) = P(CCC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125$

b) $P(2C \text{ y } 1X) = P(CCX) + P(CXC) + P(XCC) =$
$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$

c) $P(1C \text{ y } 2X) = P(CXX) + P(XCX) + P(XXC) =$
$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$

d) $P(3X) = P(XXX) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 14 ▮ Ficha 6
Experimentos compuestos (II)

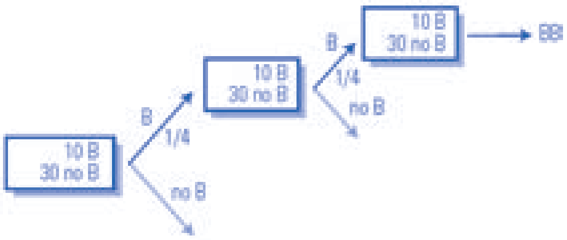
Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Cuando se extraen dos bolas de una urna, puede hacerse «con devolución» o «sin devolución». Si es «con devolución», al extraer la segunda bola se vuelven a tener otra vez todas las bolas; y si es «sin devolución», al extraer la segunda bola faltará la que se ha obtenido anteriormente. Cuando se extraen dos al mismo tiempo, es lo mismo que extraer «sin devolución»: primero una y después otra. Lo mismo sucede al extraer dos o más cartas de una baraja.

La **regla del producto o de la probabilidad compuesta** dice que la probabilidad de un camino en un diagrama de árbol es igual al producto de las probabilidades de las ramas que lo forman.

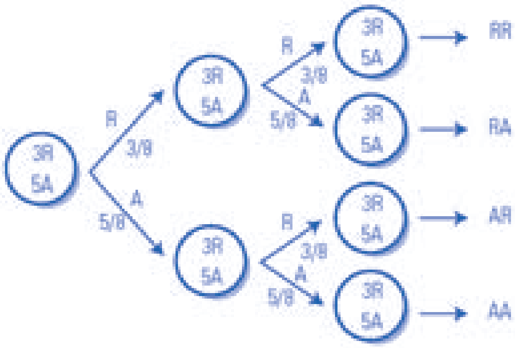
La r**egla de la suma o de la probabilidad total** dice que la probabilidad de varios caminos en un diagrama de árbol es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los caminos.

1. Halla la probabilidad de obtener dos bastos al extraer con devolución dos cartas de una baraja española de 40 cartas.



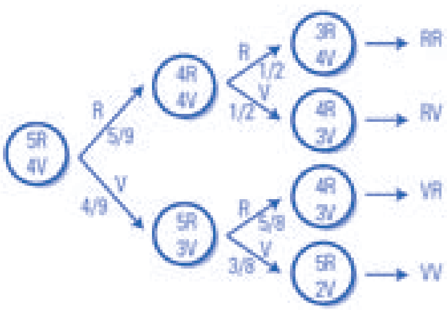
$P(\text{BB}) + P(\text{B}) \cdot P(\text{B}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

2. Halla la probabilidad de obtener dos bolas de distinto color al extraer dos bolas con devolución de una urna que contiene 3 bolas rojas y 5 azules.



$P(\text{Distinto color})\ P(\text{RA}) + P(\text{AR}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{12} = 0{,}47$

3. Halla la probabilidad de obtener dos bolas del mismo color al extraer sin devolución dos bolas de una urna que contiene 5 bolas rojas y 4 verdes.



$P(\text{RR}) + P(\text{VV}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{4}{9} = 0{,}44$

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

1. Clasifica los siguientes experimentos como deterministas (D) o de azar (A):

a) Sacar una bola de una urna con bolas de distintos colores. → Azar.

b) Poner un helado al Sol. → Determinista.

c) Salir de paseo sin paraguas mientras está lloviendo. → Determinista.

d) Lanzar al aire un dado de quinielas. → Azar.

2. Aplicando la regla de Laplace, calcula la probabilidad de obtener un 5 al extraer una carta de una baraja española.

$E = \{1O, 2O, 3O, \ldots, 11B, 12B\}$

$A = \{5O, 5C, 5E, 5B\}$

$P(A) = 4/40 = 1/10 = 0{,}1$

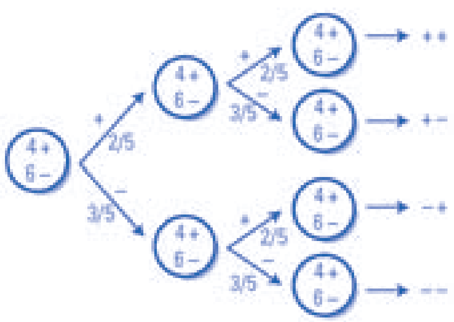
3. Si los sucesos A y B son compatibles y $P(A) = 2/3$, $P(B) = 2/5$, $P(A \cap B) = 1/4$, calcula $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{49}{60} = 0{,}82$$

4. Calcula la probabilidad de obtener un número múltiplo de 5 al lanzar al aire un dado con forma de icosaedro, con las caras numeradas del 1 al 20.

$E = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ $A = \{5, 10, 15, 20\}$ $P(A) = 4/20 = 1/5 = 0{,}2$

5. En una urna tenemos 4 bolas marcadas con el signo + y 6 bolas marcadas con el signo –. Extraemos dos bolas con devolución. Calcula la probabilidad de que las dos bolas tengan el mismo signo.



$$P(\text{Mismo signo})\ P(++) + P(--) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25} = 0{,}52$$