5 Inecuaciones

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Resolver inecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
- Resolver sistemas de ecuaciones con una incógnita.
- Resolver de forma gráfica inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- Resolver de forma gráfica sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- Plantear y resolver problemas con inecuaciones.

Antes de empezar

Para ponerte en situación

Las inecuaciones se utilizan con frecuencia para resolver problemas de mezclas. Aquí se te plantea un problema para que vayas investigando por tu cuenta. En el capítulo 4 encontrarás la solución si no has conseguido hallarla tú solo.

Un vinatero dispone en su almacén de dos tipos de vino: uno a 4€ el litro y otro a 7€ el litro. Quiere mezclarlos para llenar un tonel de 500 litros de capacidad y quiere que la mezcla no cueste más de 6€ ni menos de 5€ el litro. Averigua entre qué valores debe estar la cantidad de litros del primer tipo de vino para que el precio final esté en el intervalo deseado.

Las imágenes adjuntas te presentan dos situaciones próximas a la solución del problema. Usa la calculadora para intentar aproximar más los resultados al valor real de la solución.

1. Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Definiciones

Una **desigualdad** es cualquier expresión en la que se utilice alguno de los siguientes símbolos:

< (menor que), > (mayor que)
≤ (menor o igual que), ≥ (mayor o igual que)

Por ejemplo:

$2<3$ (dos es menor que 3)
$7>\pi$ (siete es mayor que pi)
$x\leq 5$ (x es menor o igual que 5)

Una **inecuación** es una **desigualdad** entre expresiones algebraicas. Aquí estudiamos sólo las de primer grado.

Una **inecuación de primer grado** es una inecuación en la que sus dos miembros son polinomios de grado menor o igual a 1.

Las **soluciones** de una inecuación son todos los números reales que hacen que dicha inecuación sea cierta.

Inecuaciones equivalentes

El proceso de resolución de inecuaciones que veremos después se basa (igual que en el caso de las ecuaciones) en la transformación de la inecuación inicial en otra equivalente más sencilla.

Se dice que dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones.

- ✓ Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta la misma cantidad, se obtiene una inecuación equivalente.
- ✓ Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por una misma cantidad, se obtiene una inecuación equivalente con el mismo sentido de la desigualdad, si esa cantidad es positiva, y con el sentido contrario si esa cantidad es negativa.

Las desigualdades pueden ser **ciertas** o **falsas**.

Por ejemplo:

$2 < 3$ es una desigualdad cierta

$2 > 3$ es una desigualdad falsa

$x < 5$ es una desigualdad que puede ser cierta para algunos valores de x, y falsa para otros.

Los números o las expresiones que aparecen a ambos lados de los símbolos de la desigualdad reciben el nombre de **miembros** de la desigualdad.

Recuerda que también se usa ese nombre en las igualdades y en las ecuaciones.

Una **inecuación** es una desigualdad cuyos miembros son expresiones algebraicas.

Por ejemplo:

$3x+7y<5,\quad x^2-3x+5\geq 0,\quad \frac{3-x}{2+x+y}<5-xy$

Si los dos miembros de la inecuación son polinomios hablaremos de una inecuación polinómica.

Los dos primeros ejemplos son de este tipo, en cambio el tercero no lo es.

Si ambos polinomios son de grado no superior a 1 hablamos de una inecuación de primer grado.

El primer ejemplo es de este tipo.

El segundo ejemplo tiene una **incógnita**; los otros tienen dos.

Resolver una inecuación es encontrar todos los números reales que hacen que sea cierta. A estos números los llamaremos **soluciones** de la inecuación.

A diferencia de las ecuaciones, es frecuente que una inecuación tenga infinitas soluciones, por lo que para representar el conjunto de esas soluciones se suele utilizar la notación de intervalos que usamos en el primer capítulo de estas lecciones.

Por ejemplo, si nos dan la inecuación $2x < 6$, las soluciones se expresan de cualquiera de estas formas:

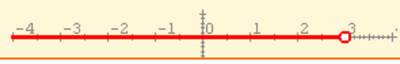
$\{x\in\mathbb{R} \,/\, x<3\}$

Conjunto de todos los números reales menores que 3, ó

$x \in (-\infty,3)$

números que pertenecen al intervalo indicado

o, en forma gráfica:



Resolución

Este proceso consiste en ir transformando la inecuación inicial en otras equivalentes más simples hasta que el resultado final sea de alguno de los siguientes tipos:

$$x<k\,,\; x\leqslant k\,,\; x>k\,,\; x\geqslant k$$

o hasta que el resultado final sea contradictorio, en cuyo caso, la inecuación no tiene soluciones.

EJEMPLO: $\mathbf{x+2\leq 1}$

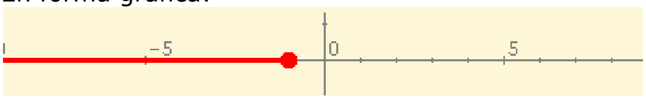
Restamos 2 a los dos miembros y queda: $\mathbf{x\leq -1}$

El conjunto de soluciones se representa de cualquiera de las siguientes maneras:

a) Como conjunto: $\{x\in IR \,/\, x\leq -1\}$

b) Como intervalo: $(-\infty,-1]$

c) En forma gráfica:



$-2x - 2 \geq -3$

Sumamos 2 a los dos miembros y queda:

$-2x \geq -1$

Dividimos los dos miembros por -2 y queda:

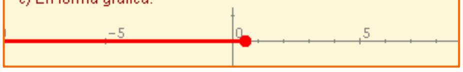
$x \leq \frac{-1}{-2} = 0{,}50$

Soluciones:

a) Como conjunto: $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 0{,}50\}$

b) Como intervalo: $(-\infty, 0{,}50]$ (*intervalo cerrado*)

c) En forma gráfica:



$-1x + (-1) \geq -1x + (-3)$

Restamos -1 y -1 x a los dos miembros y queda:

$0 \geq -2$

Como esto siempre es cierto,

las soluciones son todos los números reales.

Soluciones:

a) Como conjunto: $\{x \in \mathbb{R}\}$

b) Como intervalo: $(-\infty, +\infty)$

Sistemas de inecuaciones

Un **sistema de inecuaciones de primer grado** es un conjunto de dos o más inecuaciones de primer grado.

Para resolver un sistema de inecuaciones con una incógnita se resuelve cada inecuación por separado. Las soluciones del sistema las forman todos los números reales que satisfagan todas y cada una de las inecuaciones del sistema.

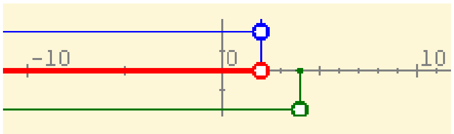
Cada inecuación del sistema debe resolverse de forma independiente hasta que quede en alguna de las formas siguientes:

$$x<k\,,\; x\leqslant k\,,\; x>k\,,\; x\geqslant k$$

En el margen puedes ver algunos ejemplos de resolución de sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita.

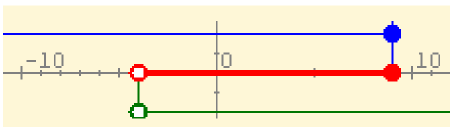
$\begin{cases} x<2 \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x\in(-\infty,2) \\ x\in(-\infty,4) \end{matrix}$

Soluciones del sistema: $x\in(-\infty,2)$



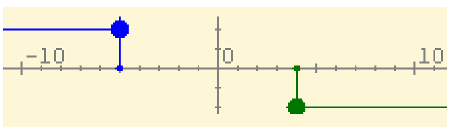
$\begin{cases} x\leq 9 \\ x>4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x\in(-\infty,9] \\ x\in(4,+\infty) \end{matrix}$

Soluciones del sistema: $x\in(4,9]$



$\begin{cases} x\leq -5 \\ x\geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x\in(-\infty,-5] \\ x\in[4,+\infty) \end{matrix}$

Soluciones del sistema: **No tiene**



EJERCICIOS resueltos

1. En cada caso indica cuál de las inecuaciones, I, II, III, IV es equivalente a la dada:

a) Dada la inecuación $-4x \le -3x - 5$, indica cuál de las siguientes inecuaciones es equivalente a ella: I) $-x \ge -5$ II) $x \le -5$ III) $x \le 5$ IV) $-x \le -5$

b) Dada la inecuación $-9x \le 6$, indica cuál de las siguientes inecuaciones es equivalente a ella: I) $x \ge -\frac{6}{9}$ II) $x \le -\frac{6}{9}$

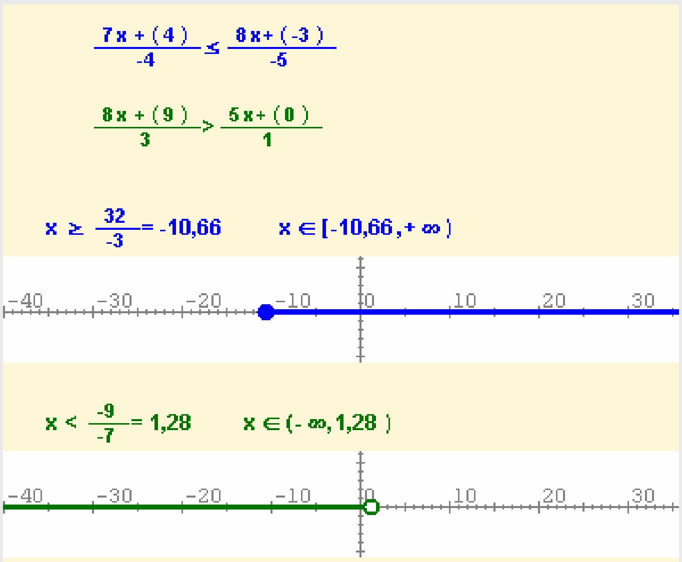
c) Dada la inecuación $\frac{-6x - 5}{9} \le 5$, indica cuál de las siguientes inecuaciones es equivalente a ella: I) $x \ge -\frac{50}{6}$ II) $x \le -\frac{50}{6}$

2. Resuelve la inecuación $\frac{-6x + 7}{-3} > \frac{8x - 4}{2}$

$$\frac{-6x + 7}{-3} > \frac{8x - 4}{2} \Leftrightarrow -12x + 14 < -24x + 12 \Leftrightarrow 12x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones mostrando las soluciones en las formas indicadas en la explicación:



Las soluciones comunes son los puntos que son a la vez mayores o iguales que −10'66 y menores estrictamente que 1,28.

Por tanto las soluciones del sistema son los puntos del intervalo

[-10'66,1'28)

2. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Resolución por descomposición

Una **inecuación de segundo grado** es toda inecuación equivalente a una de las siguientes:

$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c<=0$

$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c>=0$

siendo a, b y c números reales.

Si el polinomio que caracteriza la inecuación tiene raíces reales, se puede usar su descomposición en factores para resolverla como un sistema de ecuaciones de primer grado. Se pueden dar los siguientes casos:

CASO 1: a (x-r1) (x-r2) <0

Para que el producto de tres factores sea negativo han de ser negativos uno o tres de ellos.

- Si a es positivo, sólo otro de los factores puede serlo, por lo que la inecuación es equivalente a los sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} x-r1<0 \\ x-r2>0 \end{array}\right\} \quad ó \quad \left.\begin{array}{l} x-r1>0 \\ x-r2<0 \end{array}\right\}$$

- Si a es negativo, los otros dos deben ser simultáneamente positivos o negativos, por lo que la inecuación es equivalente a los sistemas

$$\left.\begin{array}{l} x-r1<0 \\ x-r2<0 \end{array}\right\} \quad ó \quad \left.\begin{array}{l} x-r1>0 \\ x-r2>0 \end{array}\right\}$$

CASO 2: a (x-r1) (x-r2) ≤ 0

Sólo se diferencia del caso anterior en que ahora los intervalos son cerrados.

CASO 3: a (x-r1) (x-r2) > 0

Similar al caso 1.

CASO 4: a (x-r1) (x-r2) ≥ 0

Similar al caso 2.

RECUERDA:

Las soluciones de una ecuación de segundo grado

$ax^2+bx+c=0$

vienen dadas por la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

siempre que el discriminante, b^2-4ac, sea mayor o igual que cero. Y si llamamos r1 y r2 a las posibles soluciones, entonces:

$ax^2+bx+c=a(x-r1)(x-r2)$

Si el discriminante es nulo, sólo hay una solución, r, y

$ax^2+bx+c=a(x-r)^2$

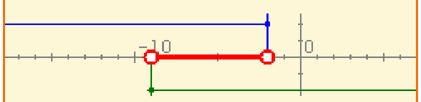
EJEMPLOS CASO 1:

4(x+2)(x+9)<0

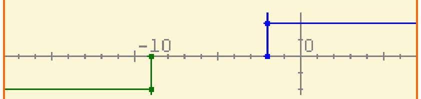
equivale a los sistemas:

$$\begin{cases} x<-2 \\ x>-9 \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} x>-2 \\ x<-9 \end{cases}$$

Solución del primero: (-9,-2)



El segundo no tiene solución



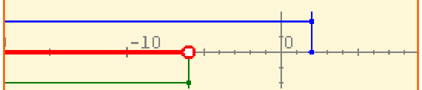
SOLUCIÓN: (-9,-2)

-8(x-2)(x+6)<0

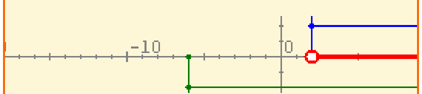
equivale a los sistemas:

$$\begin{cases} x<2 \\ x<-6 \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} x>2 \\ x>-6 \end{cases}$$

Solución del primero: (-∞,-6)



Solución del segundo: (2,+∞)



SOLUCIÓN: (-∞,-6) ∪ (2,+∞)

CASO 5: a $(x-r)^2 <0$

Si a>0 nunca es cierto y no tiene soluciones. Si a<0 siempre es cierto y las soluciones son todos los números reales.

CASO 6: a $(x-r)^2 \leq 0$

Si a>0 sólo es cierto si x=r, luego el conjunto solución tiene un único elemento. Si a<0 siempre es cierto y las soluciones son todos los números reales.

CASO 7: a $(x-r)^2 >0$

Es como el caso 5 pero con las situaciones al revés.

CASO 8: a $(x-r)^2 \geq 0$

Es como el caso 6 pero con las situaciones al revés.

El cuadrado de un nº distinto de 0 siempre es positivo, $(x-3)^2 \geq 0$.

- **$-2(x-3)^2<0$** Solución: IR
- **$2(x-3)^2 \leq 0$** Solución: x=3
- **$2(x-3)^2>0$** Solución: IR
- **$-2(x-3)^2>0$** No tiene solución

Resolución general

El procedimiento empleado en el apartado anterior es válido si el polinomio de segundo grado resultante tiene raíces reales. En caso contrario no nos sirve.

En este apartado veremos un procedimiento general que es válido para cualquier inecuación de segundo grado, tenga o no raíces reales.

Este procedimiento se basa en saber si la representación gráfica del polinomio (una parábola) está abierta hacia arriba o hacia abajo y si corta al eje de abscisas.

Consideremos el polinomio

$$ax^2+bx+c$$

Ya viste que su gráfica es una parábola abierta hacia arriba si a es positiva y hacia abajo si a es negativa.

El **discriminante** del polinomio es

$$\Delta=b^2-4ac$$

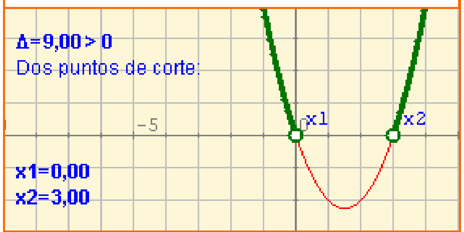
Si Δ>0 la gráfica corta al eje X en dos puntos (x1 y x2 que se obtienen con la fórmula de la ecuación de segundo grado); si Δ=0 la gráfica corta al eje X en un solo punto y si Δ<0 la gráfica no corta al eje X.

A la izquierda puedes ver algunos ejemplos que ilustran este procedimiento de resolución gráfica.

$x^2-3x>0$

$y=x^2-3x$

a>0 la parábola está hacia abajo

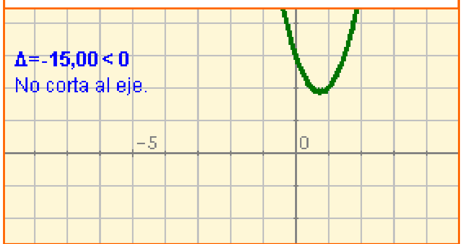


Solución: (-∞,0) U (3,+ ∞)

$2x^2-3x+3>0$

$y=2x^2-3x+3$

a>0 la parábola está hacia arriba

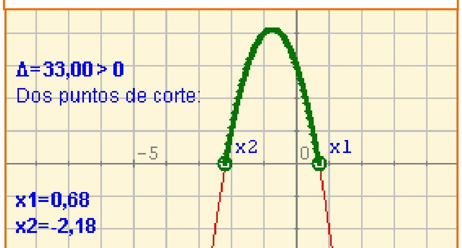


Sin solución

$-2x^2-3x+3>0$

$y=-2x^2-3x+3$

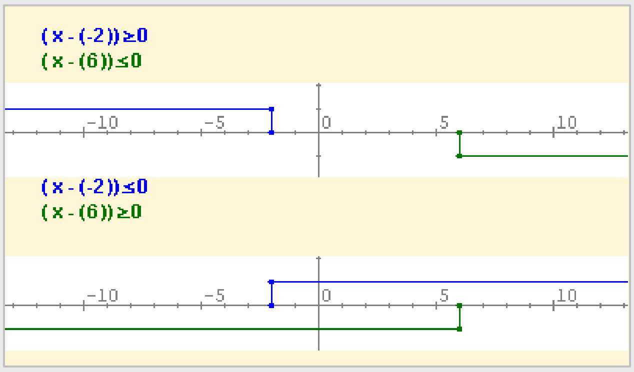
a<0 la parábola está hacia abajo



Solución: (-2,18 , 0,68)

EJERCICIOS resueltos

4. Resuelve la inecuación siguiente por descomposición: $2x^2-8x-24 \leq 0$



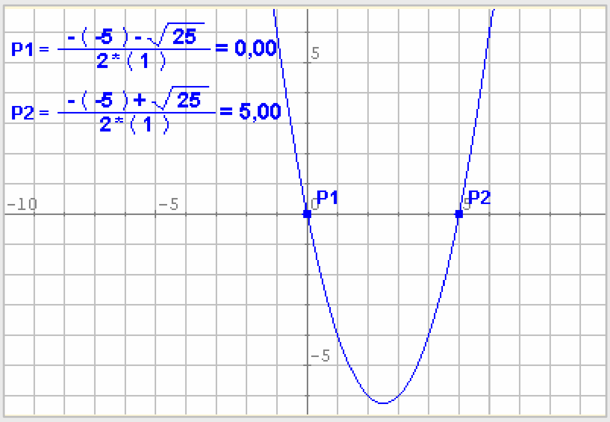
Hallamos las raíces del polinomio:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+192}}{4} = \begin{matrix} 6 \\ -2 \end{matrix}$$

Descomponemos la inecuación en factores: $2(x-6)(x+2) \leq 0$.

La inecuación es equivalente a los dos sistemas de la izquierda. El primero no tiene soluciones y las soluciones del segundo y de nuestra inecuación son los puntos del intervalo cerrado **[-2,6]**

5. Resuelve la inecuación siguiente en forma gráfica: $x^2-5x>0$



Hallamos las raíces del polinomio:

$$x\,(x-5) = 0$$

Se trata de una parábola abierta hacia arriba (coeficiente principal 1>0) que corta al eje de abscisas en los puntos x=0 y x=5. luego la solución de la inecuación es

$$(-\infty,0) \cup (5,+\infty)$$

3. Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Definiciones

Una **inecuación de primer grado con dos incógnitas** es cualquier inecuación equivalente a alguna de éstas:

$ax+by+c<0$ $\qquad$ $ax+by+c \le 0$

$ax+by+c>0$ $\qquad$ $ax+by+c \ge 0$

En este caso, las soluciones no son conjuntos de números, sino conjuntos de parejas de números, por lo que no pueden representarse sobre una línea recta: deben representarse como subconjuntos del plano.

RECUERDA:

$$ax+by+c = 0$$

es la **ecuación general de una recta** en el plano.

Usaremos este hecho para resolver las inecuaciones de primer grado con dos variables.

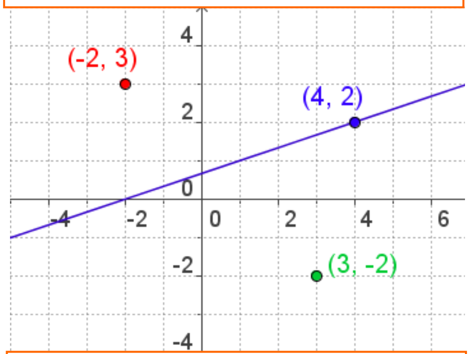
Resolución gráfica

Una solución de una inecuación de dos variables es una pareja de números (x_0,y_0), tales que al sustituir sus valores en las incógnitas de la inecuación, hacen que la desigualdad sea cierta. Cada pareja de números reales se puede representar como un punto del plano.

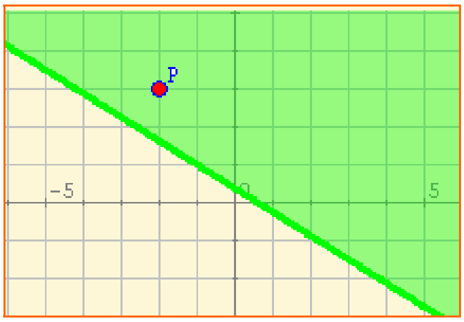
Por tanto, **resolver la inecuación equivale a obtener todos los puntos del plano cuyas coordenadas hacen que se verifique la desigualdad**.

Para ello se procede de la siguiente forma: se dibuja la recta, se elige un punto que no pertenezca a la misma y se comprueba si las coordenadas del punto cumplen la desigualdad o no, si la cumplen la zona en la que está el punto elegido es la solución de la inecuación, si no la cumplen la solución es la otra zona.

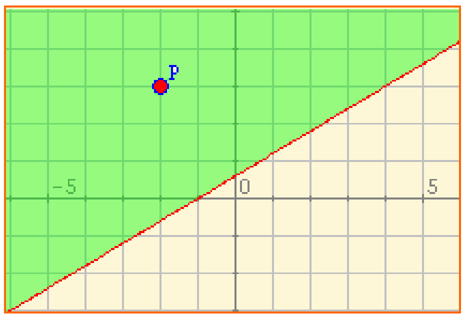
La recta **x-3y+2=0** divide al plano en dos semiplanos.
Averigua en qué zonas del plano, los valores que se obtienen al sustituir las coordenadas de un punto cualquiera en la ecuación de la recta, son positivos negativos o nulos.



A(4,2) $\qquad$ $4-3\cdot2+2=0$
el punto está en la recta
B(-2,3) $\qquad$ $-2-3\cdot3+2=-7<0$
C(2,-3) $\qquad$ $2-3\cdot(-3)+2=13>0$



-5x-8y+3≤0 $\qquad$ P(-2,3)
$5\cdot(-2)-8\cdot3+3=-11<0$
La zona verde es la solución, incluida la recta puesto que la desigualdad es ≤



3x-5y+3<0 $\qquad$ P(-2,3)
$3\cdot(-2)-5\cdot3+3=-18<0$
La zona verde es la solución.

Sistemas de inecuaciones

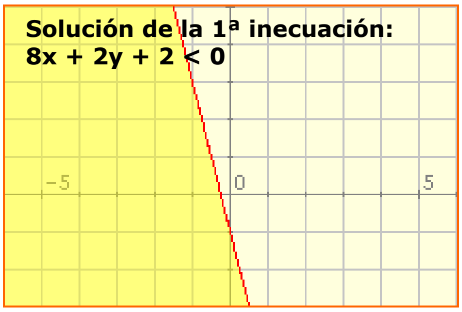
Un **sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas** es un conjunto formado por dos o más inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Como en el caso de los sistemas con una incógnita se resuelve cada inecuación por separado, y el conjunto de todas las soluciones comunes a todas las inecuaciones del sistema es el conjunto solución del mismo.

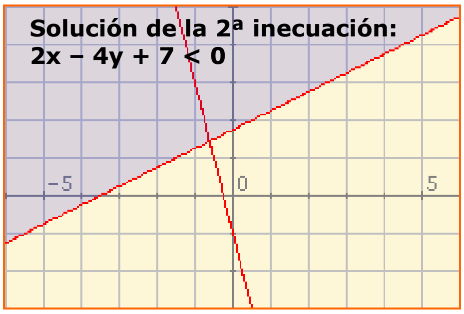
Fíjate en los ejemplos desarrollados y observa que pueden darse situaciones sin solución.

$$8x + 2y + 2 < 0$$
$$2x - 4y + 7 < 0$$

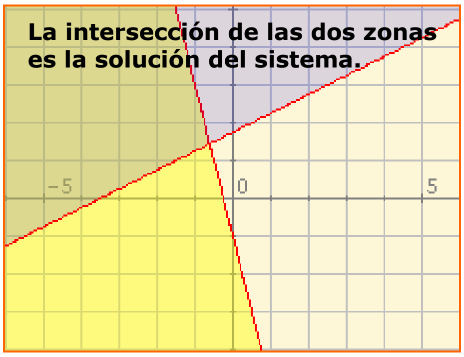
Solución de la 1ª inecuación:
$8x + 2y + 2 < 0$



Solución de la 2ª inecuación:
$2x - 4y + 7 < 0$



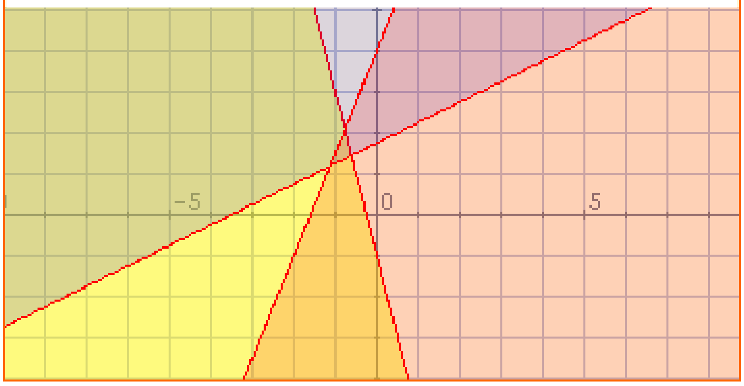
La intersección de las dos zonas es la solución del sistema.



Añadiendo una tercera inecuación:

$8x + 2y + 2 < 0$
$2x - 4y + 7 < 0$
$5x - 2y + 8 < 0$

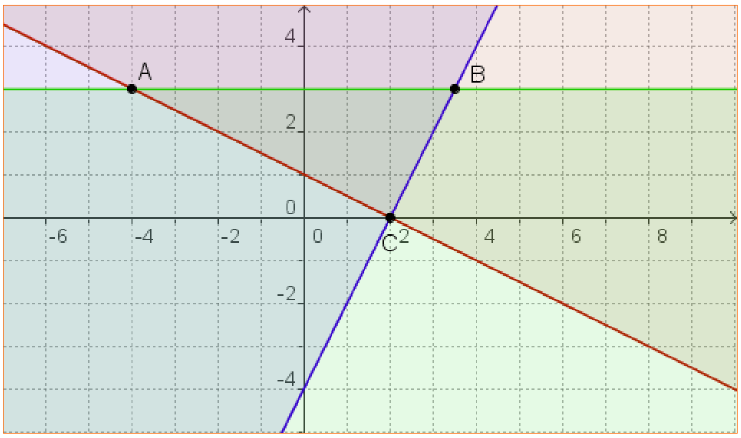
La solución es el triángulo común a las tres zonas



OTRO EJEMPLO

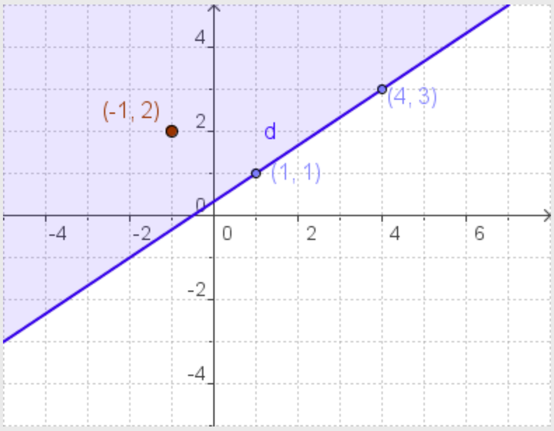
$x + 2y - 2 \geq 0$
$2x - y - 4 \leq 0$
$y - 3 \leq 0$

La solución es el triángulo de vértices ABC, común a las tres zonas



EJERCICIOS resueltos

6. Averigua si el punto P(-1,-2) es una solución de la inecuación $-2x + 3y \le 1$ y dibuja el semiplano solución, indicando si incluye o no a la recta $-2x + 3y = 1$



Podemos dibujar la recta dando dos valores a x y obteniendo los correspondientes valores de y.

x=1 y=1 x=-2 y=-1

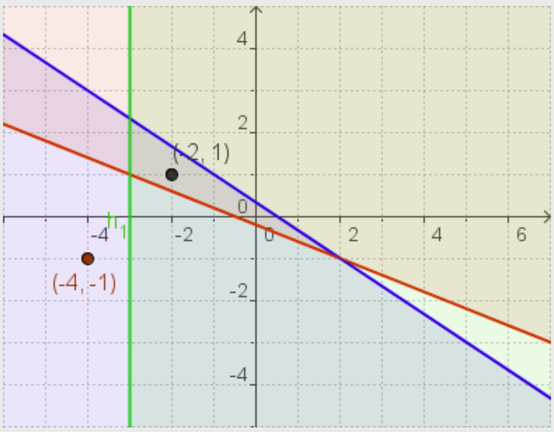
A continuación sustituimos las coordenadas de P en el polinomio y vemos que la desigualdad es cierta.

Por tanto la solución es el semiplano donde está P, incluyendo la recta, porque el símbolo de desigualdad es menor o igual.

7. Averigua si el punto P(-4,-1) es una solución del sistema de inecuaciones:

$$-2x-5y-1<0$$
$$2x+3y-1<0$$
$$-x-3<0$$

Dibuja el conjunto de soluciones y si P no pertenece a este conjunto encuentra algún punto que lo haga.



Observa en el dibujo los valores que se obtienen al sustituir las coordenadas de P en los tres polinomios. Los valores obtenidos cumplen las dos últimas inecuaciones pero no la primera, por lo tanto P no es una solución del sistema.

Las soluciones son los puntos que estén por encima de la recta roja (1ª), por debajo de la recta azul (2ª) y a la derecha de la recta verde (3ª). Es decir, todos los puntos del interior del triángulo que determinan las tres rectas.

Una posible solución es Q (-2,1)

4. Problemas con inecuaciones.

Planteamiento y resolución

Para resolver un problema con inecuaciones debemos seguir los siguientes pasos:

1. **Asignación de variables**: poner nombre a los términos desconocidos.
2. **Planteamiento**: establecer relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos, planteando una o varias inecuaciones (de primero o de segundo grado, con una o con varias incógnitas).
3. **Resolución**: de entre los métodos explicados aplicar el que se ajuste a nuestro planteamiento.

Un vinatero dispone en su almacén de dos tipos de vino: uno a 4€ el litro y otro a 7€ el litro. Quiere mezclarlos para llenar un tonel de 500 litros de capacidad y quiere que la mezcla no cueste más de 6€ ni menos de 5€ el litro. Averigua entre qué valores debe estar la cantidad de litros del primer tipo de vino para que el precio final esté en el intervalo deseado.

ASIGNACIÓN DE VARIABLES:
x=nº de litros del primer tipo
500-x=nº de litros del segundo tipo

PLANTEAMIENTO:
$4x+7(500-x)>5\cdot500$
$4x+7(500-x)<6\cdot500$

RESOLUCIÓN:
$4x+3500-7x>2500 \rightarrow -3x>-1000$
$\rightarrow x<\frac{1000}{3}=333,3...$
$4x+3500-7x<3000 \rightarrow -3x<-500$
$\rightarrow x>\frac{500}{3}=166,6...$

SOLUCIÓN:
x puede tomar cualquier valor entre 167 y 333 litros.

EJERCICIOS resueltos

Problema 1

Un fabricante de piensos quiere obtener una tonelada de un determinado pienso, para venderlo a 0'21€/kg. Para obtenerlo va a mezclar dos tipos de pienso de los que ya dispone y que cuestan a 0'24€/kg y 0'16€/kg respectivamente.

1) Calcula la cantidad que debe entrar al menos en la mezcla del pienso más barato para no perder dinero.
2) ¿Cuáles deben ser las cantidades de cada tipo en la mezcla si quiere ganar al menos 0'03€/kg?

Asignación de variables: x=nº kg del tipo barato 1000-x: nº de kg del tipo caro

Planteamiento: Coste de la mezcla: $0,16x+0,24(1000-x)$
Para no perder dinero debe cumplir: $0,16x+0,24(1000-x)\leq0,21\cdot1000$
Para ganar al menos 0,03€/kg dede ser: $0,16x+0,24(1000-x)\leq0,18\cdot1000$

Resolución: a) $-0,08x\leq-30 \rightarrow x\geq30/0,08 \rightarrow x\geq375$ kg
b) $-0,08x\leq-60 \rightarrow x\geq60/0,08 \rightarrow x\geq750$ kg

Problema 2

Una biblioteca tiene un presupuesto de 600€ para adquirir ejemplares de dos nuevas novelas que se han editado. Cada ejemplar de la primera cuesta 25€ y cada ejemplar de la segunda 30€. ¿Cuántos ejemplares de cada una puede adquirir? Representa el problema en forma de un sistema de inecuaciones, represéntalo gráficamente e indica varias posibles soluciones.

x=nº ejemplares de la 1ª y: nº de ejemplares de la 2ª

Planteamiento: $25x+30y\leq600$ $x>0$ $y>0$

Solución: Cualquier punto de la zona sombreada con valores enteros es solución del problema. Si el punto está en la recta se ajusta del todo al presupuesto.
Por ejemplo x=10, y=10 ó x=6, y=15.

Para practicar

1. Inecuaciones con valor absoluto.
Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x+6| < 1$

b) $|-x-4| \leq 4$

c) $|-2x-1| > 3$

d) $|2x-4| \geq 5$

2. Inecuaciones de segundo grado.
Resuelve las inecuaciones:

a) $2x^2 - x + 2 \leq 0$

b) $-2x^2 + 6x + 1 \leq 0$

c) $-x^2 + 7x - 9 \geq 0$

d) $(x - 8)(x - 1) < 0$

3. Inecuaciones racionales.

Resuelve las inecuaciones:

a) $\dfrac{x+4}{1-x} < 0$

b) $\dfrac{2x+4}{3+x} > 0$

c) $\dfrac{3x-5}{2x+1} \leq 0$

d) $\dfrac{x+4}{1-x} \geq 0$

4. Inecuaciones con dos incógnitas.
Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} -3x < 1 \\ -4x - 3y > 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y < 2 \\ -5x + 4y > 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -4x - y < 4 \\ -5x - 4y > 4 \end{array}\right\}$

EXPLICACIÓN Y EJEMPLO

En el primer tema vimos que el valor absoluto de la diferencia entre dos números reales, $|x-y|$, equivale a calcular la distancia entre los puntos que representan a dichos números.

Es frecuente encontrar problemas en los que es necesario calcular todos los puntos cuya distancia a un punto fijo sea mayor o menor que cierto valor prefijado. En estos casos el problema equivale a resolver alguna de estas inecuaciones:

$$|x-a|<b,\ |x-a|\leq b,\ |x-a|>b,\ |x-a|\geq b$$

Que la distancia entre **x** y **a** sea menor que b significa que x se encuentra *dentro* del intervalo (a-b,a+b), por tanto, x > a-b y, al mismo tiempo, x < a+b, por lo que la inecuación

$|x-a|<b$ es equivalente al sistema $\left\{\begin{array}{l} x-a > -b \\ x-a < b \end{array}\right.$ y

$|x-a|\leq b$ es equivalente al sistema $\left\{\begin{array}{l} x-a \geq -b \\ x-a \leq b \end{array}\right.$

Que la distancia entre **x** y **a** sea mayor que b significa que x se encuentra *fuera* del intervalo (a-b,a+b), por tanto, x < a-b ó x > a+b, por lo que las soluciones de la inecuación

$$|x-a|>b$$

son todas las soluciones de $x-a<-b$ y todas las de $x-a>b$; y las soluciones de

$$|x-a|\leq b$$

son todas las soluciones de $x-a\leq -b$ y todas las de $x-a\geq b$.

Observa que en estos casos no se trata de un sistema de inecuaciones sino de todas las soluciones de las dos.

EXPLICACIÓN:

Llamamos **inecuaciones racionales** a las inecuaciones equivalentes a las del tipo:

$$\frac{ax+b}{cx+d}<0 \quad ó \quad \frac{ax+b}{cx+d}\leq 0$$

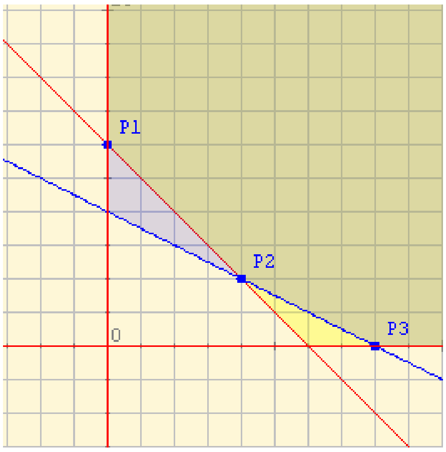
La dificultad de estas inecuaciones estriba en que no sabemos si cx+d es positivo o negativo, por lo que no podemos quitar el denominador sin más. Por ello, para resolver este tipo de inecuaciones debemos transformarlas previamente en dos sistemas de inecuaciones, teniendo en cuenta que, para que el cociente sea negativo, si el denominador es negativo el numerador debe ser positivo y viceversa:

Así la inecuación $\dfrac{ax+b}{cx+d}<0$ es equivalente a la pareja de sistemas:

$$\left\{\begin{array}{l} ax+b>0 \\ cx+d<0 \end{array}\right\} \quad ó \quad \left\{\begin{array}{l} ax+b<0 \\ cx+d>0 \end{array}\right\}$$

que se resuelven por los procedimientos conocidos y las soluciones de la inecuación inicial son la unión de las soluciones de ambos sistemas.

Para saber más



¿Para qué sirven las inecuaciones?

Una de las principales utilidades de las inecuaciones es su aplicación a los **problemas de decisión**: se trata de programar una situación con el objetivo de decidirse por una alternativa que sea **óptima**. En general, el proceso de **optimizar** consiste en lograr un resultado **máximo** o **mínimo** según convenga al problema planteado. Mira el ejemplo adjunto.

PROGRAMACIÓN DE UNA DIETA PARA CEBAR ANIMALES

Se intenta programar una dieta con dos alimentos A y B.

Una unidad del alimento A contiene 500 calorías; una unidad de B contiene 500 calorías y 20 gramos de proteínas. La dieta requiere como mínimo 3000 calorías y 80 gramos de proteínas diarias. Si el precio de una unidad de A es 8 y de una unidad B es 12. ¿qué cantidad de unidades de A y de B se debe comprar para satisfacer las exigencias de la dieta a un costo mínimo?.

El esquema siguiente muestra las cantidades respectivas en forma ordenada.

	A	B	mínimo
Calorías	500	500	3000
Proteínas	10	20	80
Precio	8	12	**?**

Sean: **x** el número de unidades del alimento A. **y** el número de unidades del alimento B. De acuerdo a esto, la inecuación 500x + 500y >=3000 representa la restricción o condición relativa a las calorías. Igualmente, 10x + 20y >= 80 corresponde a la restricción referida a la cantidad de proteínas. Además, se debe cumplir que x >= 0 e y >= 0, ya que en ningún caso la cantidad de alimentos A o B puede ser negativa.

La región en color verde es la intersección de los conjuntos solución de las inecuaciones planteadas y se llama **región de soluciones factibles**, ya que las coordenadas de cualquiera de sus puntos satisfacen las restricciones impuestas.

Pero no se ha considerado aún el precio posible de los alimentos. Si x e y son las cantidades de los alimentos A y B, respectivamente, y los precios son 8 y 12, entonces la **función costo** es: **F = 8x + 12y.** Se puede probar que esta función se optimiza, en este caso tomando un valor mínimo, para aquellos valores de x e y que corresponden a un vértice en el gráfico.

Vértices	**Valor de la función costo**
(0,6) x = 0; y = 6	F = 8 x 0 + 12 x 6 = 72
(4,2) x = 4; y = 2	F = 8 x 4 + 12 x 2 = 32 + 24 = 56
(8,0) x = 8; y = 0	F = 8 x 8 + 12 x 0 = 64

De los tres valores de la función costo F, el mínimo es 56. Corresponde a x = 4 e y = 2, es decir, a 4 unidades de A y 2 unidades de B.

Tales cantidades de A y B proporcionan un total de calorías y proteínas de acuerdo a las exigencias planteadas.
4 unidades de A : 4 x 500 = 2000 calorías 2 unidades de B : 2 x 500 = 1000 calorías Total = 3000 calorías
4 unidades de A : 4 x 10 = 40 gramos de proteínas 2 unidades de B : 2 x 20 = 40 gramos de proteínas
Total = 80 gramos de proteínas

El costo mínimo para lograr esto es 56.
Con esta cantidad ,se puede adquirir 4 unidades del alimento A y 2 del B.

Recuerda lo más importante

Inecuaciones equivalentes

Si a los dos miembros de una inecuación se les suma la misma cantidad se obtiene una inecuación equivalente:

x < y <===> x+a < y+a

Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica por la misma cantidad, no nula, se obtiene una inecuación equivalente (**pero ojo con el signo**):

a>0 ==> (x < y <===> ax < ay)

a<0 ==> (x < y <===> ax > ay)

Inecuaciones con una incógnita

Sus soluciones se expresan en forma de intervalos, abiertos si las desigualdades son estrictas (<, >), cerrados en caso contrario (<=, =>).

Inecuaciones de dos incógnitas

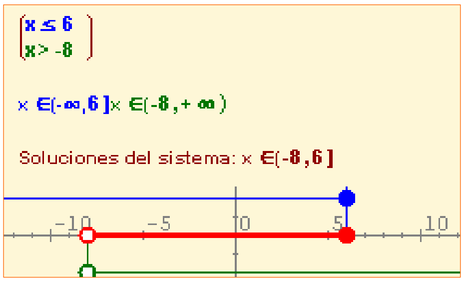
Sus soluciones son semiplanos y se resuelven en forma gráfica.

Inecuaciones de segundo grado.

Pueden resolverse como un sistema o en forma gráfica, averiguando si la parábola que la representa corta al eje X y si se abre hacia arriba o hacia abajo.

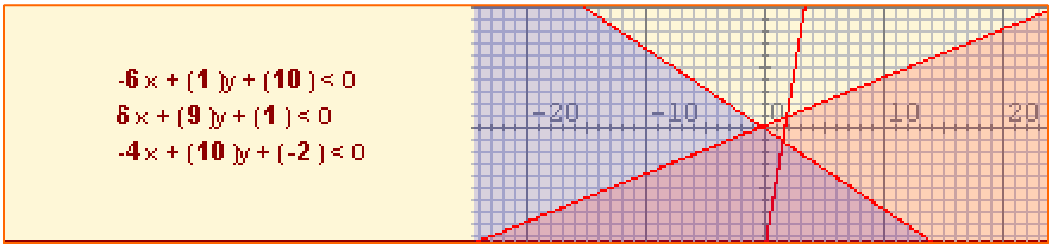
Sistemas con una incógnita

Cada inecuación se resuelve de forma independiente. Las soluciones del sistema son las comunes a todas ellas. Se expresan como intervalos o como unión de intervalos.



Sistemas con dos incógnitas

Cada inecuación se resuelve de forma independiente. Las soluciones del sistema son las comunes a todas ellas. Se resuelven de forma gráfica.



Autoevaluación

1. Resuelve la inecuación: $\dfrac{-2x-4}{3} < 0$

2. Un móvil se desplaza en línea recta a una velocidad que varía entre 69 m/s y 84 m/s ¿Entre qué distancias desde el punto de partida se encuentra el móvil al cabo de diez horas?

3. Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l} x < 5 \\ x \geq 2 \end{array}\right\}$.

4. Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l} x > 5 \\ x \geq 2 \end{array}\right\}$.

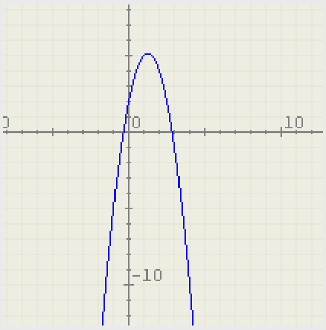
5. Resuelve la inecuación $-2x^2 - 16x - 32 \geq 0$

6. Resuelve la inecuación $-2x^2 + 14x - 20 \geq 0$

7. La imagen adjunta es la gráfica del polinomio de segundo grado de la inecuación $-2x^2 + 5x + 2 < 0$. Indica cuál es el conjunto solución de la misma.

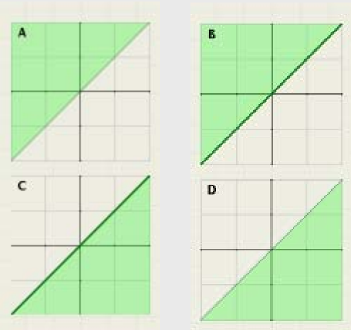
a) No tiene soluciones
b) Todos los números reales
c) Un intevalo finito
d) La unión de dos intervalos infinitos

7



8. Indica cuál de las siguientes imágenes representa el conjunto solución de la inecuación $x < y$

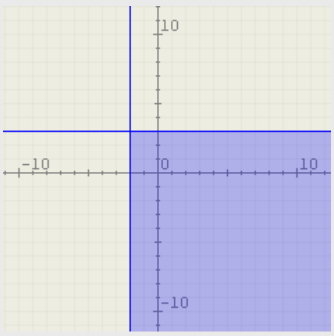
8



9. Indica cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas tiene como conjunto solución esta imagen:

a) x<-2 y<3
b) x<-2 y>3
c) x>-2 y<3
d) x>-2 y>3

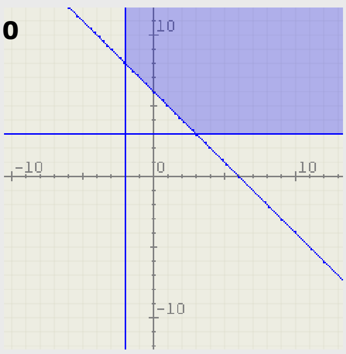
9



10. Indica cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas tiene como conjunto solución esta imagen:

a) x>-2 y>3 x+y>6
b) x<-2 y>3 x+y<6
c) x>-2 y<3 x+y<6
d) x>-2 y>3 x+y<6

10



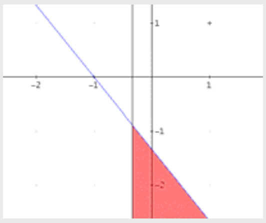
Soluciones de los ejercicios para practicar

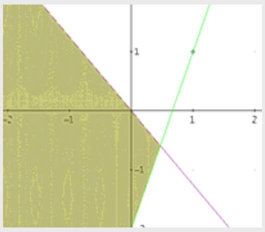
1) Inecuaciones valor absoluto:
   a. (-7,-5)
   b. [-8,0]
   c. (-∞,-1)U(1,+ ∞)
   d. (-∞,-1/2]U[9/2,+ ∞)

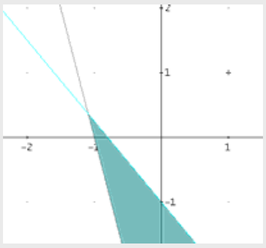
2) Inecuaciones 2º grado:
   a. No tiene soluciones
   b. (-∞,-0’16]U[3’16,+ ∞)
   c. [1’7,5’3]
   d. (1,8)

3) Inecuaciones Racionales
   a. (-∞,-4)U(1,+ ∞)
   b. (-∞,-3)U(-2,+∞)
   c. (-1/2,5/3]
   d. [-4,1)

4) Inecuaciones con 2 incógnitas

a. 

b. 

c. 

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. (-2,+ ∞)
2. Entre 2484 y 3024 km
3. [2,5)
4. (5,+ ∞)
5. {-4}
6. (-∞ ,2) U (5,+ ∞)
7. Respuesta D
8. Respuesta A
9. Respuesta C
10. Respuesta A

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: **4º**
Quincena nº: **5**	**Asignatura:** **Matemáticas B**	
Fecha:	**Profesor de la asignatura:**	

1. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|2x+7|<10$

b) $|2x+7|\geq 10$

2. Resuelve la inecuación: $x^2-3x+2 \leq 0$

3. Resuelve la inecuación: $\dfrac{3x-5}{2} \leq \dfrac{x+1}{-3}$

4. Da tres soluciones del sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 2x+y<1 \\ x-y>0 \end{cases}$

cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314