INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

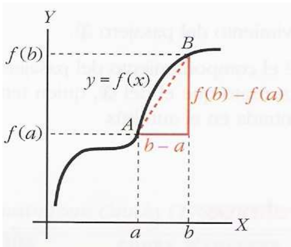
TASA DE VARIACIÓN MEDIA

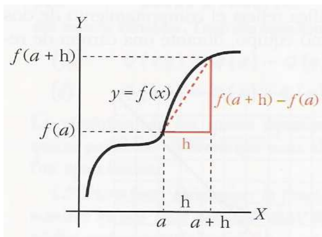
Definición

Se llama **tasa de variación media (T.V.M.)** de una función, y = f(x) en un intervalo [a,b] al cociente: T.V.M.[a,b] = $\dfrac{\text{Variación de f(x)}}{\text{Variación de x}} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

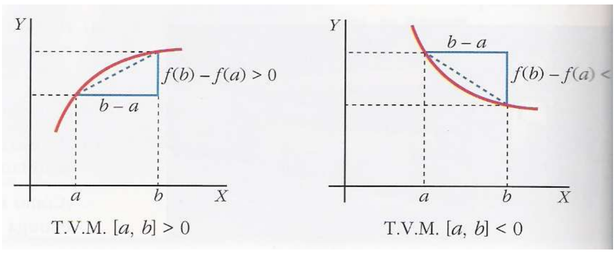
Y es la pendiente del segmento que une los puntos A(a,f(a)) y B(b,f(b))

Con frecuencia, el intervalo se le designa mediante la expresión [a,a+h], nombrando, así, a un extremo del intervalo a, y a su longitud, h. En tal caso, la tasa de variación media se obtiene : T.V.M. [a,a+h] = $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$





Si una función es creciente en [a,b], su tasa de variación media es positiva; y si es decreciente, negativa.



TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

Definición: Se llama **tasa de variación instantánea (T.V.I)** de una función, y = f(x) en un punto a

$$\text{T.V.I.(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Y es la pendiente de la recta tangente a la curva y = f(x) en el punto x = a.

Significado:

Si es positiva ⇒ La función es creciente en el punto a

Si es negativa ⇒ La función es decreciente en el punto a

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

DEFINICIÓN

Llamaremos **derivada de una función y = f(x) en el punto x = a** a la tasa de variación instantánea de dicha función en el punto a, y se designa por f ´(a):

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

SIGNIFICADO

La derivada de la función y = f(x) en el punto x = a es **la pendiente de la recta tangente a la curva y = f(x) en el punto x = a**
Por tanto la ecuación de la recta tangente a una curva en el punto x = a :

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

APLICACIONES

- Si $f'(a) > 0 \Rightarrow$ La función es creciente en el punto x = a
- Si $f'(a) < 0 \Rightarrow$ La función es decreciente en el punto x = a
- Si hay un máximo o mínimo relativo en x = a $\Rightarrow f'(a) = 0$

FUNCIÓN DERIVADA DE OTRA

Se llama **función derivada de f** (o simplemente **derivada de f**) a una función f ´ que asocia a cada abscisa, x, la derivada de f en ese punto, f ´(x), es decir, la pendiente de la curva y = f(x) en ese punto. A la derivada de f la llamaremos f ´ o Df:

$$Df(x) = f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

REGLAS PARA OBTENER LAS DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES

OPERACIONES CON DERIVADAS

- Multiplicación por un número :$(k.f(x))' = k.f'(x)$
- Suma y resta: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- Producto : $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- Cociente : $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- Composición : $[f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$

REGLAS DE DERIVACIÓN

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = n.x^{n-1}$	$y = f^n(x)$	$y' = n.f(x)^{n-1}.f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}}$
$y = a^x$	$y' = a^x. \text{Ln } a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)}.\text{Ln } a.f'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)}.f'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x.\text{Ln}a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x).\text{Ln}a}$
$y = \text{Ln } x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \text{Ln } f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \text{sen } x$	$y' = \cos x$	$y = \text{sen } f(x)$	$y' = \cos f(x).f'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\text{ sen } x$	$y = \cos f(x)$	$y' = -\text{ sen } f(x).f'(x)$
$y = \text{tag } x$	$y' = 1 + \text{tag}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \text{tag } f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} =$ $[1 + \text{tag}^2 f(x)].f'(x)$
$y = \text{arcsen } x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arcsen } f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$y = \text{arccos } x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arccos } f(x)$	$y' = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$y = \text{arctag } x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = \text{arctag } f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

UTILIDAD DE LA FUNCIÓN DERIVADA

CALCULAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN VARIOS PUNTOS

Para hallar $f'(a)$ se calcula la expresión general de la derivada $f'(x)$ y luego se sustituye en la derivada la x por a.

OBTENER LAS ABSCISAS EN LAS CUALES LA DERIVADA TIENE UN CIERTO VALOR

Para averiguar los valores de x para los cuales $f'(x) = k$, se calcula la expresión de la derivada en general $f'(x)$, se iguala a k y se resuelve la ecuación.

OBTENER LAS ABSCISAS DE LOS PUNTOS SINGULARES

Se llaman **puntos singulares** a los puntos de tangente horizontal, es decir, a los puntos en los que la derivada es cero. Entre ellos están los máximos y mínimos relativos, pero puede haber otros.

Las abscisas de los puntos singulares son las soluciones de la ecuación : $f'(x) = 0$

OBTENER LOS TRAMOS DONDE LA CURVA CRECE O DECRECE

Si $f'(x) > 0$ la función es creciente y si $f'(x) < 0$ la curva es decreciente. Por tanto, resolviendo tales inecuaciones se obtienen los intervalos donde la curva crece o decrece.

ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

DOMINIO

- Polinomio : D = R
- Cocientes : D = R – {puntos que anulan el denominador}
- Raíces de índice par : D = {Lo de dentro de la raíz ≥ 0}
- Raíces de índice impar : D = R
- Logaritmos : D = {Lo de dentro del logaritmo > 0}
- Exponenciales : D = R
- Trigonométricas : Seno y coseno D = R ; El resto se estudia como un cociente
- Arcos : D = {-1 ≤ Lo de dentro del arco ≤ 1}

PUNTOS DE CORTE

- Con el eje OX : $y = 0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow P(x_0,0)$
- Con el eje OY : $x = 0 \Rightarrow y = y_0 \Rightarrow P(0,y_0)$

SIMETRÍA

- Simétrica respecto del OY o par: $f(-x) = f(x)$
- Simétrica respecto del Origen o impar : $-f(-x) = f(x)$

SIGNO DE LA FUNCIÓN

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, ...$
- Se resuelve la ecuación $f(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1,.....$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f(x)$ se obtiene el signo de la función

ASÍNTOTAS

- Asíntotas verticales: Puntos donde la función se va al infinito: $y \Rightarrow \infty$, $x = a$
  - Cocientes: Puntos que anulan el denominador
  - Logaritmos : Puntos que anulan lo de dentro del logaritmo
  - Aproximación a la asíntota : Calcular límites laterales
- Asíntotas horizontales : Puntos donde la x se va al infinito : $x \Rightarrow \infty$, $y = b$
  - Cálculo : $\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b$
  - Aproximación(en x = ±100): $\begin{cases} f(x) > b \Rightarrow \text{La función por encima de la asíntota} \\ f(x) < b \Rightarrow \text{La función por debajo de la asíntota} \end{cases}$
- Asíntotas oblicuas
  - Cálculo : $y = mx + n$; $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$; $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$
  - Aproximación(en x = ±100): $\begin{array}{l} f(x) > A\sin t(x) \Rightarrow \text{La función por encima de la asíntota} \\ f(x) < Asint(x) \Rightarrow \text{La función por debajo de la asíntota} \end{array}$

MONOTONIA Y PUNTOS CRÍTICOS

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, ...$
- Se resuelve la ecuación $f'(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1,.....$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f'(x)$ se obtiene el signo de la función
- Si $f'(a) > 0$ la función es creciente en dicho intervalo, y si es < 0 es decreciente.

- Máximo relativo : P(a,f(a)) : x = a es el punto del dominio donde la función pasa de creciente a decreciente.
- Mínimo relativo : P(a,f(a)) : x = a es el punto del dominio donde la función pasa de decreciente a creciente.

CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, ...$
- Se resuelve la ecuación $f''(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1,.....$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f''(x)$ se obtiene el signo de la función
- Si $f''(a) > 0$ la función es convexa en dicho intervalo, y si es < 0 es concava.

- Puntos de inflexión : P(a,f(a)) : x = a es el punto del dominio donde la función cambia la curvatura.

TABLA DE VALORES

Dando valores a la “x” se calculan los correspondientes de la “y” sustituyendo en la función

REPRESENTACIÓN GRÁFICA