FUNCIONES ELEMENTALES

CONCEPTO DE FUNCIÓN

DEFINICIÓN : f es una **función de R en R** si a cada número real, $x \in$ Dom, le hace corresponder un único número real, f(x):

Lo denotamos por : f : Dom -----> R
x -----> y = f(x)

El conjunto Dom de los valores que puede tomar la variable independiente, "x", se llama **dominio de definición de la función.**

El conjunto de los valores que toma la función se llama **recorrido.**

Puesto que tanto la variable "x" como la función "f(x)" toman valores reales, estas funciones se llaman **funciones reales de variable real.**

RAZONES POR LAS QUE EL DOMINO DE DEFINICIÓN PUEDE RESTRINGIRSE :

- Imposible de realizar alguna operación con ciertos valores de x: denominadores que se anulan, raíces cuadradas de números negativos,....
- Contexto real del que se ha extraído la función: Edad de una persona,…
- Por voluntad de quien propone la función: Número menor que 7,...

CÁLCULO DEL DOMINIO :

- FUNCIONES POLINÓMICAS: El dominio de un polinomio es todo R : f (x) = P(x) D(f) = R

- FUNCIONES RACIONALES: El dominio de las funciones racionales es todo R menos los puntos donde se anula el denominador:
  $f(x) = P(x) / Q(x) \qquad D(f) = \{ x \in R / Q(x) \neq 0\} = R - \{ x \in R / Q(x) = 0\}$

- FUNCIONES RADICALES
  $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$ Si n es impar D(f) = R
  Si n es par $D(f) = \{ x \in R / P(x) \geq 0\} = R - \{x \in R / P(x) < 0\}$

- FUNCIONES EXPONENCIALES
  $f(x) = a^{P(x)} \qquad D(f) = R$

- FUNCIONES LOGARÍTMICAS
  $f(x) = \log_a P(x) \qquad D(f) = \{ x \in R / P(x) > 0\} = R - \{x \in R / P(x) \leq 0\}$

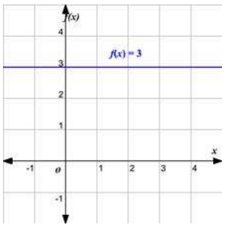
- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS
  $f_1(x) = \text{sen } P(x),\ f_2(x) = \cos P(x) \qquad D(f_1) = D(f_2) = R$

El resto (tangente, secante,….) ponerlas como cociente y estudiar su dominio como una función racional (denominador diferente de cero).

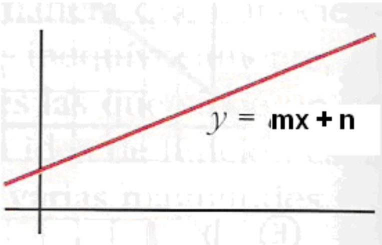
REPRESENTACIÓN Y ESTUDIO DE FUNCIONES

FUNCIONES POLINÓMICAS

- **Grado 0: y = k** **Rectas paralelas al eje OX**



- **Grado 1 : y = mx + n** **Rectas**



La **función polinómica de primer grado** o **función lineal:** y = mx + n, se representa mediante una recta de pendiente m y que pasa por el punto (0,n). La n se llama ordenada en el origen.

Pendiente de una recta es la variación (aumento o disminución) que se produce en la y cuando la x aumenta una unidad. En una ecuación lineal, la pendiente de la recta es el coeficiente de la x cuando se despeja la y. (Si $m > 0$, es creciente; Si $m < 0$, es decreciente)

Si conocemos las coordenadas de dos puntos de la recta: $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ la pendiente se calcula :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ (Δy = Incremento de "y" entre Δx = Incremento de "x")

Si de una recta conocemos un punto $P(x_1,y_1)$ y su pendiente m, la ecuación de la recta es:

$$y - y_1 = m.(x - x_1)$$

Para representarla se dan dos valores cualesquiera a la "x" y se calcula el valor de la "y".

Interpolación y extrapolación lineal

Si sabemos que una función es lineal (al menos aproximadamente) y que pasa por dos puntos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ podemos hallar su valor en cualquier otro punto $x = x_3$

1. Hallamos la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos A y B $\Rightarrow$
$$y = mx + n$$
2. Sustituimos el valor de x_3 en x y calculamos la y.

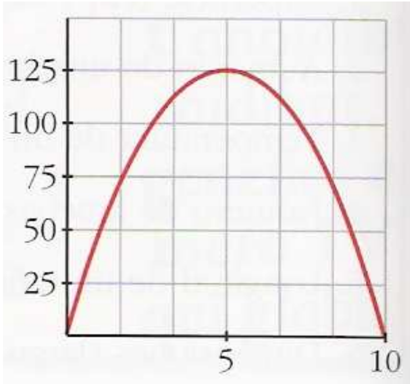
Si $x_3 \in (x_1,x_2)$ estamos interpolando.
Si $x_3 \in (-\infty,x_1) \cup (x_2,+\infty)$ estamos extrapolando.

En la extrapolación, cuanto más alejado esté x_3 del intervalo (x_1,x_2), menos fiable es el valor que obtenemos para $f(x_3)$.

• Grado 2: FUNCIONES CUADRÁTICAS Parábolas

Las **funciones polinómicas de segundo grado** o **funciones cuadráticas** : $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se representan mediante parábolas.

- Tienen ejes paralelos al eje Y
- Las formas de estas parábolas (que sus ramas estén hacia arriba o hacia abajo, que sean más o menos anchas,...) dependen, exclusivamente del valor de a:
  - Si a > 0, las ramas van hacia arriba (Cónvexa)
  - Si a < 0, las ramas van hacia abajo (Cóncava)
  - Cuando mayor sea |a|, más estilizada es la parábola
- La abscisa del vértice de la parábola es : $V_x = -\dfrac{b}{2a}$

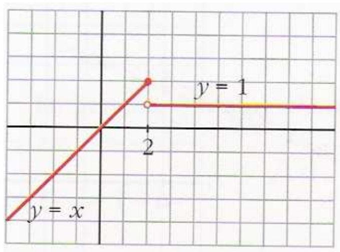


Para representarla se calcula el vértice en la “x” y dos valores más pequeños y dos valores más grandes y se calculan las respectivas “y” de estos valores.

• Grado > 2 : Lo veremos en el tema 12 Curvas

FUNCIONES DEFINIDAS “A TROZOS”

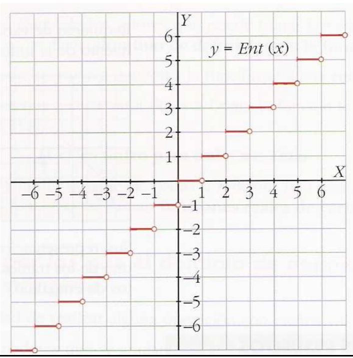
Se calcula su dominio y se hace una tabla de valores para cada trozo(los valores de la tabla en cada trozo dependerá del tipo de función).



DOS FUNCIONES INTERESANTES

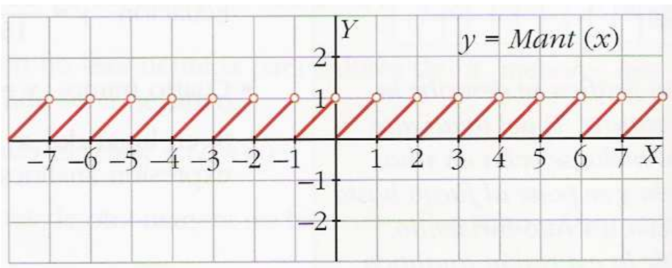
• Función parte entera :

Se llama **parte entera** de un número x al mayor número entero menor o igual a x. A partir de eso, definimos la **función para entera de x,** Ent(x), que hace corresponder a cada número x su parte entera.

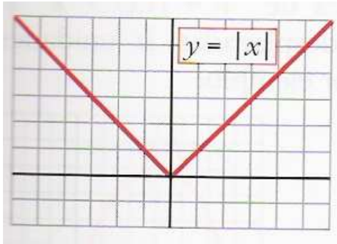


• Función parte decimal :

La **parte decimal** o **mantisa** de un número x es Mant(x) = x – Ent(x). A partir de eso, definimos la **función parte decimal de x,** Mant(x) que hace corresponder a cada número x su parte decimal.



VALOR ABSOLUTO DE UNA FUNCIÓN



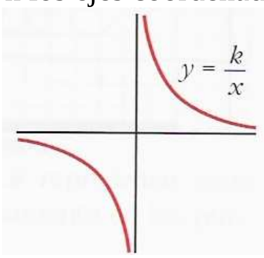
El valor absoluto de un número x coincide con x si es positivo o nulo, o con su opuesto si es negativo: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

El general el valor absoluto de una función se define así: $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$

Para representarla se iguala lo de dentro del valor absoluto a cero y se resuelve. Estos puntos nos dividen la función en trozos por tanto podemos tratarla como una función a trozos.

FUNCIONES RACIONALES (Sencillas, las complicadas las veremos en el Tema 12)

Se llaman **funciones de proporcionalidad inversa** a aquellas cuya ecuación es y = f(x)/g(x) y sus gráficas son hipérbolas. Sus asíntotas son los ejes coordenados.

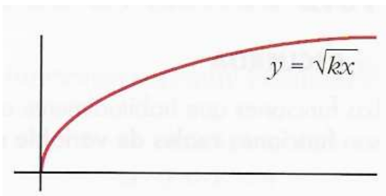


También son hipérbolas las gráficas de las funciones $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Para representarlas se hace previamente la división.

Representación :
- Calcular el dominio
- Hallar una tabla de valores según el dominio
- Dibujarlas teniendo en cuenta las asíntotas.

FUNCIONES RADICALES

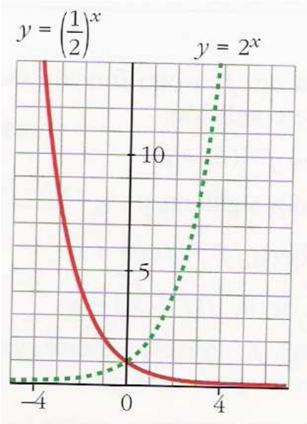
Se llaman **funciones radicales** a aquellas cuya ecuación es $y = \sqrt[n]{f(x)}$



Para representarlas:
- Calcular el dominio
- Hallar una tabla de valores según el dominio. (Importante: f(x) = 0 si es de índice par determinan el dominio y se es de índice impar es el punto de inflexión y hay que tomar valores menores y mayores que él)

FUNCIONES EXPONENCIALES

Se llaman **funciones exponenciales** las que tienen la ecuación $y = a^x$, siendo la base a un número positivo distinto de 1.



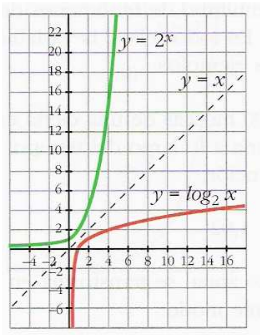
Notas:

- En matemáticas superiores la función $y = e^x$ es extraordinariamente importante. Tanto es así que cuando se habla de "la función exponencial" sin mencionar cuál es su base, se está haciendo referencia a ella.
- También son exponenciales las funciones $y = a^{kx}$, pues $a^{kx} = (a^k)^x$ es decir es una función exponencial de base a^k
- En las calculadoras científicas suele haber dos teclas 10^x, e^x con las que se obtienen valores de las funciones $y = 10^x$, $y = e^x$ respectivamente.

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Se llaman **funciones logarítmicas** las que tienen la ecuación $y = \log_a x$, siendo a un número positivo distinto de 1

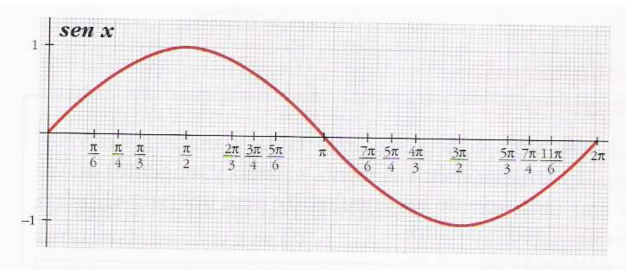
$y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$, por tanto $y = \log_a x$ e $y = a^x$ son funciones inversas

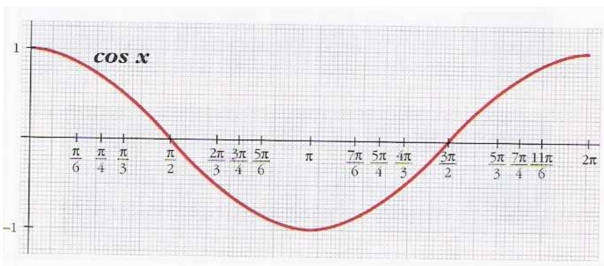


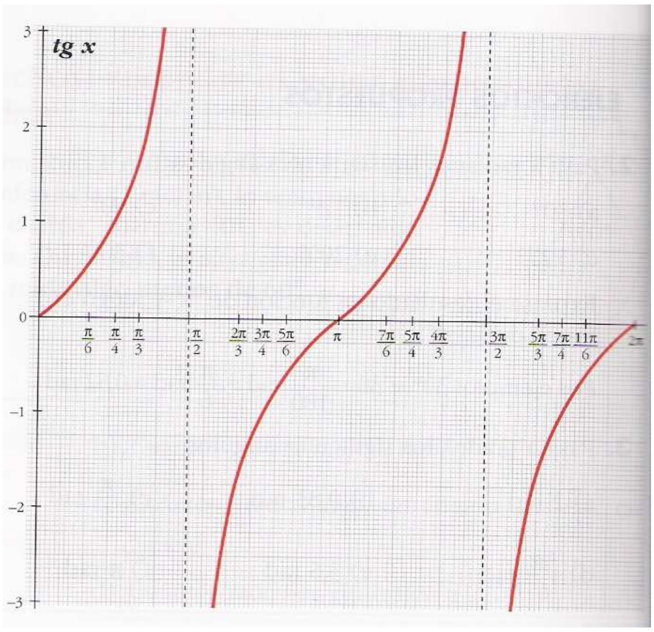
Notas:

- En matemáticas superiores la función $y = \log_e x$ es muy importante. Se le llama logaritmo neperiano y se designa por $y = \ln x$ o $y = Lx$. Es la función inversa de la exponencial de base e : $y = e^x$
- En las calculadoras científicas suele haber dos teclas, log y ln con las que se obtienen valores de las funciones $y = \log x$ $y = \ln x$, respectivamente.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS (Repasar Tema 5)



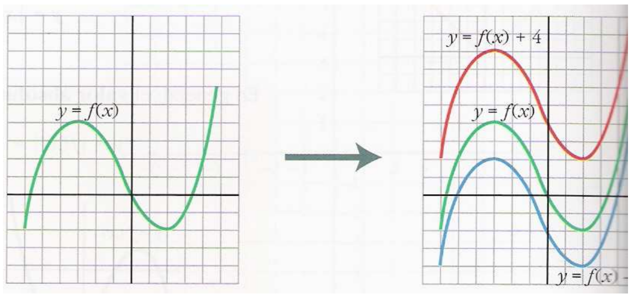




ALGUNAS TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

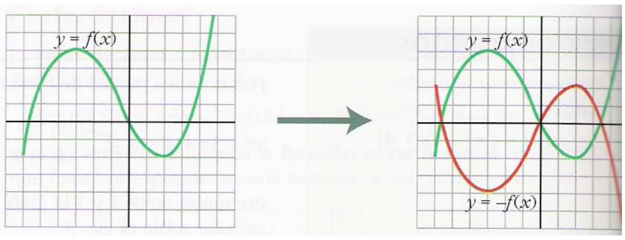
REPRESENTACIÓN DE y = f(x) ± k APARTIR DE y = f(x)

Si sumamos una constante "k" a la "y" ⇒ Subimos "k" unidades
Si restamos una constante "k" a la "y" ⇒ Bajamos "k" unidades



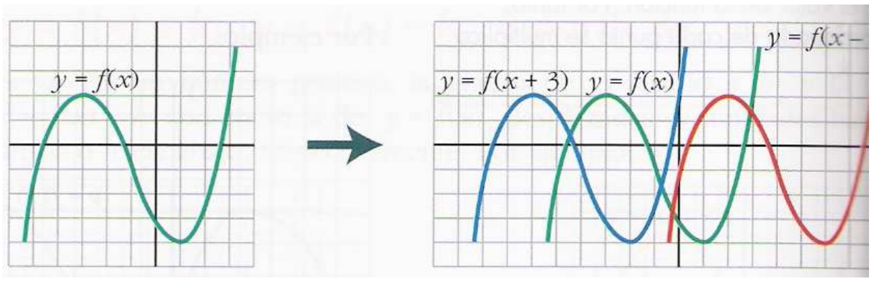
REPRESENTACIÓN DE y = - f(x) A PARTIR DE y = f(x)

Si cambiamos de signo a la "y" ⇒ Hacemos una simetría respecto del eje OX



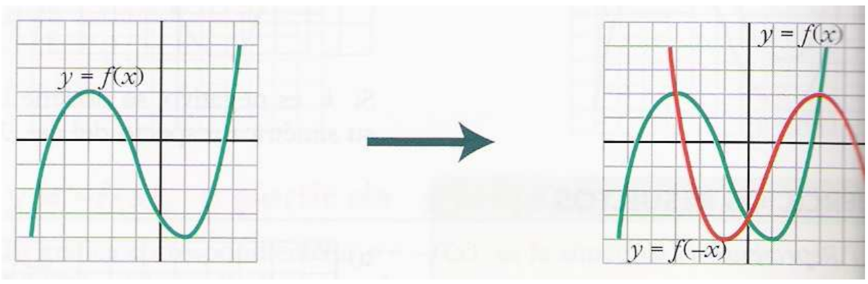
REPRESENTACIÓN DE y = f(x ± k) A PARTIR DE y = f(x)

Si sumamos una constante "k" a la x ⇒ Nos desplazamos "k" unidades hacia la izquierda
Si restamos una constante "k" a la x ⇒ Nos desplazamos "k" unidades hacia la derecha



REPRESENTACIÓN DE y = f(-x) A PARTIR DE y = f(x)

Si cambiamos de signo a la "x" ⇒ Hacemos una simetría respecto del eje OY



OTRAS OPERACIONES CON FUNCIONES

FUNCIÓN COMPUESTA: Dadas dos funciones, f y g, se llama **función compuesta** de f y g, y se designa g $_o$ f, a la función que transforma x en g[f(x)]

$$x \xrightarrow{g\,o\,f} g[f(x)]$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\,o\,f"] & f(x) \arrow[r, "g"] & g[f(x)] \end{tikzcd}$$

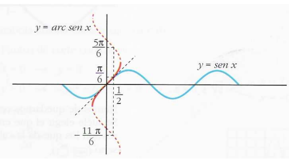
La expresión g $_o$ f(x) se lee f compuesta con g. Se nombra en primer lugar la función de la derecha porque es la primera en actuar sobre la x.
En general, la función $g[f(x)] \neq f[g(x)]$

FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA DE OTRA. Se llama **función inversa o recíproca** de f a otra función (se designa f^{-1}) que cumple la siguiente condición: Si f(a) = b , entonces, $f^{-1}(b) = a$
Como consecuencia $f^{-1}[f(x)] = f[f^{-1}(x)] = x$
Además las gráficas de las dos funciones son simétricas respecto de la bisectriz del primero y tercer cuadrante (y = x)

Ejemplos:	Potencias y raíces	$y = x^n$	$y = \sqrt[n]{x}$
	Exponenciales y logarítmicas	$y = a^x$	$y = \log_a x$
	Trigonométricas y arcos	y = sen x	y = arcsen x

Funciones arco

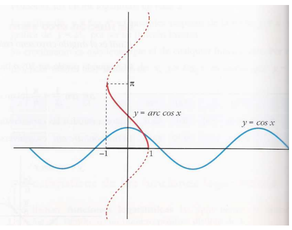
La función arcoseno : Arcsen es una función definida en [-1,1] y que toma valores en [-Π/2,Π/2] tal que : arcsen a = b ⇒ sen b = a



Es una función creciente

Verifica: sen (arcsen x) = x   arcsen (sen x) = x

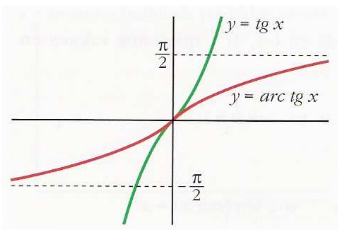
La función arcocoseno : Arccos es una función definida en [-1,1] y que toma valores en [-Π/2,Π/2] tal que : arccos a = b ⇒ cos b = a



Es una función decreciente

Verifica: cos (arccos x) = x   arccos (cos x) = x

La función arcotangente : Arctag es una función definida en R y que toma valores en (-Π/2,Π/2) tal que : arctag a = b ⇒ tag b = a



Es una función creciente

Verifica: tag (arctag x) = x   arctag (tag x) = x