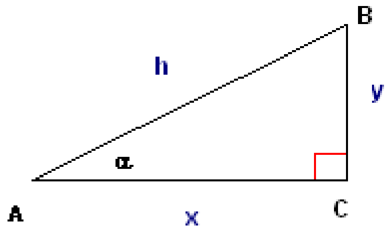
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO (0º a 90º)

DEFINICIÓN DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



SENO DEL ÁNGULO α: es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{h}$$

COSENO DEL ÁNGULO α: es la razón entre el cateto contiguo y la hipotenusa

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{h}$$

TANGENTE DEL ÁNGULO α: es la razón entre el cateto opuesto y el cateto contiguo

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{y}{x}$$

COSECANTE DEL ÁNGULO α: es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{h}{y}$$

SECANTE DEL ÁNGULO α: es la razón entre la hipotenusa y el cateto contiguo

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{h}{x}$$

COTANGENTE DEL ÁNGULO α: es la razón entre el cateto contiguo y el cateto opuesto

$$\text{cotag } \alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{x}{y}$$

RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Teorema de Pitágoras : $x^2 + y^2 = h^2$

Dividiendo entre x^2 : $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{h}{x}\right)^2 \Rightarrow 1 + \mathrm{tag}^2\,\alpha = \sec^2\alpha$

Dividiendo entre y^2 : $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{h}{y}\right)^2 \Rightarrow \mathrm{cotag}^2\,\alpha + 1 = \mathrm{cosec}^2\,\alpha$

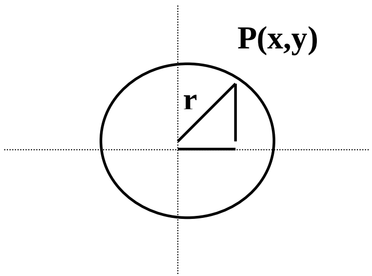
Dividiendo entre h^2 : $\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{y}{h}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\,\alpha = 1$

Razones inversas : $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$; $\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha}$; $\mathrm{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tag}\alpha}$

La tangente: $\mathrm{tag}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{y/h}{x/h} = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA (0º a 360º)

CIRCUNFERENCIA DE RADIO r

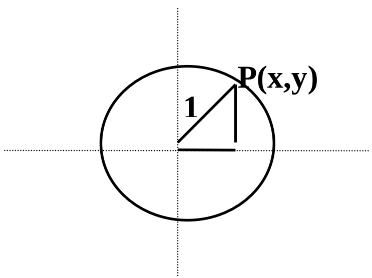


$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{y}{r}$ $\quad$ $\mathrm{cosec}\alpha = \frac{r}{y}$

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\quad$ $\sec\alpha = \frac{r}{x}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$ $\quad$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}$

CIRCUNFERENCIA UNIDAD o GONIOMÉTRICA

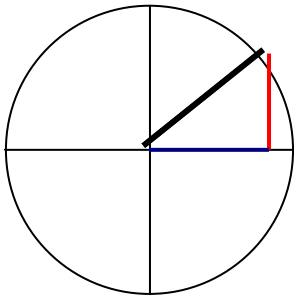
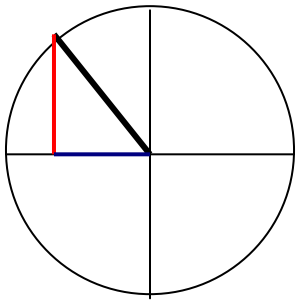
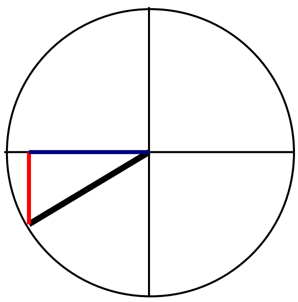
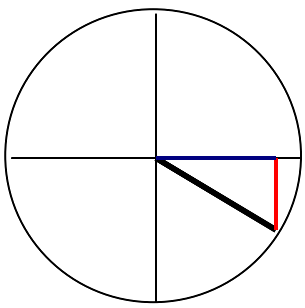


$\mathrm{sen}\,\alpha = y$ $\quad$ $\mathrm{cosec}\alpha = \frac{1}{y}$

$\cos\alpha = x$ $\quad$ $\sec\alpha = \frac{1}{x}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$ $\quad$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}$

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS CUADRANTES

CUADRANTES	DIBUJO	ÁNGULO	SEN α	COS α	TAG α
1º		0º < α < 90º	+	+	+
2º		90º< α < 180º	+	-	-
3º		180º < α < 270º	-	-	+
4º		270º < α < 360º	-	+	-

AMPLIACIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO

ÁNGULOS MAYORES DE 360º

Los valores comprendidos entre 0º y 360º nos permiten expresar la medida de cualquier ángulo. Por ejemplo, podemos darle sentido al ángulo 400º = 360º + 40º al situarlo sobre la circunferencia goniométrica, pues el segundo lado dará una vuelta completa (360º) más un ángulo de 40º : 400º = 360º + 40º = 1 vuelta + 40º

Para cualquier ángulo mayor que 360º **se divide entre 360 y el cociente nos da el número de vueltas enteras y el resto, el ángulo β(entre 0º y 360º)**
α = n.360º + β, donde n es un número entero de vueltas (positivo o negativo)

ÁNGULOS NEGATIVOS

Los ángulos negativos se miden a favor de las agujas del reloj.

Para convertir un ángulo negativo en positivo, se le suman tantas vueltas como sean necesarias hasta obtener un ángulo entre 0º y 360º. Las razones trigonométricas se mantienen.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS CON CALCULADORA

Obtener las razones trigonométricas de un ángulo

Las calculadoras científicas tienen las teclas “sin”, “cos”, “tan”, correspondiente a las razones trigonométricas sen, cos y tag. Si el ángulo viene dado en grados, la calculadora tiene que estar en modo “DEG”

Pasar de grados, minutos y segundos a grados y viceversa

La tecla “º’’’” permite introducir en la calculadora un ángulo dado en grados, minutos y segundos. La calculadora nos da, automáticamente, una expresión decimal de la medida del ángulo (en grados).

Para pasar de una expresión decimal de grados a grados, minutos y segundos, se utiliza la secuencia “INV” “º’’’” (“INV” = “SHIFT”)

Cálculo de un ángulo conocida una razón trigonométrica

Para hallar el ángulo cuyo seno es un cierto número, se utiliza la tecla “sen^{-1}” (arcoseno) que suele corresponder a la secuencia “INV” “SIN”. Análogamente para coseno y tangente.

Cálculo de una razón trigonométrica conociendo otra

Combinando las aplicaciones anteriores, se puede obtener una razón trigonométrica de un ángulo del cual solo se conoce otra razón trigonométrica.

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

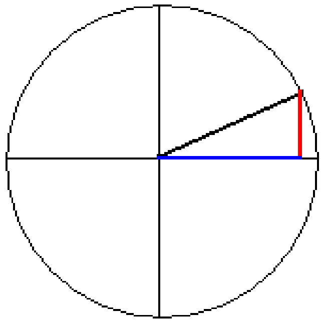
ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN UN NÚMERO ENTERO DE VUELTAS

: α y $\alpha + 360^\circ k$. $k \in Z$

$\cos\beta = \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos\alpha$

$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(\alpha + 360^\circ k) = \text{sen}\,\alpha$

$\text{tag}\,\beta = \text{tag}\,(\alpha + 360^\circ k) = \text{tag}\,\alpha$



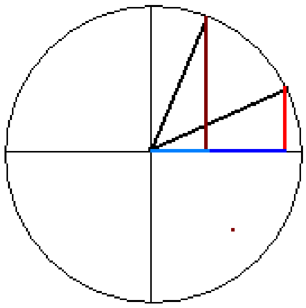
ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Dos ángulos se dice que son complementarios cuando suman 90º : Si $\alpha + \beta = 90^\circ$

$\cos\beta = \cos(90 - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(90 - \alpha) = \cos\alpha$

$\text{tag}\,\beta = \text{tag}\,(90 - \alpha) = \text{ctg}\,\alpha$

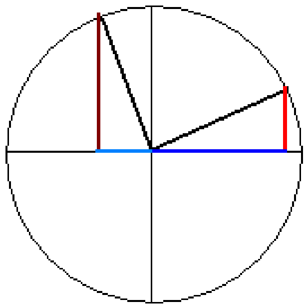


ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 90º : B = 90 + α

$\cos\beta = \cos(90 + \alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$

$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(90 + \alpha) = \cos\alpha$

$\text{tag}\,\beta = \text{tag}\,(90 + \alpha) = -\,\text{ctg}\,\alpha$



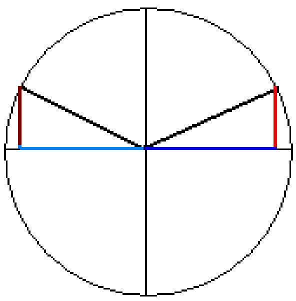
ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Dos ángulos se dice que son suplementarios si suman 180º: $\alpha + \beta = 180^\circ$

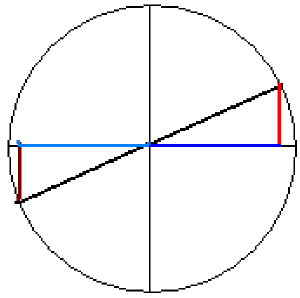
$\cos\beta = \cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$

$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(180 - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

$\text{tag}\,\beta = \text{tag}\,(180 - \alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha$



ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 180º $\beta = 180 + \alpha$

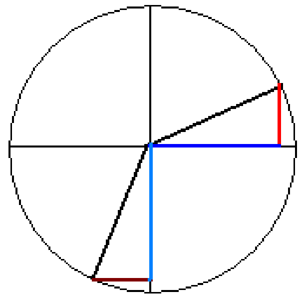


$\cos\beta = \cos(180 + \alpha) = -\cos\alpha$

$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(180 + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\text{tag}\,\beta = \text{tag}\,(180 + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$

ÁNGULOS QUE SUMAN 270º $\alpha + \beta = 270º$

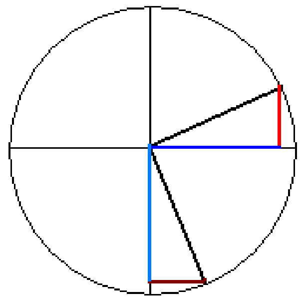


$\cos\beta = \cos(270 - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(270 - \alpha) = -\cos\alpha$

$\text{tag}\,\beta = \text{tag}\,(270 - \alpha) = \text{ctg}\,\alpha$

ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 270º $\beta = \alpha + 270$



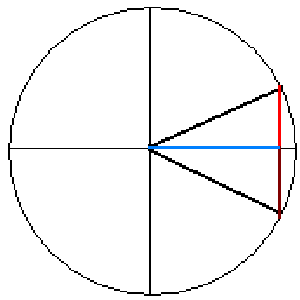
$\cos\beta = \cos(270 + \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(270 + \alpha) = -\cos\alpha$

$\text{tag}\,\beta = \text{tag}\,(270 + \alpha) = -\text{ctg}\,\alpha$

ÁNGULOS OPUESTOS

Dos ángulos son opuestos si suman 360º o 0º



$\cos(-\alpha) = \cos(360 - \alpha) = \cos\alpha$

$\text{sen}\,(-\alpha) = \text{sen}\,(360 - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\text{tag}\,(-\alpha) = \text{tag}\,(360 - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

RESOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Resolver un triángulo rectángulo es hallar uno o más elementos desconocidos a partir de los elementos (lados y ángulos) conocidos.

RELACIÓN ENTRE LOS LADOS . TEOREMA DE PITÁGORAS

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

RELACIÓN ENTRE LOS ÁNGULOS

Los ángulos de un triángulo suman 180º: $A + B + C = 180º \Rightarrow B + C = 90º$

RELACIÓN ENTRE LADOS Y ÁNGULOS

$\text{sen } B = \dfrac{b}{a} = \cos C \qquad \cos B = \dfrac{c}{a} = \text{sen } C \qquad \text{tag } B = \dfrac{b}{c} = \text{ctg } C$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

CASO I : Conocidos dos lados: El tercer lado se calcula mediante el teorema de Pitágoras. El ángulo que forman dos lados conocidos se halla a partir de la razón trigonométrica que los relaciona.

CASO II : Conocidos un lado y un ángulo: Otro lado se calcula mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos. El otro ángulo agudo es el complementario del que conocemos. El otro lado aplicando el teorema de Pitágoras.

ALGUNOS RESULTADOS ÚTILES

Proyección de un segmento: $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB.\cos\alpha \Rightarrow A'B' = AB.\cos\alpha$

La longitud de la proyección de un segmento sobre una recta es igual al producto de la longitud del segmento por el coseno del ángulo que forman.

Altura de un triángulo: $\text{sen }\alpha = \dfrac{h}{a} \Rightarrow h = a.\text{sen}\alpha$

La altura de un triángulo es igual al producto de uno de sus lados laterales por el seno del ángulo que dicho lado forma con la base.

Área de un triángulo: $\text{Área} = \dfrac{b.h}{2} = \dfrac{b.a.\text{sen }\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}a.b.\text{sen }\alpha$

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.

ESTRATEGIA DE LA ALTURA PARA RESOLVER TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

APLICACIÓN A TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS. ESTRATEGIA DE LA ALTURA.

Cualquier triángulo no rectángulo puede ser resuelto, aplicando los métodos de resolución de los triángulos rectángulos, mediante la estrategia de la altura. Consiste en elegir adecuadamente una de sus alturas de modo que, al trazarla, se obtengan dos triángulos rectángulos resolubles con los datos que se tienen.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

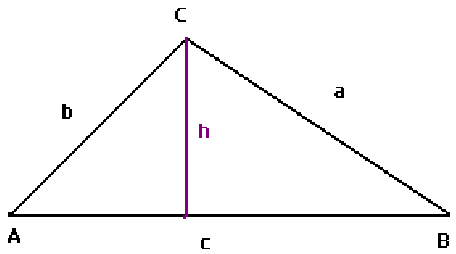
Vamos a obtener unas fórmulas que nos permitan resolver directamente triángulos cualesquiera , sin necesidad de utilizar cada vez la estrategia de la altura para descomponerlos en dos triángulos rectángulos:

TEOREMA DE LOS SENOS

Los lados de un triángulos son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Dem: Para demostrarlo aplicamos la estrategia de la altura. Trazamos la altura h desde el vértice C. Los triángulos AHC y BHC son rectángulos. Por tanto



$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} A = \dfrac{h}{b} \rightarrow h = b \operatorname{sen} A \\ \operatorname{sen} B = \dfrac{h}{a} \rightarrow h = a \operatorname{sen} B\end{array}\right\} b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Esta es la primera de las igualdades buscadas.

Si trazamos la altura desde el vértice B, relacionaríamos los lados a y c con sus ángulos opuestos, obteniendo: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$

Se completa, así, la cadena de igualdades que queríamos demostrar.

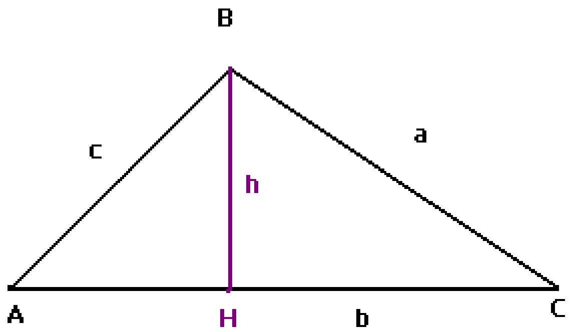
Nota: Al hallar un ángulo aplicando el teorema del seno puede haber más de una solución. Para saber si valen o no todas las soluciones obtenidas habrá que tener en cuanta que a lado mayor corresponde ángulo mayor y a lado menor ángulo menor.

TEOREMA DEL COSENO

El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de dichos dos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$

Dem : Trazamos la altura, h, sobre el lado b:



$\cos A = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = c.\cos A$

$HC = b \quad AH = b - c.\cos A$

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos AHB y BHC y teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, resulta:

$a^2 = h^2 + HC^2 = h^2 + (b - c.\cos A)^2 = h^2 + b^2 + c^2.\cos^2 A - 2.b.c.\cos A$

$c^2 = h^2 + AH^2 = h^2 + (c.\cos A)^2 = h^2 + c^2.\cos^2 A$

Restando: $a^2 - c^2 = b^2 - 2bc.\cos A$ *Despejando:* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

De forma análoga se llegaría a las otras dos relaciones.