TEMA 3 – ÁLGEBRA

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

<u>EJERCICIO 1</u> : Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^4 - 18x^2$ **b)** $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ **c)** $x^3 - 13x^2 + 36x$

d) $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$ **e)** $x^5 + x^4 - 2x^3$ **e)** $x^3 - 3x + 2$

Solución:

a) Sacamos factor común y tenemos en cuenta que $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$:

$2x^4 - 18x^2 = 2x^2\,(x^2 - 9) = 2x^2\,(x + 3)\,(x - 3)$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	–1	–1	–1	–2
–1		–1	2	–1	2
	1	–2	1	–2	0
2		2	0	2	
	1	0	1	0	

$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x + 1)\,(x - 2)\,(x^2 + 1)$ (El polinomio $x^2 + 1$ no tiene raíces reales).

c) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x^3 - 13x^2 + 36x = x\left(x^2 - 13x + 36\right)$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 9 \\ x = 4 \end{cases}$$

Por tanto: $x^3 - 13x^2 + 36x = x\,(x - 9)\,(x - 4)$

d) Utilizamos la regla de Ruffini:

	2	–9	–8	15
1		2	–7	–15
	2	–7	–15	0

$$2x^2 - 7x - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{7 \pm 13}{4} \begin{cases} x = 5 \\ x = -6/4 = -3/2 \end{cases}$$

$2x^3 - 9x^2 - 8x + 15 = 2(x - 1)\,(x - 5)\,(x + 3/2)$

e) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación:

$x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3\,(x^2 + x - 2)$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Por tanto: $x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3\,(x - 1)\,(x + 2)$

f) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	0	–3	2
1		1	1	–2
	1	1	–2	0

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2\,(x + 2)$

APLICACIONES DEL TEOREMA DEL RESTO

<u>EJERCICIO 2</u> : Halla el valor de k para que la siguiente división sea exacta: $\left(3x^2 + kx - 2\right) : \left(x + 2\right)$

Solución: Llamamos $P(x) = 3x^2 + kx - 2$.

Para que la división sea exacta, ha de ser $P(-2) = 0$; es decir: $P(-2) = 12 - 2k - 2 = 10 - 2k = 0 \rightarrow k = 5$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

EJERCICIO 3 : Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\dfrac{x^5+6x^4+9x^3}{x^3+3x^2}$ b) $\dfrac{x^3-x}{x^3+3x^2+2x}$ c) $\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-3x^2+2x}$ d) $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x}$ e) $\dfrac{x^4-2x^3-3x^2}{x^4-9x^2}$

Solución:

a) $\dfrac{x^5+6x^4+9x^3}{x^3+3x^2}=\dfrac{x^3(x^2+6x+9)}{x^2(x+3)}=\dfrac{x^3(x+3)^2}{x^2(x+3)}=x(x+3)=x^2+3x$

b) $\dfrac{x^3-x}{x^3+3x^2+2x}=\dfrac{x(x^2-1)}{x(x^2+3x+2)}=\dfrac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$

c) $\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-3x^2+2x}=\dfrac{x(x^2-x-2)}{x(x^2-3x+2)}=\dfrac{x(x-2)(x+1)}{x(x-2)(x-1)}=\dfrac{x+1}{x-1}$

d) $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{(x-1)^3}{x(x-1)^2}=\dfrac{x-1}{x}$

e) $\dfrac{x^4-2x^3-3x^2}{x^4-9x^2}=\dfrac{x^2(x^2-2x-3)}{x^2(x^2-9)}=\dfrac{x^2(x-3)(x+1)}{x^2(x-3)(x+3)}=\dfrac{x+1}{x+3}$

EJERCICIO 4 : Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\left(\dfrac{2x-1}{x+1}-\dfrac{3x}{x-1}\right)\cdot\left(\dfrac{x^3-x}{-x^2-6x+1}\right)$ b) $\dfrac{2x}{x-2}+\dfrac{3x-1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}$

c) $\dfrac{(x-1)^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{3x}{(x+1)^2}$ d) $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}$ e) $\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2x}{x+1}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2+x}{x-1}\right)$

Solución:

a) $\left(\dfrac{2x-1}{x+1}-\dfrac{3x}{x-1}\right)\cdot\left(\dfrac{x^3-x}{-x^2-6x+1}\right)=\dfrac{(2x-1)(x-1)-3x(x+1)}{(x+1)(x-1)}\cdot\dfrac{x^3-x}{-x^2-6x+1}=$

$\dfrac{2x^2-2x-x+1-3x^2-3x}{(x+1)(x-1)}\cdot\dfrac{x(x-1)(x+1)}{-x^2-6x+1}=\dfrac{-x^2-6x+1}{(x+1)(x-1)}\cdot\dfrac{x(x-1)(x+1)}{-x^2-6x+1}=x$

b) $\dfrac{2x}{x-2}+\dfrac{3x-1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{2x(x+2)}{x^2-4}-\dfrac{(3x-1)(x-2)}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{2x^2+4x-3x^2+6x+x-2-1}{x^2-4}=\dfrac{-x^2+11x-3}{x^2-4}$

c) $\dfrac{(x-1)^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{3x}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)}-\dfrac{3x}{(x+1)^2}=\dfrac{x-1}{2(x+1)}-\dfrac{3x}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2-1-6x}{2(x+1)^2}=\dfrac{x^2-6x-1}{2(x+1)^2}$

d) $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x+1+2(x^2-1)+(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}=$

$\dfrac{x+1+2x^2-2+x-1}{(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{2x^2+2x-2}{(x-1)^2(x+1)}$

e) $\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2x}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x^2+x}{x-1}=\dfrac{3(x+1)-2x^2}{x(x+1)}\cdot\dfrac{x^2+x}{x-1}=\dfrac{3x+3-2x^2}{x(x+1)}\cdot\dfrac{x(x+1)}{x-1}=\dfrac{-2x^2+3x+3}{x-1}$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

EJERCICIO 5 : Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $\dfrac{4x^2-4x}{3}-x=x^2-\dfrac{3x+4}{3}$ 2) $x^4-11x^2+28=0$ 3) $x^2+\dfrac{15}{4}=\dfrac{3x^2-x+3}{4}+3$

4) $x^4-21x^2-100=0$ 5) $x(x+4)-5=\dfrac{x(x-1)}{3}$ 6) $x^4-48x^2-49=0$

7) $\sqrt{3x+16}=2x-1$ 8) $\sqrt{x+5}-x=3$ 9) $\frac{4x}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{14}{3}$

10) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x+4}=\frac{11}{6}$ 11) $\frac{2}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=\frac{5}{4}$ 12) $x+4=\sqrt{4x+12}$

13) $\frac{2x-1}{x}+\frac{4}{x-1}=\frac{11}{2}$ 14) $x^4+x^3-9x^2-9x=0$ 15) $x^3-2x^2-11x+12=0$

16) $x^4+x^3-4x^2-4x=0$ 17) $x^3-2x^2-5x+6=0$ 18) $x^3+4x^2-x-4=0$

19) $2^{x-1}+2^x+\frac{1}{2^x}=\frac{7}{2}$ 20) $log(x-3)^2+log\ 4=log\ x$ 21) $x^4-37x^2+36=0$

22) $2ln(x+1)-ln(2x)=ln\ 2$ 23) $\sqrt{5x+4}=2x+1$ 24) $3^{2x}-3^{x+1}+\frac{8}{9}=0$

25) $\frac{5}{4x^2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6x^2}$ 26) $log(x+1)-log(3x-2)=1$ 27) $3\sqrt{x-1}+11=2x$

28) $2^{x-1}+2^{x+1}-3\cdot 2^x+4=0$ 29) $\frac{x}{x+1}-\frac{16}{6}=\frac{x+1}{x}$ 30) $\frac{3^{x^2-x+1}}{3^{x+1}}=\frac{1}{3}$

31) $2^{1-x}+2^x-3=0$ 32) $1-x=\sqrt{7-3x}$ 33) $2^{x+2}+2^x-5=0$

Solución:

1) $\frac{4x^2-4x}{3}-x=x^2-\frac{3x+4}{3}$; $\frac{4x^2-4x}{3}-\frac{3x}{3}=\frac{3x^2}{3}-\frac{3x+4}{3}$; $4x^2-4x-3x=3x^2-3x-4$

$x^2-4x+4=0$; $x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4}{2}=2$; Solución: x = 2

2) $x^4-11x^2+28=0$ Cambio : $x^2=z \rightarrow x^4=z^2$ $z^2-11z+28=0$

$$z=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{11\pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} z=7 \rightarrow x=\pm\sqrt{7} \\ z=4 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

Cuatro soluciones : $x_1=-\sqrt{7},\quad x_2=\sqrt{7},\quad x_3=-2,\quad x_4=2$

3) $x^2+\frac{15}{4}=\frac{3x^2-x+3}{4}+3$; $\frac{4x^2}{4}+\frac{15}{4}=\frac{3x^2-x+3}{4}+\frac{12}{4}$; $4x^2+15=3x^2-x+3+12$

$$x^2+x=0 \ ; \ x(x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

4) $x^4-21x^2-100=0$ Cambio: $x^2=z \rightarrow x^4=z^2$ $z^2-21z-100=0$

$$z=\frac{21\pm\sqrt{441+400}}{2}=\frac{21\pm\sqrt{841}}{2}=\frac{21\pm 29}{2} \rightarrow \begin{cases} z=25 \rightarrow x=\pm 5 \\ z=-4 \ \text{(no vale)} \end{cases}$$

Dos soluciones: $x_1=-5,\ x_2=5$

5) $x(x+4)-5=\frac{x(x-1)}{3}$; $x^2+4x-5=\frac{x^2-x}{3}$; $3x^2+12x-15=x^2-x$

$$2x^2+13x-15=0 \ ; \ x=\frac{-13\pm\sqrt{169+120}}{4}=\frac{-13\pm\sqrt{289}}{4}=\frac{-13\pm 17}{4} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-30}{4}=\frac{-15}{2} \end{cases}$$

6) $x^4-48x^2-49=0$ Cambio: $x^2=z \rightarrow x^4=z^2$ $z^2-48z-49=0$

$$z=\frac{48\pm\sqrt{2304+196}}{2}=\frac{48\pm\sqrt{2500}}{2}=\frac{48\pm 50}{2} \rightarrow \begin{cases} z=49 \rightarrow x=\pm 7 \\ z=-1 \ \text{(no vale)} \end{cases}$$

Dos soluciones: $x_1=-7,\ x_2=7$

7) $\sqrt{3x+16}=2x-1$; $3x+16=(2x-1)^2$; $3x+16=4x^2+1-4x$; $0=4x^2-7x-15$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49+240}}{8}=\frac{7\pm\sqrt{289}}{8}=\frac{7\pm17}{8}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x=3\\ x=\frac{-10}{8}=\frac{-5}{4}\end{cases}$$

Comprobación:

$x=3\quad\rightarrow\quad\sqrt{25}=5\quad\rightarrow\quad x=3$ sí vale.

$x=\frac{-5}{4}\rightarrow\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}\neq\frac{-7}{2}\quad\rightarrow\quad x=\frac{-5}{4}$ no vale.

Hay una solución: $x=3$

8) $\sqrt{x+5}-x=3$; $\sqrt{x+5}=3+x$; $x+5=9+x^2+6x$; $0=x^2+5x+4$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-5\pm3}{2}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x=-1\\ x=-4\end{cases}$$

Comprobación:

$x=-1\quad\rightarrow\quad\sqrt{4}+1=2+1=3\quad\rightarrow\quad x=-1$ sí vale

$x=-4\quad\rightarrow\quad\sqrt{1}+4=1+4=5\neq3\quad\rightarrow\quad x=-4$ no vale

Hay una solución: $x=-1$

9) $\frac{4x}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{14}{3}$; $\frac{12x(x-2)}{3(x+2)(x-2)}+\frac{3x(x+2)}{3(x+2)(x-2)}=\frac{14(x+2)(x-2)}{3(x+2)(x-2)}$

$12x^2-24x+3x^2+6x=14(x^2-4)$; $15x^2-18x=14x^2-56$; $x^2-18x+56=0$

$$x=\frac{18\pm\sqrt{324-224}}{2}=\frac{18\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{18\pm10}{2}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x=14\\ x=4\end{cases}$$

10) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x+4}=\frac{11}{6}$; $\frac{18(x+4)}{6x(x+4)}+\frac{12x}{6x(x+4)}=\frac{11x(x+4)}{6x(x+4)}$; $18x+72+12x=11x^2+44x$; $0=11x^2+14x-72$

$$x=\frac{-14\pm\sqrt{196+3168}}{22}=\frac{-14\pm\sqrt{3364}}{22}=\frac{-14\pm58}{22}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x=2\\ x=\frac{-72}{22}=\frac{-36}{11}\end{cases}$$

11) $\frac{2}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=\frac{5}{4}$; $\frac{8(x+1)}{4(x-1)(x+1)}+\frac{4(x-1)(x-2)}{4(x-1)(x+1)}=\frac{5(x-1)(x+1)}{4(x-1)(x+1)}$; $8x+8+4(x^2-3x+2)=5(x^2-1)$

$8x+8+4x^2-12x+8=5x^2-5$; $0=x^2+4x-21$;

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-4\pm10}{2}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x=3\\ x=-7\end{cases}$$

12) $x+4=\sqrt{4x+12}$; $(x+4)^2=4x+12$; $x^2+16+8x=4x+12$; $x^2+4x+4=0$;

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Comprobación: $x=-2\quad\rightarrow\quad 2=\sqrt{4}\quad\rightarrow$ sí es válida

13) $\frac{2x-1}{x}+\frac{4}{x-1}=\frac{11}{2}$; $\frac{2(2x-1)(x-1)}{2x(x-1)}+\frac{8x}{2x(x-1)}=\frac{11x(x-1)}{2x(x-1)}$; $2(2x^2-3x+1)+8x=11x^2-11x$

$4x^2-6x+2+8x=11x^2-11x$; $0=7x^2-13x-2$;

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169+56}}{14}=\frac{13\pm\sqrt{225}}{14}=\frac{13\pm15}{14}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x=2\\ x=\frac{-2}{14}=\frac{-1}{7}\end{cases}$$

14) Sacamos factor común: $x^4+x^3-9x^2-9x=x(x^3+x^2-9x-9)=0$

Factorizamos x^3+x^2-9x-9:

	1	1	−9	−9
−1		−1	0	9
	1	0	−9	0

$x^2-9=0\Rightarrow x=\pm3$

$$x^4+x^3-9x^2-9x=x(x+1)(x-3)(x+3)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $x_1=0, \quad x_2=-1, \quad x_3=3, \quad x_4=-3$

15) Factorizamos:

	1	−2	−11	12
1		1	−1	−12
	1	−1	−12	0
4		4	12	
	1	3	0	

$$x^3-2x^2-11x+12=(x-1)(x-4)(x+3)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x-4=0 \rightarrow x=4 \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $x_1=1, \quad x_2=4, \quad x_3=-3$

16) Sacamos factor común: $x^4+x^3-4x^2-4x=x\left(x^3+x^2-4x-4\right)=0$

Factorizamos x^3+x^2-4x-4:

	1	1	−4	−4
−1		−1	0	4
	1	0	−4	0
2		2	4	
	1	2	0	

$$x^4+x^3-4x^2-4x=x(x+1)(x-2)(x+2)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \end{cases}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación son: $x_1=0, \quad x_2=-1, \quad x_3=2, \quad x_4=-2$

17) Factorizamos:

	1	−2	−5	6
1		1	−1	−6
	1	−1	−6	0
3		3	6	
	1	2	0	

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $x_1=1, \quad x_2=3, \quad x_3=-2$

18) Factorizamos:

	1	4	−1	−4
1		1	5	4
	1	5	4	0
−1		−1	−4	
	1	4	0	

$$x^3+4x^2-x-4=(x-1)(x+1)(x+4)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x-1=0 & \rightarrow \quad x=1 \\ x+1=0 & \rightarrow \quad x=-1 \\ x+4=0 & \rightarrow \quad x=-4 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $x_1=1, \quad x_2=-1, \quad x_3=-4$

19) $2^{x-1}+2^x+\frac{1}{2^x}=\frac{7}{2}$; $\quad \frac{2^x}{2}+2^x+\frac{1}{2^x}=\frac{7}{2}$

Hacemos el cambio de variable: $2^x=y$: $\quad \frac{y}{2}+y+\frac{1}{y}=\frac{7}{2}$; $\quad y^2+2y^2+2=7y \quad\rightarrow\quad 3y^2-7y+2=0$

$$y=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{7\pm 5}{6} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} y=2 \\ y=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

- $y=2 \quad\rightarrow\quad 2^x=2 \quad\rightarrow\quad x=1$
- $y=\frac{1}{3} \quad\rightarrow\quad 2^x=\frac{1}{3} \quad\rightarrow\quad x=log_2\frac{1}{3}=-log_2 3=-\frac{log\ 3}{log\ 2}=-1{,}58$

Hay dos soluciones: $x=1$; $x_2=-1{,}58$

20) $log\,(x-3)^2+log\,4=log\,x$; $\quad log\,[4(x-3)^2]=log\,x$; $4(x-3)^2=x \quad\rightarrow\quad 4(x^2-6x+9)=x$

$4x^2-24x+36=x \quad\rightarrow\quad 4x^2-25x\ 6+36=0$;

$$x=\frac{25\pm\sqrt{625-576}}{8}=\frac{25\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{25\pm 7}{8} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{18}{8}=\frac{9}{4} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=4; x_2=\frac{9}{4}$

21) $x^4-37x^2+36=0$; Cambio: $x^2=z \quad\rightarrow\quad x^4=z^2 \Rightarrow z^2-37z+36=0$

$$z=\frac{37\pm\sqrt{1369-144}}{2}=\frac{37\pm\sqrt{1225}}{2}=\frac{37\pm 35}{2} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} z=36 \\ z=1 \end{cases}$$

$z=36 \quad\rightarrow\quad x^2=36 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{36} \quad\rightarrow\quad x=\pm 6$

$z=1 \quad\rightarrow\quad x^2=1 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1} \quad\rightarrow\quad x=\pm 1$

Hay cuatro soluciones: $x_1=-6, x_2=-1, x_3=1, x_4=6$

22) $2\ln(x+1)-\ln(2x)=\ln 2$; $ln(x+1)^2-ln(2x)=ln\ 2$; $ln\frac{(x+1)^2}{2x}=ln\ 2 \quad\rightarrow\quad \frac{(x+1)^2}{2x}=2$

$(x+1)^2=4x \quad\rightarrow\quad x^2+2x+1=4x \quad\rightarrow\quad x^2-2x+1=0$; $x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2}{2}=1$; Hay una única sol: $x=1$

23) $\sqrt{5x+4}=2x+1 \Rightarrow 5x+4=(2x+1)^2 \Rightarrow 5x+4=4x^2+4x+1 \Rightarrow \quad 0=4x^2-x-3$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{1\pm 7}{8} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-6}{8}=\frac{-3}{4} \end{cases}$$

Comprobación:

$x=1 \quad\rightarrow\quad \sqrt{9}=3=2+1 \quad\rightarrow\quad$ Es válida

$x=\frac{-3}{4} \quad\rightarrow\quad \sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{2}+1=\frac{-1}{2} \quad\rightarrow\quad$ No es válida

Hay una solución: $x=1$

24) $3^{2x}-3^{x+1}+\frac{8}{9}=0$; $\quad (3^x)^2-3^x\cdot 3+\frac{8}{9}=0$

Hacemos el cambio $3^x=y$: $y^2-3y+\frac{8}{9}=0 \quad\rightarrow\quad 9y^2-27y+8=0$

$$y=\frac{27\pm\sqrt{729-288}}{18}=\frac{27\pm\sqrt{441}}{18}=\frac{27\pm 21}{18} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} y=\frac{48}{18}=\frac{8}{3} \\ y=\frac{6}{18}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

- $y=\frac{8}{3} \quad\rightarrow\quad 3^x=\frac{8}{3} \quad\rightarrow\quad x=\log_3\frac{8}{3}=\log_3 8-1=\frac{\log 8}{\log 3}-1=0{,}89$

• $y=\dfrac{1}{3} \;\rightarrow\; 3^x=\dfrac{1}{3} \;\rightarrow\; x=-1$

Hay dos soluciones: $x_1=-1$; $x_2=0{,}89$

25) $\dfrac{5}{4x^2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{6x^2} \Rightarrow \dfrac{15}{12x^2}-\dfrac{4x^2}{12x^2}=\dfrac{6}{12x^2} \Rightarrow 15-4x^2=6 \Rightarrow 15-6=4x^2 \Rightarrow 9=4x^2$

$x^2=\dfrac{9}{4} \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$ Hay dos soluciones : $x_1=\dfrac{-3}{2}$; $x_2=\dfrac{3}{2}$

26) $\log(x+1)-\log(3x-2)=1$; $\log\dfrac{x+1}{3x-2}=1 \;\rightarrow\; \dfrac{x+1}{3x-2}=10 \;\rightarrow x+1=10(3x-2)$

$x+1=30x-20 \;\rightarrow\; 21=29x \;\rightarrow\; x=\dfrac{21}{29}$

27) $3\sqrt{x-1}+11=2x \Rightarrow 3\sqrt{x-1}=2x-11 \quad 3\sqrt{x-1}=2x-11 \Rightarrow \left(3\sqrt{x-1}\right)^2=(2x-11)^2 \Rightarrow 9(x-1)=4x^2-44x+121$

$9x-9=4x^2-44x+121 \Rightarrow 0=4x^2-53x+130$

$x=\dfrac{53\pm\sqrt{2\,809-2\,080}}{8}=\dfrac{53\pm\sqrt{729}}{8}=\dfrac{53\pm 27}{8} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=10 \\ x=\dfrac{26}{8}=\dfrac{13}{4} \end{cases}$

Comprobación:

$x=10 \;\rightarrow\; 3\sqrt{9}+11=9+11=20=2\cdot 10 \;\rightarrow$ Es válida

$x=\dfrac{13}{4} \;\rightarrow\; 3\sqrt{\dfrac{9}{4}}+11=\dfrac{9}{2}+11=\dfrac{31}{2}\neq 2\cdot\dfrac{13}{4}=\dfrac{13}{2} \;\rightarrow$ No es válida

Hay una solución: $x=10$

28) $2^{x-1}+2^{x+1}-3\cdot 2^x+4=0$; $\dfrac{2^x}{2}+2^x\cdot 2-3\cdot 2^x+4=0$; Hacemos el cambio: $2^x=y$

$\dfrac{y}{2}+2y-3y+4=0$; $y+4y-6y+8=0 \;\rightarrow\; -y+8=0 \;\rightarrow\; y=8$; $2^x=8 \;\rightarrow\; x=3$

29) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{16}{6}=\dfrac{x+1}{x} \Rightarrow \dfrac{6x^2}{6x(x+1)}-\dfrac{16x(x+1)}{6x(x+1)}=\dfrac{6(x+1)^2}{6x(x+1)} \Rightarrow 6x^2-16x^2-16x=6\left(x^2+2x+1\right)$

$6x^2-16x^2-16x=6x^2+12x+6 \Rightarrow -16x^2-28x-6=0 \Rightarrow 16x^2+28x+6=0 \;\rightarrow\; 8x^2+14x+3=0$

$x=\dfrac{-14\pm\sqrt{196-96}}{16}=\dfrac{-14\pm\sqrt{100}}{16}=\dfrac{-14\pm 10}{16} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=\dfrac{-4}{16}=\dfrac{-1}{4} \\ x=\dfrac{-24}{16}=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$

Hay dos soluciones: $x_1=\dfrac{-1}{4}$; $x_2=\dfrac{-3}{2}$

30) $\dfrac{3^{x^2-x+1}}{3^{x+1}}=\dfrac{1}{3} \;\rightarrow\; 3^{x^2-x+1-(x+1)}=3^{-1}$; $x^2-x+1-x-1=-1 \rightarrow \; x^2-2x+1=0$: $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

Hay una única solución: $x=1$

31) $\dfrac{2^1}{2^x}+2^x-3=0 \Rightarrow$ Cambio $2^x=z$. Así, $\dfrac{2}{z}+z-3=0 \qquad 2+z^2-3z=0 \qquad z^2-3z+2=0$

$z=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}\begin{cases} z=2 \;\rightarrow\; 2^x=2 \;\rightarrow\; x=1 \\ z=1 \;\rightarrow\; 2^x=1 \;\rightarrow\; x=0 \end{cases}$

32) $(1-x)^2=7-3x \;\rightarrow\; 1+x^2-2x=7-3x \;\rightarrow\; x^2+x-6=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}\begin{cases} x=2 \text{ (no vale)} \\ x=-3 \end{cases}$

33) $2^x\cdot 2^2+2^x-5=0 \Rightarrow 4\cdot 2^x+2^x-5=0 \Rightarrow 5\cdot 2^x-5=0 \Rightarrow 2^x=1 \;\Rightarrow\; x=0$

SISTEMAS DE ECUACIONES

<u>EJERCICIO 6</u> : Halla la solución de los siguientes sistemas, analítica y gráficamente:

a) $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=4\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l}y-4x-2=0\\ y=x^2+3x\end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{l}y=x^2-2x\\ y+x-6=0\end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{l}\frac{x-1}{3}+\frac{y}{2}=2\\ 3x+y=7\end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{l}y=x^2-3x\\ y-2x+6=0\end{array}\right\}$

Solución:

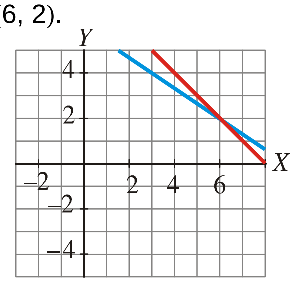
a)

• Resolvemos el sistema analíticamente: $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=4\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}\frac{2x}{6}+\frac{3y}{6}=\frac{18}{6}\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\frac{8}{2}\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}2x+3y=18\\ x+y=8\end{array}\right\}\ y=8-x$

$2x+3(8-x)=18$; $2x+24-3x=18$; $-x=-6$; $x=6$ $\rightarrow$ $y=8-6=2$; *Solución:* $x=6$; $y=2$

• Interpretación gráfica: $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3 \;\rightarrow\; y=\frac{18-2x}{3}=6-\frac{2}{3}x=\frac{-2}{3}x+6\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=4 \;\rightarrow\; y=8-x\end{array}\right\}$

Estas dos rectas se cortan en el punto (6, 2).

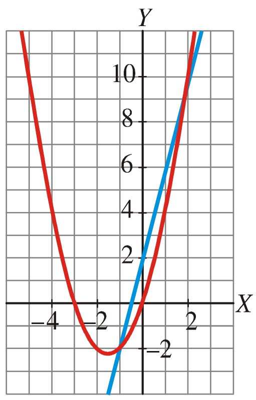


b)

• Lo resolvemos analíticamente: $\left.\begin{array}{l}y-4x-2=0\\ y=x^2+3x\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}y=4x+2\\ 4x+2=x^2+3x;\quad 0=x^2-x-2\end{array}$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\ \rightarrow\ \left\{\begin{array}{l}x=2\ \rightarrow\ y=10\\ x=-1\ \rightarrow y=-2\end{array}\right.\qquad Solución:\ \left.\begin{array}{l}x_1=2\\ y_1=10\end{array}\right\}\ \text{y}\ \left.\begin{array}{l}x_2=-1\\ y_2=-2\end{array}\right\}$$

• Interpretación gráfica: $\left.\begin{array}{l}y=4x+2\\ y=x^2+3x\end{array}\right\}$ La recta y la parábola se cortan en los puntos $(2,10)$ y $(-1,-2)$.

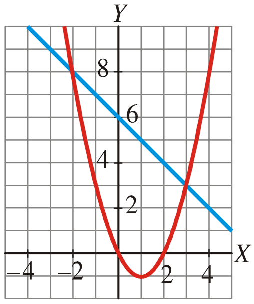


c)

• Resolvemos analíticamente el sistema: $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y + x - 6 = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ x^2 - 2x + x - 6 = 0; \quad x^2 - x - 6 = 0 \end{array}$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \rightarrow y = 3 \\ x = -2 \rightarrow y = 8 \end{array}\right. \quad \textit{Solución}: \left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = 3 \end{array}\right\} \text{ y } \left.\begin{array}{l} x_2 = -2 \\ y_2 = 8 \end{array}\right\}$$

• Interpretación gráfica: $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y = 6 - x \end{array}\right\}$ La parábola y la recta se cortan en los puntos $(3, 3)$ y $(-2, 8)$.



d)

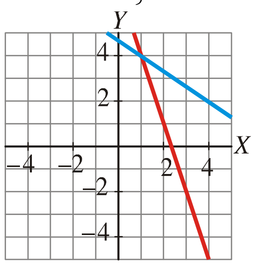
• Resolvemos analíticamente el sistema: $\left.\begin{array}{l} \frac{x-1}{3} + \frac{y}{2} = 2 \\ 3x + y = 7 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \frac{2x-2}{6} + \frac{3y}{6} = \frac{12}{6} \\ 3x + y = 7 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 2x - 2 + 3y = 12 \\ 3x + y = 7 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ 3x + y = 7 \end{array}\right\}$ $y = 7 - 3x; \quad 2x + 3(7 - 3x) = 14$

$2x + 21 - 9x = 14; \quad 2x - 9x = 14 - 21; \quad -7x = -7; \quad x = 1; \quad y = 7 - 3 \cdot 1 = 7 - 3 = 4$

Solución: $x = 1; \quad y = 4$

• Interpretación gráfica: $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \rightarrow y = \frac{14 - 2x}{3} \\ 3x + y = 7 \rightarrow y = 7 - 3x \end{array}\right\}$ Estas dos rectas se cortan en el punto (1, 4).

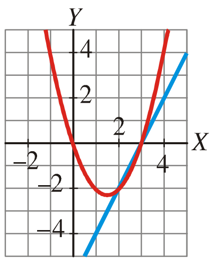


e)

• Lo resolvemos analíticamente: $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 3x \\ y - 2x + 6 = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = x^2 - 3x \\ x^2 - 3x - 2x + 6 = 0; \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \end{array}$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \rightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y = -2 \end{array}\right. \quad \textit{Solución}: \left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = 0 \end{array}\right\} \text{ y } \left.\begin{array}{l} x_2 = 2 \\ y_2 = -2 \end{array}\right\}$$

• Interpretación gráfica: $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 3x \\ y = 2x - 6 \end{array}\right\}$ La parábola y la recta se cortan en los puntos $(3, 0)$ y $(2, -2)$



EJERCICIO 7 : Halla las soluciones de estos sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} y = 3x+1 \\ \sqrt{x+y+4} = y-x \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{x} - \frac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 3 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ \sqrt{x} - y = -3 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x+y} = \frac{2}{5} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{2} \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{l} 2\log x + \log y = 1 \\ \log x - 2\log y = -2 \end{array}\right\}$ g) $\left.\begin{array}{l} 2^{x+y} = 32 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{array}\right\}$ h) $\left.\begin{array}{l} 2\log x - \log y = 0 \\ 2^{y+2x} = 8 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{l} y^2 - x = 2 \\ \log(x+y) = 1 \end{array}\right\}$ j) $\left.\begin{array}{l} 2^{x+1} + 2^y = 8 \\ \log y - \log x = \log 2 \end{array}\right\}$ k) $\left.\begin{array}{l} x - y = 9 \\ \log x - \log y = 1 \end{array}\right\}$ l) $\left.\begin{array}{l} y^2 - x^2 = -3 \\ xy = -2 \end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{l} 3\sqrt{x+1} = y - 2 \\ 3x + y = -1 \end{array}\right\}$ n) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$ ñ) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{array}\right\}$ o) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = -1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \end{array}\right\}$

p) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{array}\right\}$ q) $\left.\begin{array}{l} y = 5 - \sqrt{x} \\ x = y^2 - 2y + 1 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} y = 3x+1 \\ \sqrt{x+y+4} = y-x \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 3x+1 \\ \sqrt{x+3x+1+4} = 3x+1-x \end{array}$ $\sqrt{4x+5} = 2x+1;\quad 4x+5 = (2x+1)^2$

$4x+5 = 4x^2+1+4x;\quad 4 = 4x^2;\quad x^2 = 1;\quad x = \pm\sqrt{1} \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = -1 \quad \rightarrow \quad \text{no válida} \\ x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 4 \end{array}\right.$

Hay una solución: $x = 1;\quad y = 4$

b) $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{x} - \frac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 3y - x^2 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = \frac{x^2}{3} \\ 2x - \frac{x^2}{3} = 3;\quad 6x - x^2 = 9 \end{array}$

$0 = x^2 - 6x + 9;\quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad y = 3$ *Solución:* $x = 3;\quad y = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 3 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{3}{4-x} = 3 \\ y = 4 - x \end{array}\right\}$ $\frac{2(4-x)}{x(4-x)} + \frac{3x}{x(4-x)} = \frac{3x(4-x)}{x(4-x)};$

$8 - 2x + 3x = 12x - 3x^2;\quad 3x^2 - 11x + 8 = 0$

$x = \frac{11 \pm \sqrt{121-96}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{11 \pm 5}{6} \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{4}{3} \\ x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 3 \end{array}\right.$

Hay dos soluciones: $\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{3} \\ y_1 = \frac{4}{3} \end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = 3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l}2x+y=6\\ \sqrt{x}-y=-3\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}y=6-2x\\ \sqrt{x}+3=y\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}6-2x=\sqrt{x}+3\\ 3-2x=\sqrt{x}\end{array}$ $(3-2x)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2;\quad 9+4x^2-12x=x;\quad 4x^2-13x+9=0$

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{8}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{8}=\frac{13\pm 5}{8}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x=\dfrac{18}{8}=\dfrac{9}{4}\quad\rightarrow\quad \text{no válida}\\[2ex] x=1\quad\rightarrow\quad y=4\end{cases}$$

$\left(\text{La solución } x=\dfrac{9}{4} \text{ no es válida, puesto que } 3-2\cdot\dfrac{9}{4}=-\dfrac{3}{2}\neq\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}\right)$

La única solución del sistema es $x=1$, $y=4$.

e) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{5}\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{2}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}5=2(x+y)\\ 2y+2x=5xy\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}5=2x+2y\\ 5=5xy\quad\rightarrow\quad 1=xy\quad\rightarrow y=\dfrac{1}{x}\end{array}$

$5=2x+\dfrac{2}{x};\quad 5x=2x^2+2;\quad 0=2x^2-5x+2$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x=2\quad\rightarrow\quad y=\dfrac{1}{2}\\[2ex] x=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\quad\rightarrow\quad y=2\end{cases}$$

Hay dos soluciones: $\left.\begin{array}{l}x_1=2\\ y_1=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{l}x_2=\dfrac{1}{2}\\ y_2=2\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{l}2\log x+\log y=1\\ \log x-2\log y=2\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}2(2\log x+\log y)=2\\ \log x-2\log y=-2\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}4\log x+2\log y=2\\ \log x-2\log y=-2\\ \hline 5\log x\qquad\qquad=0\end{array}$ $\rightarrow\quad \log x=0\quad\rightarrow\quad x=1$

Sustituyendo en la primera ecuación este valor, queda: $2\log x+\log y=1\quad\rightarrow\quad \log y=1\quad\rightarrow\quad y=10$

Por tanto, la solución es $x=1$, $y=10$.

g) $\left.\begin{array}{l}2^{x+y}=32\\ \ln x+\ln y=\ln 6\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}2^{x+y}=2^5\\ \ln(xy)=\ln 6\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x+y=5\\ xy=6\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}y=5-x\\ x(5-x)=6\end{array}$

$$5x-x^2=6\quad\rightarrow\quad 0=x^2-5x+6\quad\rightarrow\quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x=3\quad\rightarrow\quad y=5-3=2\\[2ex] x=2\quad\rightarrow\quad y=5-2=3\end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=3$

h) $\left.\begin{array}{l}2\log x-\log y=0\\ 2^{y+2x}=8\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\log x^2=\log y\\ 2^{y+2x}=2^3\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x^2=y\\ y+2x=3\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x^2=y\\ y=3-2x\end{array}\right\}$ $x^2=3-2x\quad\rightarrow\quad x^2+2x-3=0$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\dfrac{-2\pm 4}{2}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x=1\quad\rightarrow\quad y=1\\[2ex] x=-3\quad\text{(no válida)}\end{cases}$ Hay una única solución: $x=1$, $y=1$

i) $\left.\begin{array}{l} y^2 - x = 2 \\ log\ (x+y) = 1 \end{array}\right\}$ $\quad \begin{array}{l} y^2 - 2 = x \\ log\ (y^2 - 2 + y) = 1 \ \rightarrow \ y^2 - 2 + y = 10 \end{array}$

$$y^2 + y - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

- $y = 3 \quad \rightarrow \quad x = 9 - 2 = 7$
- $y = -4 \quad \rightarrow \quad x = 16 - 2 = 14$

Hay dos soluciones: $x_1 = 7$, $y_1 = 3$; $x_2 = 14$, $y_2 = -4$

j) $\left.\begin{array}{l} 2^{x+1} + 2^y = 8 \\ \log\ y - \log\ x = \log\ 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 2^{x+1} + 2^y = 8 \\ \log \frac{y}{x} = \log\ 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 2^{x+1} + 2^y = 8 \\ \frac{y}{x} = 2 \end{array}\right\}$ $\quad y = 2x$

$2^{x+1} + 2^{2x} = 8 \quad \rightarrow \quad 2^x \cdot 2 + (2^x)^2 = 8$; Cambio: $2^x = z \quad \rightarrow \quad 2z + z^2 = 8 \quad \rightarrow z^2 + 2z - 8 = 0$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z = 2 \\ z = -4 \end{cases}$$

- $z = 2 \quad \rightarrow \quad 2^x = 2 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 2$
- $z = -4 \quad \rightarrow \quad 2^x = -4 \quad \rightarrow$ No vale

El sistema tiene una única solución: $x = 1$, $y = 2$

k) $\left.\begin{array}{r} x - y = 9 \\ log\, x - log\, y = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 9 + y \\ log\ \frac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 9 + y \\ \frac{x}{y} = 10 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 9 + y \\ x = 10y \end{array}\right\}$ $9 + y = 10y \quad \rightarrow \quad 9 = 9y \quad \rightarrow \quad y = 1 \quad \rightarrow \quad x = 10$

Hay una solución: $x = 10$; $y = 1$

l) $\left.\begin{array}{r} y^2 - x^2 = -3 \\ xy = -2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} y^2 - x^2 = -3 \\ y = \frac{-2}{x} \end{array}\right\}$ $\left(\frac{-2}{x}\right)^2 - x^2 = -3$; $\frac{4}{x^2} - x^2 = -3 \quad \rightarrow \quad 4 - x^4 = -3x^2 \quad \rightarrow \quad 0 = x^4 - 3x^2 - 4$

Cambio: $x^2 = z \quad \rightarrow \quad z^2 - 3z - 4 = 0$

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ z = -1 \quad \rightarrow \quad \text{no vale} \end{cases}$$

- $x = 2 \quad \rightarrow \quad y = -1$ Hay dos soluciones: $x_1 = 2$; $y_1 = -1$
- $x = -2 \quad \rightarrow \quad y = 1$ $\qquad x_2 = -2$; $y_2 = 1$

m) $\left.\begin{array}{l} 3\sqrt{x+1} = y - 2 \\ 3x + y = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 3\sqrt{x+1} = y - 2 \\ y = -1 - 3x \end{array}\right\}$ $3\sqrt{x+1} = -1 - 3x - 2$

$$3\sqrt{x+1} = -3x - 3 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x+1} = \frac{-3x - 3}{3} \quad \rightarrow \quad \sqrt{x+1} = -x - 1$$

$$x + 1 = (-x-1)^2 \quad \rightarrow \quad x + 1 = x^2 + 2x + 1 \quad \rightarrow \quad 0 = x^2 + x \Rightarrow x(x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{no válida} \\ x = -1 \quad \rightarrow \quad y = 2 \end{cases}$$

Hay una única solución: $x = -1$; $y = 2$

n) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 6y - 6x = xy \\ 2x - 1 = y \end{array}\right\}$ $6(2x-1) - 6x = x(2x-1) \Rightarrow 12x - 6 - 6x = 2x^2 - x \quad \rightarrow \quad 0 = 2x^2 - 7x + 6$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \quad \rightarrow \quad y = 3 \\ x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y = 2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = 2$; $y_1 = 3$; $x_2 = \frac{3}{2}$; $y_2 = 2$

ñ) $\left.\begin{array}{l} x-2y=0 \\ 2^x+2^y=6 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=2y \\ 2^{2y}+2^y=6 \end{array}\right\}$ $\left(2^y\right)^2+2^y=6$ Hacemos el cambio: $2^y=z$

$$z^2+z-6=0 \;\rightarrow\; z=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} z=2 \\ z=-3 \end{cases}$$

- $z=2 \;\rightarrow\; 2^y=2 \;\rightarrow\; y=1 \;\rightarrow\; x=2$
- $z=-3 \;\rightarrow\; 2^y=-3 \;\rightarrow$ no válida

Hay una solución: $x=2;\ y=1$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \;\Rightarrow\; 6(y+x)=5xy$$

o) $x=-1+2y \Rightarrow 6y+6x=5xy \;\Rightarrow\; 6y+6(-1+2y)=5(-1+2y)y$

$$6y-6+12y=-5y+10y^2 \;\Rightarrow\; 10y^2-23y+6=0$$

$$y=\frac{23\pm\sqrt{529-240}}{20}=\frac{23\pm 17}{20}\begin{cases} y=2 \;\rightarrow\; x=3 \\ y=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10} \;\rightarrow\; x=\dfrac{-2}{5} \end{cases}$$

p) $y=\dfrac{6}{x} \;\rightarrow\; x^2+\dfrac{36}{x^2}=13 \;\rightarrow\; x^4+36=13x^2 \;\rightarrow\; x^4-13x^2+36=0$

Cambio: $x^2=z$. Así: $z^2-13z+36=0 \Rightarrow z=\dfrac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\dfrac{13\pm\sqrt{25}}{2}=\dfrac{13\pm 5}{2}\begin{cases} z=9 \;\rightarrow\; x=\pm 3 \\ z=4 \;\rightarrow\; x=\pm 2 \end{cases}$

Soluciones: $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=3 \\ y_2=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=-2 \\ y_3=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=2 \\ y_4=3 \end{cases}$

q) $x=\left(5-\sqrt{x}\right)^2-2\left(5-\sqrt{x}\right)+1 \Rightarrow x=25+x-10\sqrt{x}-10+2\sqrt{x}+1 \Rightarrow$

$8\sqrt{x}=16 \;\Rightarrow\; \sqrt{x}=2 \;\Rightarrow\; x=4,\quad y=3$

SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS

<u>EJERCICIO 8</u> : Obtén, mediante el método de Gauss, la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x+2y+z=7 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+5y+z=-2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x+y-2z=-6 \\ 2x-y+3z=-8 \\ x+y-z=4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -2x-y+z=-4 \\ 3x+y-2z=6 \\ 2x+y+z=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y+2z=2 \\ x+2y-z=3 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x+2y-2z=6 \\ x-3y+z=-7 \\ 2x-y+z=-3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-2y+3z=1 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-2y+z=6 \\ 3x+y-z=7 \\ x-y+2z=6 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x-y+2z=7 \\ x+y-3z=-5 \\ 2x-y+2z=9 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} x+y+2z=6 \\ x-3y-z=1 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=7 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+5y+z=-2 \end{array}\right\}$ $\boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a+1^a \\ 3^a-1^a \end{array}}$ $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=7 \\ 5x=15 \\ -2x+3y=-9 \end{array}\right\}$ $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{r} x=3 \\ y=\dfrac{-9+2x}{3}=-1 \\ z=7-3x-2y=0 \end{array}\right\}$ $\rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \\ z=0 \end{array}}$

b) $$\left.\begin{array}{r}3x+y-2z=6\\2x-y+3z=-8\\x+y-z=4\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a+1^a\\3^a-1^a\end{array}}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+y-2z=6\\5x+z=-2\\-2x+z=-2\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a-2^a\end{array}}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+y-2z=6\\5x+z=-2\\-7x=0\end{array}\right\}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}x=0\\z=-2-5x=-2\\y=6-3x+2z=2\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}x=0\\y=2\\z=-2\end{array}}$$

c) $$\left.\begin{array}{r}-2x-y+z=-4\\3x+y-2z=6\\2x+y+z=6\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a+1^a\\3^a+1^a\end{array}}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-2x+-y+z=-4\\x-z=2\\2z=2\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}z=1\\x=2+z=3\\y=-2x+z+4=-1\end{array}\right\}\textit{Solución: }\ x=3\ ,\ y=-1\ ,\ z=1$$

d) $$\left.\begin{array}{r}2x-y+2z=2\\x+2y-z=3\\2x-y+3z=1\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}2^a\\1^a\\3^a\end{array}}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y-z=3\\2x-y+2z=2\\2x-y+3z=1\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-2\cdot1^a\\3^a-2\cdot1^a\end{array}}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y-z=2\\-5y+4z=-4\\-5y+5z=-5\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-3^a\\3^a:(-5)\end{array}}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y-z=3\\-z=1\\y-z=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}z=-1\\y=1+z=0\\x=3-2y+z=2\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}x=2\\y=0\\z=-1\end{array}}$$

e) $$\left.\begin{array}{r}x+2y-2z=6\\x-3y+z=-7\\2x-y+z=-3\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-1^a\\3^a-2\cdot1^a\end{array}}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y-2z=6\\-5y+3z=-13\\-5y+5z=-15\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-3^a\\3^a:(-5)\end{array}}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y-2z=6\\-2z=2\\y-z=3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}z=\dfrac{2}{-2}=-1\\y=3+z=3-1=2\\x=6-2y+2z=6-4-2=0\end{array}\right\}\ \textit{Solución}:\ x=0\ ,\ y=2\ ,\ z=-1$$

f) $$\left.\begin{array}{r}x+y-z=2\\2x-2y+3z=1\\x+2y-z=4\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-2\cdot1^a\\3^a-1^a\end{array}}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y-z=2\\-4y+5z=-3\\y=2\end{array}\right\}\rightarrow\begin{array}{l}y=2\\z=\dfrac{-3+4y}{5}=\dfrac{-3+8}{5}=1\\x=2-y+z=2-2+1=1\end{array}$$

Solución: $x=1\ ,\ y=2\ ,\ z=1$

g) $$\left.\begin{array}{r}x-2y+z=6\\3x+y-z=7\\x-y+2z=6\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-3\cdot1^a\\3^a-1^a\end{array}}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-2y+z=6\\7y-4z=-11\\y+z=0\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}1^a\\2^a-7\cdot3^a\\3^a\end{array}}\rightarrow$$

$$\text{h)}\ \left.\begin{array}{r} x-y+2z=7 \\ x+y-3z=-5 \\ 2x-y+2z=9 \end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-1^a \\ 3^a-2\cdot 1^a \end{array}} \to \left.\begin{array}{r} x-y+2z=7 \\ 2y-5z=-12 \\ y-2z=-5 \end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-2\cdot 3^a \\ 3^a \end{array}} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x-y+2z=7 \\ -z=-2 \\ y-2z=-5 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} z=2 \\ y=-5+2z=-5+4=-1 \\ x=7+y-2z=7-1-4=2 \end{array}\right\}\ \textit{Solución}:\ x=2\ ,\ y=-1\ ,\ z=2$$

$$\text{i)}\ \left.\begin{array}{r} x+y+2z=6 \\ x-3y-z=1 \\ x-y-z=-1 \end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-1^a \\ 3^a-1^a \end{array}} \to \left.\begin{array}{r} x+y+2z=6 \\ -4y-3z=-5 \\ -2y-3z=-7 \end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-2\cdot 3^a \\ 3^a \end{array}} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+2z=6 \\ 3z=9 \\ -2y-3z=-7 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} z=\frac{9}{3}=3 \\ y=\frac{-7+3z}{-2}=\frac{-7+9}{-2}=-1 \\ x=6-y-2z=6+1-6=1 \end{array}\right\}\ \textit{Solución}:\ x=1\ ,\ y=-1\ ,\ z=3$$

INECUACIONES

<u>EJERCICIO 9</u> : Resuelve:

a) $\frac{2x-1}{3}-2<x-\frac{x+1}{2}$ **b)** $\frac{x-1}{3}\geq 2+\frac{3-x}{6}$ **c)** $\frac{x-4}{2}-\frac{x+1}{3}\leq\frac{1}{6}$

d) $x^2+3x\leq 0$ **e)** $\frac{2(x-3)}{3}-\frac{x+1}{3}>x-2$ **f)** $\frac{x+7}{3-x}\geq 0.$

g) $2x+5\leq x^2-2x-16$ **h)** $\frac{x+2}{x^2}\leq 0$ **i)** $x^2+3x-6>8-2x$

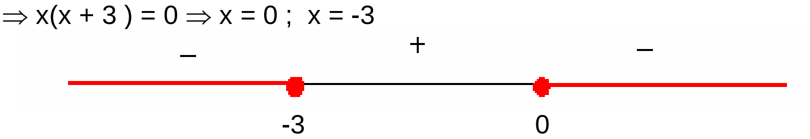
Solución:

a) $2(2x-1)-12<6x-3(x+1)\Rightarrow\quad 4x-2-12<6x-3x-3\Rightarrow x<11\ \to$ intervalo $(-\infty,11)$

b) $2(x-1)\geq 12+3-x\Rightarrow 2x-2\ \geq 12+3-x\Rightarrow 3x\geq 17\Rightarrow x\geq\frac{17}{3}\ \to$ Intervalo $\left[\frac{17}{3},+\infty\right)$

c) $3(x-4)-2(x+1)\leq 1\Rightarrow\ 3x-12-2x-2\leq 1\Rightarrow x\leq 15\ \to$ Intervalo $(-\infty,15]$.

d) $x^2+3x=0\Rightarrow x(x+3)=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=-3$



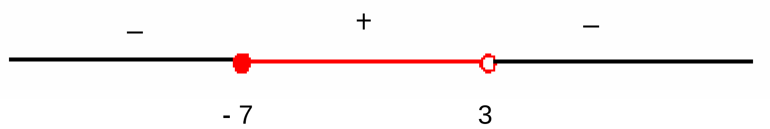
Solución: $x\in(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$

e) $2(x-3)-(x+1)>3(x-2)\Rightarrow 2x-6-x-1>3x-6\Rightarrow\ -1>2x\Rightarrow x<\frac{-1}{2}\ \to$ Intervalo $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)$

f) Igualamos por separado numerador y denominador a cero

$x+7=0\Rightarrow x=-7$ (pintado)

$3-x=0\Rightarrow x=3$ (sin pintar)

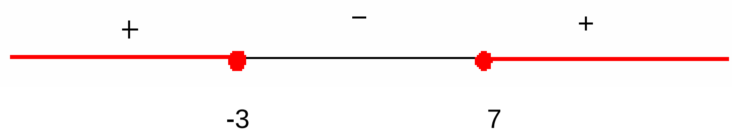


Solución: $x\in[-7,3)$.

g) Reducimos a una ecuación de segundo grado y calculamos sus soluciones:

$0 \le x^2 - 2x - 16 - 2x - 5 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x - 21 \ge 0$

$$x^2 - 4x - 21 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2} \begin{cases} 7 \\ -3 \end{cases}$$

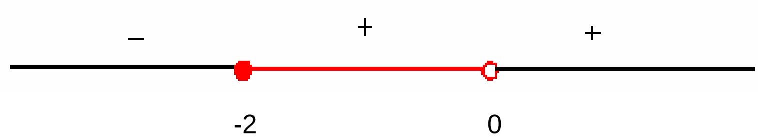


La solución es $(-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$.

h) Se igualan, por separado, numerador y denominador a cero:

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ (pintado)

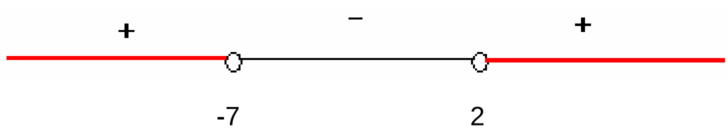
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (sin pintar)



Por tanto, la solución es $(-\infty, -2]$.

i) $x^2 + 3x - 6 > 8 - 2x \quad \rightarrow \quad x^2 + 5x - 14 > 0$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 5x - 14 = 0$: $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \dfrac{-5 \pm 9}{2} \begin{cases} 2 \\ -7 \end{cases}$



Solución: $x \in (-\infty, -7) \cup (2, +\infty)$

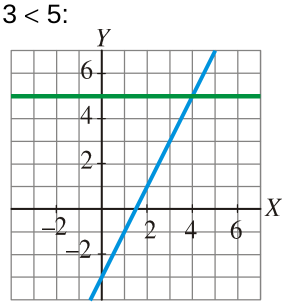
<u>EJERCICIO 10</u> : Resuelve e interpreta gráficamente:

a) $2x - 3 < 5$ b) $x^2 - 4 \le 0$ c) $-3x + 1 > -5$ d) $x^2 + x - 6 \le 0$ e) $-2x + 4 \le -2$ f) $2x + 1 > -5$

Solución:

a)

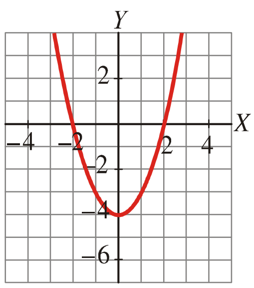
- Resolvemos la inecuación: $2x - 3 < 5 \quad \rightarrow \quad 2x < 8 \quad \rightarrow \quad x < 4 \Rightarrow$ Soluciones: $\{x / x < 4\} = (-\infty, 4)$
- La interpretación gráfica es la siguiente: para valores de x menores que 4, la recta $y = 2x - 3$ queda por debajo de la recta $y = 5$; es decir, $2x - 3 < 5$:



b) $x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

La parábola $y = x^2 - 4$ corta al eje x en $x = -2$ y en $x = 2$.

En el intervalo $[-2, 2]$ toma valores negativos o nulos. Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$:

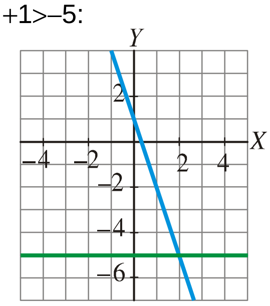


c)

• Resolvemos la inecuación: $-3x+1>-5 \quad \rightarrow \quad -3x>-6 \quad \rightarrow \quad 3x<6 \quad \rightarrow \quad x<2$

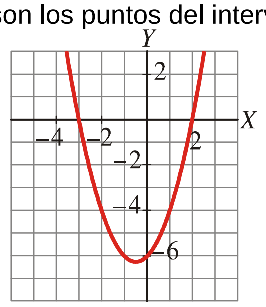
Soluciones: $\{x\,/\,x<2\}=(-\infty,\ 2)$

• La interpretación gráfica es la siguiente: para valores de x menores que 2, la recta $y=-3x+1$, va por encima de la recta $y=-5$; es decir, $-3x+1>-5$:



d) $x^2+x-6=0 \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$

La parábola $y=x^2+x-6$ corta al eje X en –3 y en 2.
En el intervalo [–3, 2], toma valores negativos o nulos.
Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo [–3, 2].

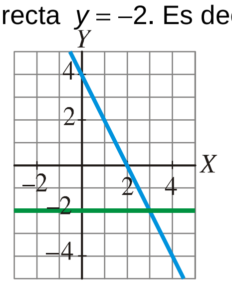


e)

• Resolvemos la inecuación: $-2x+4\le-2 \quad \rightarrow \quad -2x\le-6 \quad \rightarrow 2x\ge 6 \quad \rightarrow \quad x\ge 3$

Soluciones: $\{x\,/\,x\ge 3\}=[3,+\infty)$

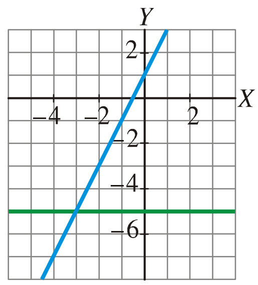
La interpretación gráfica es la siguiente: para valores de x mayores o iguales que 3, la recta $y=-2x+4$ va por debajo (coincide) con la recta $y=-2$. Es decir, $-2x+4\le-2$



f)

• Resolvemos la inecuación: $2x+1>-5 \quad \rightarrow \quad 2x>-6 \quad \rightarrow \quad x>-3 \Rightarrow$ Soluciones: $\{x\,/\,x>-3\}=(-3,+\infty)$

• Interpretación gráfica: para valores de x mayores que –3, la recta $y=2x+1$ va por encima de la recta $y=-5$. Es decir, $2x+1>-5$.



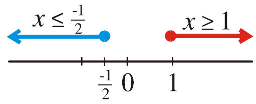
SISTEMAS DE INECUACIONES

<u>EJERCICIO 11</u> : Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{l} 4(x+1)-2\le 0 \\ 2x+4\ge 6 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} 3x-2<4 \\ 2x+6>x-1 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{l} 1-(2x-1)<0 \\ 3(x+1)-9\le 0 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{l} 3(x-2)+7\le 4 \\ 2(x-1)<4 \end{array}\right\}$

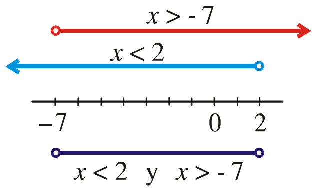
Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} 4(x+1)-2\le 0 \\ 2x+4\ge 6 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 4x+4-2\le 0 \\ 2x+4\ge 6 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 4x\le -2 \\ 2x\ge 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x\le \frac{-2}{4} \\ x\ge 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x\le \frac{-1}{2} \\ x\ge 1 \end{array}$



Como no hay ninguna solución común a las dos inecuaciones, el sistema no tiene solución.

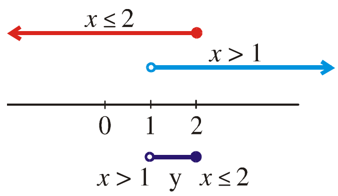
b) $\left.\begin{array}{l} 3x-2<4 \\ 2x+6>x-1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 3x<6 \\ x>-7 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x<2 \\ x>-7 \end{array}$



Las soluciones del sistema son las soluciones comunes a las dos inecuaciones, es decir:

$\{x<2 \text{ y } x>-7\}=\{x \,/\, -7<x<2\}=(-7,\,2)$

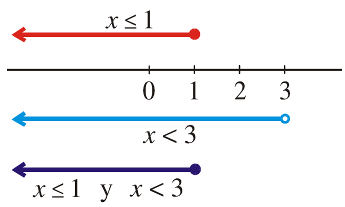
c) $\left.\begin{array}{l} 1-(2x-1)<0 \\ 3(x+1)-9\le 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 1-2x+1<0 \\ 3x+3-9\le 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} -2x<-2 \\ 3x\le 6 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x>1 \\ x\le 2 \end{array}$



Las soluciones del sistema son las soluciones comunes a las dos inecuaciones, es decir:

$\{x>1 \text{ y } x\le 2\}=\{x/\ 1<x\le 2\}=(1,\,2]$

d) $\left.\begin{array}{l} 3(x-2)+7\le 4 \\ 2(x-1)<4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 3x-6+7\le 4 \\ 2x-2<4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 3x\le 3 \\ 2x<6 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x\le 1 \\ x<3 \end{array}$



Las soluciones del sistema son las soluciones comunes a las dos inecuaciones, es decir:

$\{x\le 1 \text{ y } x<3\}=\{x \,/\, x\le 1\}=(-\infty,\,1]$

PROBLEMAS

<u>EJERCICIO 12</u> : Hemos comprado un pantalón y una camiseta por 44,1 euros. El pantalón tenía un 15% de descuento y la camiseta estaba rebajada un 10%. Si no tuvieran ningún descuento, habríamos tenido que pagar 51 euros. ¿Cuánto nos ha costado el pantalón y cuánto la camiseta?

Solución:

Llamamos x al precio del pantalón sin el descuento e y al precio de la camiseta sin descuento. Así:

$\left.\begin{array}{l} x+y=51 \\ 0{,}85x+0{,}9y=44{,}1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y=51-x \\ 0{,}85x+0{,}9(51-x)=44{,}1 \end{array}$

$0{,}85x-0{,}9x=44{,}1-45{,}9\,;\ -0{,}05x=-1{,}8\,;\ x=36\,;\ y=51-x=51-36=15$

El pantalón costaba 36 euros y la camiseta 15 euros, sin los descuentos.

Por tanto, el precio del pantalón (con descuento) ha sido de: $36\cdot 0{,}85=30{,}6$ euros

y el de la camiseta (con descuento) ha sido de: $15\cdot 0{,}9=13{,}5$ euros

<u>EJERCICIO 13</u> : Se mezcla cierta cantidad de café de 1,2 euros/kg con otra cantidad de café de 1,8 euros/kg, obteniendo 60 kg al precio de 1,4 euros/kg. ¿Cuántos kilogramos de cada clase se han utilizado en la mezcla?

Solución:
Llamamos x a la cantidad de café utilizado del primer tipo e y a la cantidad del segundo tipo. Así:
$x + y = 60$ (pues hemos obtenido 60 kg de mezcla)
$1,2x + 1,8y = 60 \cdot 1,4$ (este es el precio total de la mezcla)
Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x + y = 60 \\ 1,2x + 1,8y = 84 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = 60 - x \\ 1,2x + 1,8(60 - x) = 84 \end{array}\right\}$

$1,2x + 108 - 1,8x = 84 \quad \rightarrow \quad 1,2x - 1,8x = 84 - 108 \rightarrow -0,6x = -24 \quad \rightarrow \quad x = 40 \rightarrow y = 60 - x = 60 - 40 = 20$

Se han utilizado 40 kg del primer tipo y 20 kg del segundo tipo.

<u>EJERCICIO 14</u> : La edad de un padre hace dos años era el triple de la edad de su hijo. Dentro de once años, el padre tendrá el doble de la edad del hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

Solución:
Llamamos x a la edad actual del padre e y a la edad actual del hijo. Así:

	EDAD ACTUAL	HACE DOS AÑOS	DENTRO DE 11 AÑOS
PADRE	x	$x - 2$	$x + 11$
HIJO	y	$y - 2$	$y + 11$

Hace dos años, la edad del padre era el triple de la edad del hijo: $x - 2 = 3(y - 2)$
Dentro de once años, el padre tendrá el doble de edad que el hijo: $x + 11 = 2(y + 11)$
Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x - 2 = 3(y - 2) \\ x + 11 = 2(y + 11) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x - 2 = 3y - 6 \\ x + 11 = 2y + 22 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 3y - 4 \\ 3y - 4 + 11 = 2y + 22 \end{array}\right\}$

$3y - 2y = 22 + 4 - 11 \quad \rightarrow \quad y = 15 \rightarrow x = 3y - 4 = 45 - 4 = 41$

El padre tiene 41 años y el hijo, 15 años.

<u>EJERCICIO 15</u> : Un grifo tarda en llenar un estanque dos horas más que otro grifo. Si se abren los dos grifos a la vez, el estanque se llena en 2,4 horas. ¿Cuánto tiempo tardará el primer grifo en llenar el estanque? ¿Y el segundo grifo solo?

Solución:
Llamamos x a las horas que tarda uno de los grifos en llenar el estanque. Como el otro grifo tarda dos horas más, tardará $x + 2$. Es decir:

1er grifo $\rightarrow$ x horas $\rightarrow$ en una hora llena $\frac{1}{x}$ del estanque

2º grifo $\rightarrow$ $x + 2$ horas $\rightarrow$ en una hora llena $\frac{1}{x+2}$ del estanque

Entre los dos llenan, en una hora: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$ del estanque

Como los dos grifos juntos tardan 2,4 horas en llenar el estanque, en una hora llenarán $\frac{1}{2,4}$ del estanque.

Por tanto: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2,4}$

Resolvemos la ecuación: $2,4(x + 2) + 2,4x = x(x + 2) \rightarrow 2,4x + 4,8 + 2,4x = x^2 + 2x \rightarrow 0 = x^2 - 2,8x - 4,8$

$$x = \frac{2,8 \pm \sqrt{7,84 + 19,2}}{2} = \frac{2,8 \pm \sqrt{27,04}}{2} = \frac{2,8 \pm 5,2}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -1,2 \ \text{(no vale)} \end{cases}$$

Uno de los grifos tardaría 4 horas en llenarlo y el otro grifo tardaría 6 horas.

<u>EJERCICIO 16</u> : Un grupo de amigos va a cenar a un restaurante. Cuando van a pagar observan que, si cada uno pone 20 euros, sobran 5 euros; y si cada uno pone 15 euros, faltan 20 euros. ¿Cuántos amigos son y cuál es el precio total que tienen que pagar?

Solución:

Llamamos x al número de amigos e y al precio total de la cena.

Si cada uno pone 20 euros, sobran 5 euros, es decir: $20x - 5 = y$

Si cada uno pone 15 euros, faltan 20 euros, es decir: $15x + 20 = y$

Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 20x - 5 = y \\ 15x + 20 = y \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 20x - 5 = 15x + 20 \\ 5x = 25 \quad \rightarrow \quad x = 5 \end{array}$

$y = 20x - 5 = 100 - 5 = 95$ Son 5 amigos y el precio total es de 95 euros.

<u>EJERCICIO 17</u> : Averigua un número sabiendo que la suma del doble de su inverso más el triple de dicho número da como resultado $\frac{25}{2}$.

Solución:

Llamamos x al número buscado y planteamos la ecuación: $\frac{2}{x} + 3x = \frac{25}{2}$

$4 + 6x^2 = 25x \Rightarrow 6x^2 - 25x + 4 = 0$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 96}}{12} = \frac{25 \pm \sqrt{529}}{12} = \frac{25 \pm 23}{12} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: 4 y $\frac{1}{6}$

<u>EJERCICIO 18</u> : Un grupo de amigos tiene que pagar una factura de 500 euros. Si fueran dos amigos más, cada uno de ellos tendría que pagar 12,5 euros menos. ¿Cuántos amigos son?

Solución:

Llamamos x al número de amigos. Cada uno tiene que pagar $\frac{500}{x}$ euros.

Si fueran $x + 2$ amigos (dos amigos más), cada uno tendría que pagar:

$\frac{500}{x} - 12{,}5$ euros (12,5 euros menos)

Como en total son 500 euros, $(x+2)\left(\frac{500}{x} - 12{,}5\right) = 500$

Resolvemos la ecuación: $500 - 12{,}5x + \frac{1\,000}{x} - 25 = 500 \Rightarrow$ $-12{,}5x + \frac{1\,000}{x} - 25 = 0 \Rightarrow$

$-12{,}5x^2 + 1\,000 - 25x = 0 \Rightarrow 12{,}5x^2 + 25x - 1\,000 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 50000}}{25} = \frac{-25 \pm \sqrt{50625}}{25} = \frac{-25 \pm 225}{25} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 8 \\ x = -10 \ \text{(no vale)} \end{cases}$$

Son, por tanto, 8 amigos.

<u>EJERCICIO 19</u> : Cristina tiene 8 años más que Carlos, y hace 2 años tenía el doble de edad que él. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

Solución:

Llamamos x a la edad que tiene actualmente Carlos y hacemos un cuadro que resuma la información:

	AHORA	HACE 2 AÑOS
CRISTINA	$x + 8$	$x + 8 - 2 = x + 6$
CARLOS	x	$x - 2$

La edad de Cristina hace 2 años era el doble que la de Carlos, es decir: $x + 6 = 2(x - 2)$

Resolvemos la ecuación: $x + 6 = 2x - 4 \Rightarrow 10 = x \Rightarrow$ Por tanto, Carlos tiene 10 años y Cristina, 18.

<u>EJERCICIO 20</u> : En un examen tipo test, que constaba de 40 preguntas, era obligatorio responder a todas. Cada pregunta acertada se valoró con un punto, pero cada fallo restaba medio punto. Sabiendo que la puntuación total que obtuvo Pablo fue de 32,5 puntos, ¿cuántas preguntas acertó?

Solución:

Llamamos x al número de preguntas que acertó. Así: $\left.\begin{array}{l} \text{Acertó} \rightarrow x \\ \text{Falló} \rightarrow 40-x \end{array}\right\}$

Como cada acierto vale un punto, y cada fallo resta medio punto, la puntuación total fue:

$x-0,5(40-x)=32,5$

Resolvemos la ecuación: $x-20+0,5x=32,5 \Rightarrow 1,5x=52,5 \Rightarrow x=\dfrac{52,5}{1,5}=35$

Por tanto, acertó 35 preguntas.

<u>EJERCICIO 21</u> : Un padre ha comprado un jersey para cada uno de sus cinco hijos, gastándose en total 108,75 euros. Tres de los jerseys tenían un 15% de descuento, y otro de ellos tenía un 20% de descuento. Sabiendo que inicialmente costaban lo mismo, ¿cuánto ha tenido que pagar por cada jersey?

Solución:
Llamamos x a lo que costaba cada jersey antes de los descuentos.
Los que tienen un 15% de descuento valdrán ahora $0,85x$.
El que está rebajado un 20% costará $0,8x$.
Por tanto, el total que ha pagado es: $3 \cdot 0,85x + 0,8x + x = 108,75$

$2,55x + 0,8x + x = 108,75 \Rightarrow 4,35x = 108,75 \Rightarrow x = \dfrac{108,75}{4,35} = 25$ euros

Por el que no tiene descuento ha pagado 25 euros. El que tiene un 20% de descuento cuesta ahora 20 euros. Por cada uno de los tres que tenían rebaja de un 15% ha tenido que pagar 21,25 euros.

<u>EJERCICIO 22</u> : Un comerciante compró dos artículos por 30 euros y los vendió por 33,9 euros. En la venta del primer artículo obtuvo un 10% de beneficio y en la venta del segundo artículo ganó un 15%. ¿Cuánto le costó cada uno de los artículos?

Solución:
Llamamos x al precio del primer artículo e y al precio del segundo. Así:

$\left.\begin{array}{l} x+y=30 \\ 1,1x+1,15y=33,9 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=30-x \\ 1,1x+1,15(30-x)=33,9 \end{array}$

$1,1x+34,5-1,15x=33,9; \quad -0,05x=-0,6; \quad x=12; \quad y=30-12=18.$

El primer artículo le costó 12 euros y el segundo, 18.

<u>EJERCICIO 23</u> : La suma de dos números es 12 y la de sus inversos es $\dfrac{3}{8}$. ¿Cuáles son esos números?

Solución:
Llamamos x e y a los números que buscamos.

Así: $\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ 8y+8x=3xy \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=12-x \\ 8(12-x)+8x=3x(12-x) \end{array}$

$96-8x+8x=36x-3x^2; \quad 3x^2-36x+96=0$

$x^2-12x+32=0; \quad x=\dfrac{12\pm\sqrt{144-128}}{2}=\dfrac{12\pm\sqrt{16}}{2}=\dfrac{12\pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x=8 \rightarrow y=4 \\ x=4 \rightarrow y=8 \end{cases}$

Los números son el 4 y el 8.

<u>EJERCICIO 24</u> : Alberto compró 3 bolígrafos y 2 cuadernos, pagando en total 2,9 euros. Una semana después, los bolígrafos tenían un 20% de descuento y los cuadernos, un 15%. Si los hubiera comprado con estas rebajas, habría tenido que pagar 2,42 euros. ¿Cuánto le costó a Alberto cada bolígrafo y cuánto cada cuaderno?

Solución:
Llamamos x al precio de cada bolígrafo e y al precio de cada cuaderno, antes de la rebaja.

Así: $\left.\begin{array}{l} 3x+2y=2,9 \\ 0,8\cdot 3x+0,85\cdot 2y=2,42 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x+2y=2,9 \\ 2,4x+1,7y=2,42 \end{array}\right\} \quad y=\dfrac{2,9-3x}{2}$

$$2,4x+1,7\left(\frac{2,9-3x}{2}\right)=2,42 \Rightarrow 2,4x+\frac{4,93-5,1x}{2}=2,42 \Rightarrow 4,8x+4,93-5,1x=4,84 \Rightarrow -0,3x=-0,09$$

$x=0,3 \quad \rightarrow \quad y=1$

Antes de la rebaja, cada bolígrafo costaba 0,3 euros y cada cuaderno, 1 euro.

<u>EJERCICIO 25</u> : En una empresa obtienen 6 euros de beneficio por cada envío que hacen; pero si el envío es defectuoso, pierden por él 8 euros. En un día hicieron 2 100 envíos, obteniendo 9 688 euros de beneficio. ¿Cuántos envíos válidos y cuántos defectuosos hicieron ese día?

Solución:
Llamamos x al número de envíos válidos e y al número de envíos defectuosos. Así:

$\left.\begin{array}{l} x+y=2100 \\ 6x-8y=9\,688 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=2100-x \\ 6x-8(2100-x)=9\,688 \end{array}$

$6x-16\,800+8x=9\,688; \quad 14x=26\,488; \quad x=1892 \; ; \; y=2100-1892=208$

Por tanto, el número de envíos válidos fue de 1 892 y el de envíos defectuosos, 208.

<u>EJERCICIO 26</u> : Se mezcla cierta cantidad de café de 6 euros/kg con otra cantidad de café de 4 euros/kg, obteniendo 8 kg de mezcla. Sabiendo que el precio del café mezclado es de 4,5 euros/kg, ¿cuántos kilogramos se han mezclado de cada clase?

Solución:
Llamamos x a la cantidad de café (en kg) del primer tipo e y a la cantidad de café (en kg) del segundo tipo. Así: $\left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ 6x+4y=4,5\cdot 8 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ 6x+4y=36 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=8-x \\ 6x+4(8-x)=36 \end{array}$

$6x+32-4x=36; \quad 2x=4; \quad x=2 \quad \rightarrow \quad y=8-2=6$

Se han mezclado 2 kg de café de 6 euros/kg con 6 kg de café de 4 euros/kg.