TEMA 2 – SUCESIONES

SUCESIONES Y TÉRMINOS

<u>EJERCICIO 1</u> : Si el término general de una sucesión es $a_n = \frac{n^2+10}{n+2}$

a) Halla el término segundo y el décimo.
b) ¿Hay algún término que valga 5? Si hay decir que lugar ocupa en la sucesión.
c) ¿Hay algún término que valga 7? Si hay decir que lugar ocupa en la sucesión.

Solución:

a) $a_2 = \frac{2^2+10}{2+2} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$; $a_{10} = \frac{10^2+10}{10+2} = \frac{110}{12} = \frac{55}{6}$

b) $a_n = \frac{n^2+10}{n+2} = 5 \Rightarrow n^2 + 10 = 5n + 10 \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n(n-5) = 0 \Rightarrow n = 0$ ó $n = 5$

Como n tiene que ser un número natural positivo $\Rightarrow n = 5 \Rightarrow$ El quinto término de la sucesión.

b) $a_n = \frac{n^2+10}{n+2} = 7 \Rightarrow n^2 + 10 = 7n + 14 \Rightarrow n^2 - 7n - 4 = 0 \Rightarrow n = \frac{7 \pm \sqrt{49+16}}{2}$

Como n tiene que ser un número natural positivo $\Rightarrow$ No existe ningún término que valga 7.

<u>EJERCICIO 2</u> : Si el primer término de una sucesión es $a_1 = 3$ y se cumple que $a_{n+1} = a_n + 2$, calcular el segundo término y el décimo.

Solución:

$a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5$
$a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2 = 7$
$a_4 = a_3 + 2 = 7 + 2 = 9$
$a_5 = a_4 + 2 = 9 + 2 = 11$
$a_6 = a_5 + 2 = 11 + 2 = 13$
$a_7 = a_6 + 2 = 13 + 2 = 15$
$a_8 = a_7 + 2 = 15 + 2 = 17$
$a_9 = a_8 + 2 = 17 + 2 = 19$
$a_{10} = a_1 + 2 = 19 + 2 = 21$

TÉRMINO GENERAL

<u>EJERCICIO 3</u> : Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) –1, 2, 5, 8, 11,... **b) 1, –2, 4, –8, 16,...** **c) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$** **d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$**

Solución:

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = -1$ y $d = 3$. Por tanto: $a_n = -1 + (n-1)\cdot 3 = -1 + 3n - 3 \rightarrow a_n = 3n - 4$

b) Es una progresión geométrica con $a_1 = 1$ y $r = -2$. Por tanto: $a_n = 1\cdot(-2)^{n-1} \rightarrow a_n = (-2)^{n-1}$

c) Es una progresión aritmética con $a_1 = \frac{1}{2}$ y $d = \frac{1}{2}$. Por tanto : $a_n = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{2} \rightarrow a_n = \frac{n}{2}$

d) Es una progresión geométrica con $a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$. Por tanto : $a_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

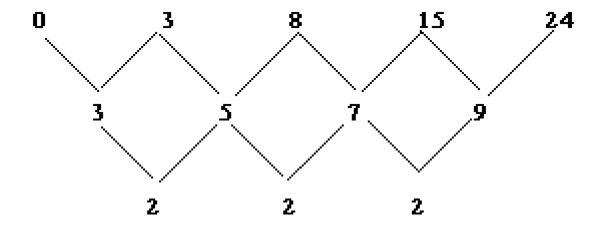
<u>EJERCICIO 4</u> : Encuentra el término general de las siguientes sucesiones:

a) 0, 3, 8, 15, 24, ... **b) $\frac{2}{5}, \frac{4}{6}, \frac{8}{7}, \frac{16}{8}, \frac{32}{9}, \ldots$** **c) 2, 9, 28, 65, 126, ...**

d) $-\frac{3}{2},\frac{4}{3},-\frac{5}{4},\frac{6}{5},\ldots$ **e)** $1,-\frac{3}{2},2,-\frac{5}{2},3,\ldots$ **f)** $-2\,;\ -0{,}5\,;\ 1;\ 2{,}5\,;\ 4\,;\ldots$

Solución:

a) No es aritmética ni geométrica: Restando a cada uno el anterior (2 pasos hasta que se repite)



$\Rightarrow$ Grado 2 $\Rightarrow S_n = an^2 + bn + c$

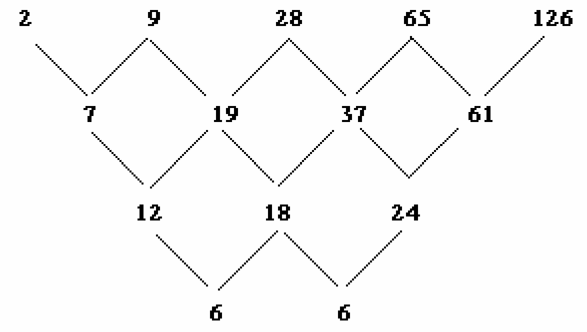
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=8 \end{cases} \underset{\text{Restando a cada ecuación la anterior}}{\Rightarrow} \begin{cases} 3a+b=3 \\ 5a+b=5 \end{cases} \underset{\text{Restando a cada ecuación la anterior}}{\Rightarrow} \{2a=2$$

a = 1; 3.1 + b = 3 $\Rightarrow$ b = 0 ; 1 + 0 + c = 0 $\Rightarrow$ c = -1 $\Rightarrow S_n = n^2 - 1$

b) Numerador: Geométrica de r = 2 $\Rightarrow a_n = a_1.r^{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n$

Denominador: Aritmética de d = 1 $\Rightarrow b_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)1 = 5 + n - 1 = 4 + n$ $\quad b_n = \frac{2^n}{n+4}$

c) No es aritmética ni geométrica: Restando a cada uno el anterior (3 pasos hasta que se repite)



$\Rightarrow$ Grado 3 $\Rightarrow S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

$$\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ 8a+4b+2c+d=9 \\ 27a+9b+3c+d=28 \\ 64a+16b+4c+d=65 \end{cases} \underset{\text{Restando a cada ecuación la anterior}}{\Rightarrow} \begin{cases} 7a+3b+c=7 \\ 19a+5b+c=19 \\ 37a+7b+c=37 \end{cases} \underset{\text{Restando a cada ecuación la anterior}}{\Rightarrow} \begin{cases} 12a+2b=12 \\ 18a+2b=18 \end{cases}$$

$$\underset{\text{Restando a cada ecuación la anterior}}{\Rightarrow} \{6a=6$$

a = 1; 12.1 + 2b = 12 $\Rightarrow$ b = 0; 7.1 + 3.0 + c = 7 $\Rightarrow$ c = 0; 1 + 0 + 0 + d = 2 $\Rightarrow$ d = 1 $\Rightarrow S_n = n^3 + 1$

d) Alternancia de signos $(-1)^n$

Numerador: Aritmética d = 1 $\Rightarrow a_n = 3 + (n-1).1 = n + 2$ $\quad S_n = (-1)^n \frac{n+2}{n+1}$

Denominador: Aritmética de = 1 $\Rightarrow b_n = 2 + (n-1).1 = n + 1$

e) $\frac{2}{2},-\frac{3}{2},\frac{4}{2},-\frac{5}{2},\frac{6}{2},\ldots.$

Alternancia de signos $(-1)^{n+1}$ $\quad S_n = (-1)^{n+1}\frac{n+1}{2}$

Numerador: Aritmética d = 1 $\Rightarrow a_n = 2 + (n-1).1 = n + 1$

Denominador: Constante $\Rightarrow b_n = 2$

f) Es una progresión aritmética con $a_1 = -2$ y $d = 1{,}5$. Por tanto:

$$a_n = -2 + (n-1)\cdot 1{,}5 = -2 + 1{,}5n - 1{,}5 = 1{,}5n - 3{,}5 \;\Rightarrow\; a_n = 1{,}5n - 3{,}5$$

<u>EJERCICIO 5</u> : Halla el criterio de formación de las siguientes sucesiones recurrentes:

a) 3, 4, 12, 48, 576, 27 648,... **b) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...**

c) 1, 5, 4, –1, –5, –4, 1, 5,... **d) 1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, 8 192,...**

e) 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81,...

Solución:

a) A partir del tercero, cada término se obtiene multiplicando los dos anteriores:

$a_1 = 3 \quad , \quad a_2 = 4 \quad , \quad a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ para $n > 2$

b) A partir del tercero, cada término se obtiene sumando los dos anteriores:

$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 2 \quad , \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n > 2$

c) A partir del tercero, cada término se obtiene restando los dos anteriores:

$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 5 \quad , \quad a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

d) A partir del tercero, cada término se obtiene multiplicando los dos anteriores:

$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 2 \quad , \quad a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ para $n > 2$

e) A partir del tercero, cada término se obtiene sumando los dos anteriores:

$a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 5 \quad , \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n > 2$

LÍMITES DE SUCESIONES

EJERCICIO 6 : Para cada una de estas sucesiones, averigua si tienen límite. Clasificar las sucesiones en función de su límite:

a) $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$ **b)** $b_n = (n+1)^2$ **c)** $b_n = \frac{2n+1}{3}$

d) $a_n = 2 - n^2$ **e)** $b_n = 2 + \frac{1}{n}$ **f)** $b_n = (-1)^n$ **g)** $b_n = -n + 2$

Solución:

a) $\lim \frac{3n+1}{n+2} = \frac{+\infty}{+\infty}(\text{Ind}) \Rightarrow \frac{3}{1} = 3$ Convergente

b) $\lim\, (n+1)^2 = +\infty$ Divergente

c) $\lim \frac{2n+1}{-3} = \frac{+\infty}{-3} = -\infty$ Divergente

d) $\lim\, 2 - n^2 = -\infty$ Divergente

e) $\lim 2 + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{+\infty} = 2 + 0 = 2$ Convergente

f) $\lim\, (-1)^n = \pm 1 \Rightarrow$ No tiene límite Oscilante

g) $\lim -n + 2 = -\infty$ Divergente

EJERCICIO 7 : Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+3}\right)$ **b)** $\lim \frac{3n^2+4n}{n^3+2n^2+1}$ **c)** $\lim \frac{n^2+3}{\sqrt{4n^4+n^2}}$ **d)** $\lim\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

e) $\lim\left(\sqrt{n^4+n} - n^3\right)$ **f)** $\lim\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^n$ **g)** $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2}$ **h)** $\lim\left(\frac{2n+3}{4n+5}\right)^n$

i) $\lim\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{3n}$ **j)** $\lim\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^n$ **k)** $\lim\left(\frac{2n+3}{1-n}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}$

Solución:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+3}\right) = \infty - \infty$ *(Ind)* $\Rightarrow$ *Multiplicamos y dividimos por el conjugado*

$$\lim \frac{\left(\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+3}\right)\left(\sqrt{n^2+4n} + \sqrt{n^2+3}\right)}{\left(\sqrt{n^2+4n} + \sqrt{n^2+3}\right)} = \lim \frac{n^2+4n-n^2-3}{\left(\sqrt{n^2+4n} + \sqrt{n^2+3}\right)} = \lim \frac{4n-3}{\left(\sqrt{n^2+4n} + \sqrt{n^2+3}\right)}$$

$$= \frac{\infty}{\infty}(\text{Ind}) \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 2$$

b) $\lim \dfrac{3n^2+4n}{n^3+2n^2+1} = \dfrac{\infty}{\infty}(\text{Ind}) \Rightarrow$ *Puede más el denominador* $\Rightarrow 0$

c) $\lim \dfrac{n^2+3}{\sqrt{4n^4+n^2}} = \dfrac{\infty}{\infty}(\text{Ind}) \Rightarrow$ *Pueden igual* $\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \infty - \infty$ *(Ind)* $\Rightarrow$ *Multiplicamos y dividimos por el conjugado*

$$\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \lim\frac{n^2+1-n^2}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \lim\frac{1}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \frac{\infty}{\infty}(\text{Ind}) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

e) $\lim\left(\sqrt{n^4+n}-n^3\right) = \infty - \infty$ *(Ind)* $\Rightarrow$ *Puede más el segundo* $\Rightarrow -\infty$

f) $\lim\left(1+\dfrac{1}{n+5}\right)^n = 1^\infty$ (Ind) $\Rightarrow$ Del tipo número e

$$\lim\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^n = \lim\left[\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{n+5}\right]^{\frac{1}{n+5}.n} = e^{\lim\frac{n}{n+5}} = e^1 = e$$

g) $\lim\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n+2} = 1^\infty$ (Ind) $\Rightarrow$ Del tipo número e

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{n+2} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{\frac{1}{-n}(n+2)} = e^{\lim\frac{n+2}{-n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

h) $\lim\left(\dfrac{2n+3}{4n+5}\right)^n = \left(\dfrac{2}{4}\right)^n = 0$

i) $\lim\left(\dfrac{2n+3}{2n+5}\right)^{3n} = 1^\infty$ (Ind) $\Rightarrow$ Del tipo número e

$$\lim\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{3n} = \lim\left(1+\frac{2n+3}{2n+5}-1\right)^{3n} = \lim\left(1+\frac{2n+3-2n-5}{2n+5}\right)^{3n} = \lim\left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^{3n} = \lim\left(1+\frac{1}{\frac{2n+5}{-2}}\right)^{3n} =$$

$$\lim\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n+5}{-2}}\right)^{\frac{2n+5}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2n+5}.3n} = e^{\lim\frac{-6n}{2n+5}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

j) $\lim\left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^n = 2^\infty = \infty$

k) $\lim\left(\dfrac{2n+3}{1-n}\right)^{\frac{n^2+1}{n}} = (-2)^{+\infty} = \pm\infty \Rightarrow$ No existe el límite

PROBLEMAS DE SUCESIONES

EJERCICIO 8 : Calcula la suma desde el término a_{15} hasta el a_{40} (ambos incluidos) en la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 2n - 3$.

Solución: Calculamos a_{15} y a_{40}: $a_{15} = 2\cdot 15 - 3 = 30 - 3 = 27$; $a_{40} = 2\cdot 40 - 3 = 80 - 3 = 77$

El número de términos en la suma es 26. Por tanto: $S = \frac{(a_{15}+a_{40})\cdot 26}{2} = \frac{(27+77)\cdot 26}{2} = 1352$

EJERCICIO 9 : En una progresión aritmética, sabemos que $a_1 = 5$ y $d = 2$. Calcula la suma de los 20 primeros términos.

Solución: Calculamos a_{20}: $a_{20} = a_1 + 19d = 5 + 19\cdot 2 = 5 + 38 = 43$

La suma será: $S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20})\cdot 20}{2} = \frac{(5+43)\cdot 20}{2} = 480$

EJERCICIO 10 : En una progresión geométrica, sabemos que $a_1 = 2$ y $r = 3$. Calcula la suma de sus 12 primeros términos.

Solución: Calculamos a_{12}: $a_{12} = a_1 \cdot r^{11} = 2\cdot 3^{11} = 354\,294$

La suma será: $S_{12} = \frac{a_1 - a_{12}\cdot r}{1-r} = \frac{2 - 354\,294\cdot 3}{1-3} = \frac{2 - 1062\,882}{-2} = 531440$

EJERCICIO 11 : Calcula la suma:
$a_7 + a_8 + \ldots + a_{30}$, sabiendo que a_n es una progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 3n + 1$

Solución: Calculamos a_7 y a_{30}: $a_7 = 3\cdot 7 + 1 = 21 + 1 = 22$; $a_{30} = 3\cdot 30 + 1 = 90 + 1 = 91$

El número de términos en la suma es 24. Por tanto: $S = \frac{(a_7 + a_{30})\cdot 24}{2} = \frac{(22+91)\cdot 24}{2} = 1356$

EJERCICIO 12 : Halla la suma de todos los términos de la progresión: $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \ldots$

Solución: Es una progresión geométrica en la que $a_1 = 2$ y $r = \frac{1}{3} < 1$.

Por tanto, la suma será: $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{2} = 3$

EJERCICIO 13 : El primer término de una progresión aritmérica es 12 y la diferencia es 4. Calcula la suma: $a_6 + a_7 + a_8 + \ldots + a_{25}$

Solución: Calculamos a_6 y a_{25}:

$a_6 = a_1 + 5\cdot d = 12 + 5\cdot 4 = 12 + 20 = 32$

$a_{25} = a_1 + 24\cdot d = 12 + 24\cdot 4 = 12 + 96 = 108$

El número de sumandos es 20. Por tanto: $S = \frac{(a_6 + a_{25})\cdot 20}{2} = \frac{(32+108)\cdot 20}{2} = 1400$

EJERCICIO 14 : En una progresión geométrica, sabemos que $a_1 = 3$ y $r = 2$. Calcula la suma de sus 20 primeros términos.

Solución: Calculamos a_{20}: $a_{20} = a_1 \cdot r^{20-1} = 3\cdot 2^{19} = 1572\,864$

La suma pedida será: $S_{20} = \frac{a_1 - a_{20}\cdot r}{1-r} = \frac{3 - 3145\,728}{1-2} = 3145\,725$