

## INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES.

### Tasa de variación media. Cálculo y significado

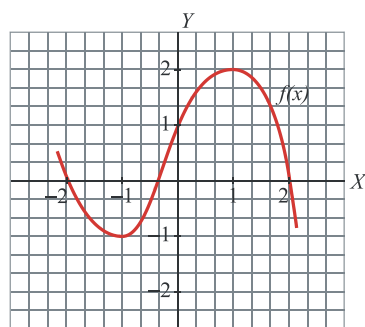
**EJERCICIO 1** : Consideramos la función:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$ . Halla la tasa de variación media en el intervalo  $[0, 2]$  e indica si  $f(x)$  crece o decrece en ese intervalo.

**EJERCICIO 2** :

a) Calcula la tasa de variación media de la función  $f(x) = \frac{3}{x}$  en el intervalo  $[-3, -1]$

b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

**EJERCICIO 3** : Calcula la tasa de variación media de esta función,  $f(x)$ , en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos: a)  $[-2, -1]$  b)  $[0, 1]$



### Derivada de una función por la definición

**EJERCICIO 4** : Halla, utilizando la definición, la derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = x^2 + 2x$       b)  $f(x) = x^2 + 1$       c)  $f(x) = \frac{2x+1}{4}$       d)  $f(x) = \frac{3}{x}$ .

**EJERCICIO 5** : Halla la derivada de la siguientes funciones, aplicando la definición de derivada, en los puntos que se indican

a)  $f(x) = \frac{3x+1}{2}$  en  $x = -1$       b)  $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $x = 2$       c)  $f(x) = 3x^2 + 2x$  en  $x = 1$       d)  $f(x) = \frac{x^2}{3}$  en  $x = 1$

### Cálculo de derivadas

**EJERCICIO 6** : Calcular las siguientes derivadas:

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1) $y = 5$  | 12) $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 8x$                 | 20) $y = \frac{1}{x}$  |
| 2) $y = x$  | 13) $y = \frac{1}{x^2} + x^3 + 2x^{-1}$                        | 21) $y = \frac{x^2 - x + 3}{5}$                                |
| 3) $y = 3x$   | 14) $y = 2 \cdot \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)$ | 22) $y = x^2 - \frac{1}{x^3} + \frac{3x}{1+x} + \frac{4-x}{x}$ |
| 4) $y = x^5$  | 15) $y = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^3}$                        | 23) $y = (x^3 + 1) \cdot (x + 2)$                              |
| 5) $y = 3 \cdot x^6$                                    | 16) $y = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{x}$                      | 24) $y = (x^3 + 2) \cdot x^{-2}$                               |
| 6) $y = \frac{3}{5} \cdot x^{10}$                       | 17) $y = (x^2 - 1) \cdot (x^3 + 3x)$                           | 25) $y = \frac{2}{x^3 + 2}$                                    |
| 7) $y = \frac{3x^2}{4}$                                 | 18) $y = (x^2 - 1) / (x^3 + 3x)$                               | 26) $y = \frac{x^3 - 3}{5}$                                    |
| 8) $y = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 7$                          | 19) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 4}$                                | 27) $y = \frac{2}{3x^2 + 1}$                                   |
| 9) $y = \frac{1}{x^4}$                                  |  |  |
| 10) $y = 5 \cdot \left( \frac{1}{x^3} + x^{-2} \right)$ |  |  |
| 11) $y = 6x^3 + 5x^2 - 1$                               |  |  |

$$28) y = \frac{1}{1-3x^3}$$

$$29) y = \frac{x^2 - 2}{x^3 + 3x^2}$$

$$30) y = \frac{x^3}{x-3}$$

$$31) y = (3x^3 - 2x + 7)^7$$

$$32) y = 3 \cdot (x^2 - x + 1)^3$$

$$33) y = (2x^4 - 4x^2 - 3)^5$$

$$34) y = (2x^3 + x)^4$$

$$35) y = 5 \cdot (x^3 - 3x)^4$$

$$36) y = \frac{(x^4 - 5x)^2}{(x^3 - 3x)^5}$$

$$37) y = \frac{(x^3 - 2x)^3 \cdot (2x^4 - x^2)^2}{(x^3 - 2x)^3}$$

$$38) y = \frac{(2x^4 - x^2)^2}{(2x^4 - x^2)^2}$$

$$39) y = \sqrt[3]{x}$$

$$40) y = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$41) y = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$42) y = \sqrt{\frac{x+2}{3}}$$

$$43) y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

$$44) y = \sqrt[5]{x^3 - 7x}$$

$$45) y = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}}$$

$$46) y = 5x^3 + \sqrt[3]{x} + 1$$

$$47) y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$48) y = (x - \sqrt{1-x^2})^2$$

$$49) y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$$

$$50) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$51) y = 5 \cdot (x^3 - 2x^2 + x)^4$$

$$52) y = \frac{4-6x}{(2x^4-3)^6}$$

$$53) y = e^{\sqrt{x}}$$

$$54) y = \frac{1}{e^{2x}}$$

$$55) y = x^2 \cdot e^{3x}$$

$$56) y = \frac{x}{e^x}$$

$$57) y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$58) y = \frac{x^2 - x}{e^x}$$

$$59) y = \log_3 x$$

$$60) y = \log_2 x^3$$

$$61) y = \log x$$

$$62) y = \text{Ln}(x^2 - 1)$$

$$63) y = \log_2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}$$

$$64) y = \text{Ln} \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}}$$

$$65) y = \log \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$$

$$66) y = \frac{\text{Ln} x}{x^5}$$

$$67) y = \text{Ln}[x^3 \cdot (x+2)]$$

$$68) y = \text{Ln} \sqrt[3]{1+x^2}$$

$$69) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$70) y = \text{Ln} \frac{x^2 + 3}{2x - 1}$$

$$71) y = (\log x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$$

$$72) y = \text{tag} 2x$$

$$73) y = \text{sen} 2x$$

$$74) y = \text{sen} x^2$$

$$75) y = \text{sen}^2 x$$

$$76) y = \text{sen}^2 2x$$

$$77) y = \text{sen}^2 x^2$$

$$78) y = \text{sen}^5 2x^3$$

$$79) y = 5 \cdot \text{sen}^3 2x^4$$

$$80) y = e^{\cos x}$$

$$81) y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$$

$$82) y = \frac{\sqrt{1+\text{sen} x}}{\sqrt{1-\text{sen} x}}$$

$$83) y = \text{tag}(x+3)^2$$

$$84) y = \text{tag}^2(x+3)$$

$$85) y = \text{Ln} \left( \cos \frac{x^2}{2} \right)$$

$$86) y = \text{tag}(1-2x)$$

$$87) y = \text{tag} \left( x + \frac{1}{x} \right)$$

$$88) y = \frac{\cos \text{ec} x}{\sec x}$$

$$89) y = \text{sen} \sqrt{x}$$

$$90) y = \text{sen}(x + e^x)$$

$$91) y = \text{Ln} \left[ \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \right]$$

$$92) y = \cos x \cdot (1 - \cos x)$$

$$93) y = \frac{\text{sen} x + \cos x}{\text{sen} x - \cos x}$$

$$94) y = \text{Ln}(x^2 \cdot \text{sen} 2x)$$

$$95) y = \frac{x \cdot \text{sen}^2 x}{e^x - 1}$$

$$96) y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$97) y = \frac{-\cos 2x}{2}$$

$$98) y = \text{Ln}(\text{tag} 2x)$$

$$99) y = \text{Ln}(\text{sen} x)$$

$$100) y = \text{sen}^3(x+1)$$

$$101) y = \sec^2 x$$

$$102) y = \sqrt{x} \text{sen} \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$$

$$103) y = \text{sen}[\cos(\text{tag} x)]$$

$$104) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{\cos x}{\text{sen} x}}$$

$$105) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

$$106) y = \text{Ln}(\text{tag}^2 \sqrt{x})$$

$$107) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$108) y = \text{Ln} \frac{(x-1)^2}{2x-3}$$

$$109) y = \text{Ln}(\text{sen}^2 x)$$

$$110) y = e^{\cos 2x}$$

$$111) y = \text{Ln}(\text{sen}^2 x \cdot \cos^3 x)$$

$$112) y = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$$

$$113) y = \text{sen}(x+1)^3$$

**EJERCICIO 7** - Halla la función derivada de:

a)  $y = 3x^5 - 4x^3 + 3x + 7$

b)  $y = \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + 5x - 15$

c)  $y = \frac{x^2 - 3x + 7}{5}$

d)  $y = (3x^3 - 5x + 1) \cdot (x + x^2)$

e)  $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$

f)  $y = \frac{x^3}{3x + 2}$

g)  $y = \left( \frac{3x-2}{7-9x} \right)^2$

h)  $y = \frac{(5-x)^2}{3x-1}$

i)  $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$

j)  $y = \sqrt{x^9} \cdot 4x^5$

k)  $y = \frac{2}{x^5} + \sqrt{3}$

$$\begin{array}{llll}
 \text{l) } y = \sqrt{12x} + e^{2x+1} + \log_2 3x & \text{m) } y = (3x - 1)^2 \cdot (1 - 4x) & \text{n) } y = \frac{x^5 \sqrt{x}}{x^{-3}(x^2)^5} & \text{ñ) } y = (3x^3 - 5x + 2)^4 \\
 \text{o) } y = (3x^2 - x)^4 & \text{p) } y = \sqrt{3x^2 - \sqrt{5x}} & \text{q) } y = \sqrt{1-x^2} & \text{r) } y = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3 \\
 \text{s) } y = (2x - 4)^4 + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 1} & \text{t) } y = \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} & \text{u) } y = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} & \text{v) } y = \text{Ln}(x^2 + 2x) + e^{-x} \\
 \text{w) } y = \log_3 x + 3^x & \text{x) } y = 2 \cdot \text{sen}(3x+4) & \text{y) } y = 3\cos^3(3x) & \text{z) } y = \text{tag}(x^2+1) \\
 \text{1) } y = \sqrt[5]{x^3 - x} & \text{2) } y = x \cdot e^x & \text{3) } y = \frac{\text{Lnx}}{\text{senx}} & \text{4) } y = 4 \cdot (2x^3 - 1)^5 \\
 \text{5) } y = e^{\sqrt{x+3}} & \text{6) } y = \sqrt[3]{\text{Ln}(3x+5)} & \text{7) } y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \text{8) } y = \text{tag} \sqrt{3x+2}
 \end{array}$$

### Recta tangente

**EJERCICIO 8** - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = x^3 - 2x$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .

**EJERCICIO 9** - Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva  $y = 3x^2 + x - 1$ .

**EJERCICIO 10** - Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos:  $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

**EJERCICIO 11** - Averigua los puntos de tangente horizontal de la función:  $f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$

**EJERCICIO 12** - Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = 2x^2 + 3x - 1$  en el punto de abscisa  $x = 1$

**EJERCICIO 13** - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = x - 4x^2$  que sea paralela a la recta  $y = -7x + 3$

**EJERCICIO 14** - Halla la ecuación de la recta de pendiente  $-4$  que sea tangente a la curva  $y = x^4 + 2$ .

**EJERCICIO 15** - Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = 2x^3 + x$  en el punto de abscisa  $x = -1$

### Crecimiento y extremos relativos

**EJERCICIO 16** - Estudia la monotonía y calcula los extremos de la siguiente función:  $f(x) = x^4 - 2x^2$

### Representar funciones que cumplan unas condiciones

**EJERCICIO 17** : Dibuja la gráfica de la función  $f(x)$ , sabiendo que:

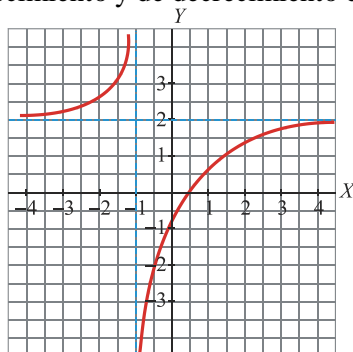
- Su derivada se anula en  $(0, 0)$
- Solo corta a los ejes en  $(0, 0)$
- Sus asíntotas son  $x = -2$ ,  $x = 2$  e  $y = 0$
- La posición de la curva respecto a las asíntotas es:  $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow -\infty, y < 0 \\ \text{Si } x \rightarrow +\infty, y < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

**EJERCICIO 18** : Haz la gráfica de una función  $f(x)$ , sabiendo que :

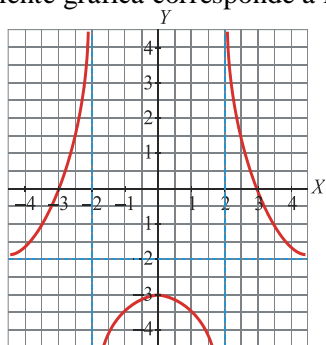
- Es continua.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada se anula en  $(-3, -2)$ , en  $(0, 2)$  y en  $(2, -3)$ .
- Corta a los ejes en los puntos  $(-4, 0)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(3, 0)$  y  $(0, 2)$ .

**Dada una gráfica, estudiar propiedades**

**RCICIO 19 :** A partir de la gráfica de  $f(x)$ , di cuáles son sus asíntotas, indica la posición de la curva respecto a ellas y halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



**EJERCICIO 20 :** La siguiente gráfica corresponde a la función  $f(x)$ :



- a) ¿En qué puntos se anula la derivada?
- b) ¿Cuáles son sus asíntotas?
- c) Indica la posición de la curva respecto a sus asíntotas verticales.

**Estudiar y representar funciones**

**EJERCICIO 21 :** Estudia y representa las siguientes funciones:

- a)  $f(x) = x^3 - 12x$
- b)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$
- c)  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$
- d)  $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$
- e)  $f(x) = \frac{3x}{x-3}$
- f)  $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$
- g)  $f(x) = \frac{x^3-2}{x}$
- h)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$
- i)  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$
- j)  $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+2}$
- k)  $f(x) = \frac{x^4-4}{x^2-1}$
- l)  $f(x) = \frac{x^4-2x^2+1}{x^2}$
- m)  $f(x) = \frac{2x^5}{x^2+1}$

**Recopilación**

**EJERCICIO 22 :**

- a) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva  $f(x) = x^2 - 3x$  en el punto de abscisa  $x = -1$
- b) ¿Es creciente o decreciente  $f(x)$  en  $x = 2$ ?

**EJERCICIO 23 :** Dada la función:  $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

- a) ¿Es creciente o decreciente en  $x = 0$ ? ¿Y en  $x = 1$ ?
- b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

**EJERCICIO 24 :**

- a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $f(x) = 2x - 3x^2$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .  
 b) Halla los tramos en los que  $f(x)$  es creciente y en los que es decreciente.

**EJERCICIO 25 :** Consideramos la función:  $f(x) = 5x^2 - 3x$

- a) ¿Crece o decrece en  $x = -1$ ? ¿Y en  $x = 1$ ?  
 b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

**EJERCICIO 26 :** Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones:

- a)  $f(x) = 8x - x^2$                       b)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{4}$

**EJERCICIO 27 :** Dada la siguiente función:  $f(x) = 14x - 7x^2$

- a) ¿Es creciente o decreciente en  $x = 0$ ? ¿Y en  $x = 4$ ?  
 b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

**EJERCICIO 28 :** Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

**EJERCICIO 29 :** Averigua los puntos de tangente horizontal de las siguiente función y represéntalos gráficamente:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$$

**EJERCICIO 30 :** Estudia y representa las siguientes funciones:

- |  |                                       |  |   |
|--|---------------------------------------|--|---|
| a) $f(x) = (x - 1)^2(x + 8)$                   | b) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$           | c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$            | d) $f(x) = 4x^2 - 2x^4 + 2$               |
| e) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$                     | f) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ | g) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ | h) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x}$ |
| i) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ | j) $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}$       | k) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$   | l) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$               |
| m) $f(x) = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$           | n) $f(x) = x(x - 3)^2$                | ñ) $f(x) = x^4 - 8x^2$                 | o) $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 4}$   |
| p) $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$                | q) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2}$         | r) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4x}$         | s) $f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$             |