# 6 Lugares geométricos. Cónicas

ÍNDICE DE CONTENIDOS


**1. Lugares geométricos . . . 121**
- 1.1. Mediatriz de un segmento . . . 121
- 1.2. Bisectriz de un ángulo . . . 122

**2. Secciones cónicas . . . 124**

**3. Circunferencia . . . 127**
- 3.1. Ecuación de la circunferencia . . . 127
- 3.2. Circunferencias y rectas . . . 128
- 3.3. Potencia . . . 130

**4. Elipse . . . 134**
- 4.1. Ecuación de la elipse . . . 134
- 4.2. Elementos de la elipse . . . 135

**5. Hipérbola . . . 137**
- 5.1. Ecuación de la hipérbola . . . 137
- 5.2. Elementos de la hipérbola . . . 138

**6. Parábola . . . 140**


Esta es la última unidad con un contenido puramente geométrico. En ella vamos a estudiar las (curvas) *cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola*. Las cónicas son curvas que se pueden estudiar desde distintos puntos de vista. Aquí lo que haremos, será introducirlas como casos particulares de lo que denominaremos *Lugares Geométricos* en el plano. Un Lugar Geométrico es un conjunto de puntos en el plano que tienen alguna propiedad común que los caracteriza, mediante la cual, se puede llegar a obtener su ecuación.

# 1. Lugares geométricos

Pensemos en el conjunto de los puntos del plano cuya ordenada es igual a su abscisa. Si su ordenada es igual a su abscisa, entonces $y = x$. Por tanto, los puntos a los que nos referimos son los de la recta $y = x$. También nos podíamos haber referido a ellos simplemente como la recta que pasa por el origen y forma un ángulo de $45^0$ con el eje $X$.

Vemos pues, que la recta $y = x$ se puede describir de dos formas (y hay muchas más), pero nos interesa particularmente la primera forma en la que lo hemos hecho. En esta primera forma hemos caracterizado los puntos por una propiedad que todos ellos tienen en común: “su ordenada es igual que su abscisa". Cuando un objeto geométrico se describe de esta forma, se dice que es un **lugar geométrico**.

Un *lugar geométrico* es un conjunto de puntos que tienen una propiedad común.

Vamos a ver dos primeros ejemplos importantes de objetos geométricos en el plano que se pueden describir como lugares geométricos: la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.

## 1.1. Mediatriz de un segmento

Un segmento es un trozo de recta comprendido entre dos puntos. Si tenemos el segmento $AB$, la **mediatriz del segmento** $AB$ es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de $A$ y de $B$, como hemos dibujado en la figura 6.1.

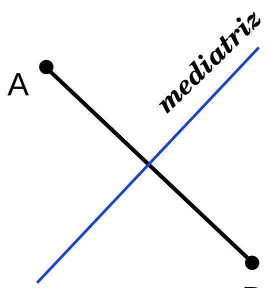



Figura 6.1: Mediatriz de un segmento

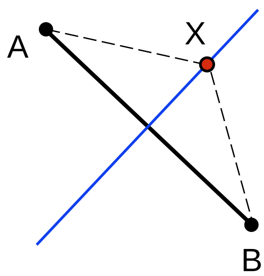



Figura 6.2: $\mathrm{dist}(A, X) = \mathrm{dist}(B, X)$

La anterior es una manera de precisar lo que es la mediatriz de un segmento, sin embargo, también se puede expresar como un lugar geométrico, ya que, cualquier punto $X$ de la mediatriz siempre está a la misma distancia del punto $A$ que del punto $B$, como se puede apreciar en la figura 6.2.

De esta forma, *la mediatriz del segmento* $AB$ *se puede definir también como el lugar geométrico de los puntos* $X$ *del plano que se encuentran a la misma distancia de* $A$ *que de* $B$. En otras palabras, la mediatriz de un segmento está constituida por los puntos $X(x, y)$ tales que $d(A, X) = d(B, X)$. Y esto nos proporciona un procedimiento para calcular la ecuación de la mediatriz.

Por ejemplo, queremos calcular la mediatriz del segmento $AB$, donde $A(2, 3)$ y $B(-1, 5)$. Según acabamos de ver, la solución de nuestro problema la forman los puntos $X(x, y)$ tales que

$$d(A, X) = d(B, X).$$

Aplicando la fórmula de la distancia y sustituyendo las coordenadas de los puntos $X$, $A$ y $B$, obtenemos la expresión

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2}.$$

Elevamos al cuadrado en los dos miembros de la expresión, para que desaparezcan las raíces cuadradas, y desarrollamos los cuadrados que hay dentro,

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25.$$

Por último, pasamos todos los términos a un miembro de la ecuación, por ejemplo al segundo y nos queda

$$0 = 6x - 4y + 13.$$

Que es la ecuación de una recta, la mediatriz del segmento $AB$.

**ACTIVIDADES**

**1.** Calcular la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(3, 0)$ y $B(1, 4)$, mediante los dos procedimientos que se proponen a continuación:
a) Utilizando el hecho de que se trata de una recta perpendicular a $AB$ que pasa por el punto medio del segmento.
b) Utilizando la definición de la mediatriz como lugar geométrico.

## 1.2. Bisectriz de un ángulo

La **bisectriz de un ángulo** es otro objeto geométrico que se puede definir como un lugar geométrico. Sabemos que la bisectriz de un ángulo es una recta que, pasando por su vértice, divide al ángulo en dos ángulos iguales, como vemos en la figura 6.3.

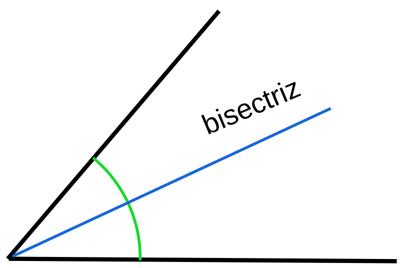



Figura 6.3: Bisectriz de un ángulo

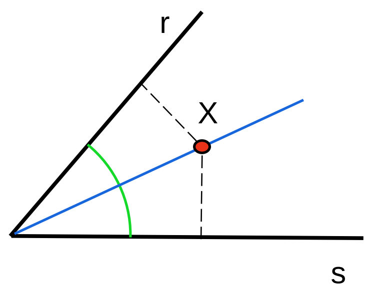



Figura 6.4: $d(X, r) = d(X, s)$

Pero, si la bisectriz divide al ángulo en dos iguales, cada punto $X$ que se encuentre sobre la bisectriz estará a la misma distancia de las rectas que forman el ángulo, $r$ y $s$ (figura 6.4).

Esta observación nos permite definir la *bisectriz de un ángulo formado por dos rectas $r$ y $s$ como el lugar geométrico de los puntos $X$ del plano tales que su distancia* *a la recta $r$ es igual a su distancia a la recta $s$.* En otras palabras, la bisectriz del ángulo formado por las rectas $r$ y $s$ está formada por los puntos $X(x, y)$ tales que

$$d(X, r) = d(X, s).$$

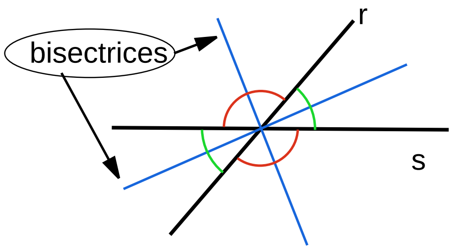



Figura 6.5: Dos bisectrices

Ahora bien, observando más detenidamente el problema se puede ver que, en realidad, dos rectas $r$ y $s$ determinan dos bisectrices (ver figura 6.5). En efecto, dos rectas $r$ y $s$ que se corten en un punto, producen cuatro ángulos que son iguales dos a dos (opuestos por el vértice), entonces cada uno de estos ángulos tiene una bisectriz. Todos los puntos de las dos bisectrices cumplen la propiedad de las distancias que hemos indicado más arriba, con lo cual, sería de esperar que, al resolver el problema aparezcan las ecuaciones de ambas bisectrices. Y así ocurre, al resolver el problema de calcular una bisectriz aparece la otra.

Veamos un ejemplo. Queremos calcular la bisectriz (las bisectrices) del ángulo determinado por las rectas de ecuaciones:

$$r : 4x - 3y + 2 = 0 \quad \text{y} \quad s : 6x + 8y - 5 = 0$$

Sabemos que la bisectriz es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano tales que

$$d(X, r) = d(X, s).$$

En la unidad anterior hemos aprendido a calcular la distancia de un punto $P(x_0, y_0)$ a una recta $r : ax + by + c = 0$, mediante la fórmula

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Entonces, tenemos que aplicar esta fórmula sustituyendo, en lugar de $(x_0, y_0)$ las coordenadas del punto $X(x, y)$. (A este punto “incógnita” que utilizamos para resolver los problemas de lugares geométricos se le llama a veces *punto genérico*, debido a que no representa ningún punto concreto, sino a todos los puntos que constituyen la solución.)

Entonces, $d(X, r) = d(X, s)$ se transforma, sustituyendo, en la expresión siguiente:

$$\frac{|4x - 3y + 2|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|6x + 8y - 5|}{\sqrt{36 + 64}} \Rightarrow \frac{|4x - 3y + 2|}{5} = \frac{|6x + 8y - 5|}{10},$$

simplificamos los denominadores y obtenemos,

$$|4x - 3y + 2| = \frac{|6x + 8y - 5|}{2}$$

Y ahora tenemos que eliminar los valores absolutos para obtener las soluciones. Para ello hay que tener en cuenta que, si $|A| = |B|$, entonces $A = \pm B$.

Por tanto, la expresión anterior se convierte en dos expresiones,

$$4x - 3y + 2 = \pm\left(\frac{6x + 8y - 5}{2}\right)$$

Las separamos, hacemos operaciones y simplificamos:

$$4x - 3y + 2 = +\left(\frac{6x + 8y - 5}{2}\right) \Rightarrow 2x - 14y + 9 = 0;$$

$$4x - 3y + 2 = -\left(\frac{6x + 8y - 5}{2}\right) \Rightarrow 14x + 2y - 1 = 0.$$

La ecuaciones de las bisectrices son, por tanto,

$$2x - 14y + 9 = 0; \qquad 14x + 2y - 1 = 0.$$

**ACTIVIDADES**

**2.** Calcular las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que determinan los ejes coordenados, el eje $X$ y el eje $Y$.

**3.** Calcular las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $r : 12x - 5y - 1 = 0$ y $s : 4x + 3y = 0$. Comprobar que las dos bisectrices son perpendiculares entre sí.

**Recuerda**

- ✓ Un *lugar geométrico* es un conjunto de puntos del plano que tienen una propiedad común que los caracteriza, a partir de la cual se puede calcular su ecuación.
- ✓ La *mediatriz* de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de los extremos del segmento.
- ✓ La *bisectriz* de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a igual distancia de las rectas que forman el ángulo.

# 2. Secciones cónicas

Quizá los ejemplos más importantes de objetos geométricos que se pueden definir como lugares geométricos en el plano sean las cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola, que se estudiarán a continuación, y que son el objeto fundamental de esta unidad didáctica. Sin embargo, la definición clásica de las cónicas, que se debe a Apolonio de Perga (262-190 a.C.), se hizo mediante un procedimiento distinto al de los lugares geométricos. Se definieron como las intersecciones de un plano con una **superficie cónica**, de ahí el nombre de secciones cónicas, o simplemente cónicas, que reciben estas curvas.

En la figura 6.6 hemos representado una *superficie cónica (de revolución)*. Para generarla, hacemos girar (por esto se llama de revolución) una recta oblicua, que se llama *generatriz*, a un eje vertical (la recta y el eje se cortan en un punto.) La figura que obtenemos es la misma que obtendríamos uniendo dos conos circulares iguales por su vértice, de manera que sus ejes quedasen alineados. Al cono que queda arriba y al que queda abajo, les llamaremos "hojas". Diremos que la superficie tiene dos hojas, en la figura, una de ellas se ha coloreado y la otra se ha dibujado transparente.

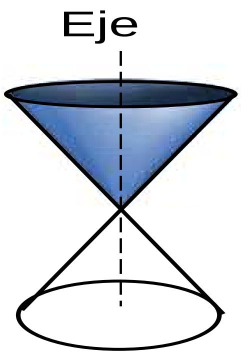



Figura 6.6: Superficie cónica

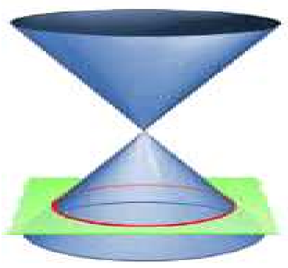
Para obtener las cónicas, vamos a cortar la superficie cónica con planos en diferentes posiciones. Dependiendo de la posición del plano con respecto de la superficie cónica, la sección obtenida (el corte) será una u otra curva. Las posibilidades más interesantes están en los dibujos de la figura 6.7, que pasamos a explicar a continuación:

- Si cortamos una de las hojas de la superficie cónica con un plano que sea perpendicular al eje de la superficie, la sección que se obtiene es una **circunferencia**.

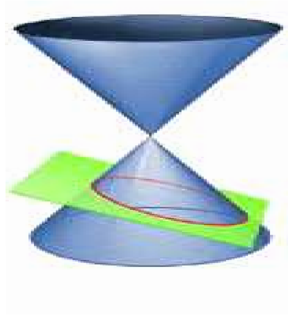
- Si el plano es oblicuo al eje y corta sólo a una de las hojas, de manera que la sección que se obtenga sea una curva cerrada, la sección que se obtiene es una **elipse**.

- Si el plano corta a las dos hojas de la superficie cónica, sin pasar por el vértice de unión de éstas, la sección que se obtiene, que tiene dos ramas, es una **hipérbola**.

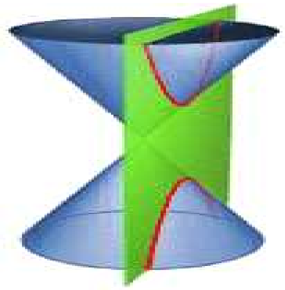
- Por último, si el plano es paralelo a la generatriz, sin pasar por el vértice, se obtiene una curva, que en este caso no llega a cerrarse nunca, que se llama **parábola**.



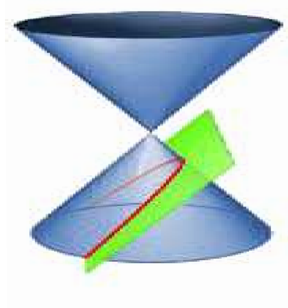
CIRCUNFERENCIA



ELIPSE



HIPÉRBOLA



PARÁBOLA

Figura 6.7: Secciones cónicas

## ACTIVIDADES

**4.** Las curvas que se han descrito antes son las secciones cónicas más interesantes. Sin embargo, no son las únicas, también se pueden obtener otras poniendo el plano de manera adecuada. Describir qué posición debe tener un plano que corte a una superficie cónica, para que la sección obtenida sea cada una de las siguientes:
a) Un punto. b) Una recta. c) Dos rectas que se corten en un punto.

A pesar de la importancia de las curvas cónicas como secciones de una superficie cónica, para estudiar los elementos y propiedades de cada una de ellas en el plano, resulta más conveniente definirlas como lugares geométricos. Esto nos va a permitir obtener una ecuación para cada cónica. Es lo que haremos en el resto de la unidad didáctica.

## Recuerda

✓ Las *secciones cónicas* son curvas planas que se obtienen al cortar, mediante un plano, una *superficie cónica de revolución*, según el siguiente esquema:

| Plano | Cónica |
|---|---|
| perpendicular al eje | Circunferencia |
| oblicuo al eje (curva cerrada) | Elipse |
| cortando a las dos hojas | Hipérbola |
| oblicuo al eje (curva abierta) | Parábola |

# 3. Circunferencia

## 3.1. Ecuación de la circunferencia

Una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos $X(x,y)$ del plano que equidistan (están a igual distancia) de un punto fijo $O(a,b)$, que es el centro de la circunferencia. La distancia entre cada punto $X$ y el centro $O$, es un número constante $r$, que es el radio de la circunferencia (figura 6.8).

Vamos a calcular, a partir de la definición anterior, la ecuación de la circunferencia. Si $X(x,y)$ está en la circunferencia, entonces

$$d(X,O) = r$$

donde $O(a,b)$ es el centro de la circunferencia.
Aplicamos la fórmula de la distancia entre dos puntos y obtenemos,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r.$$

Elevando al cuadrado, para que desaparezca la raíz cuadrada obtenemos la ecuación de la circunferencia:

$$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2}$$

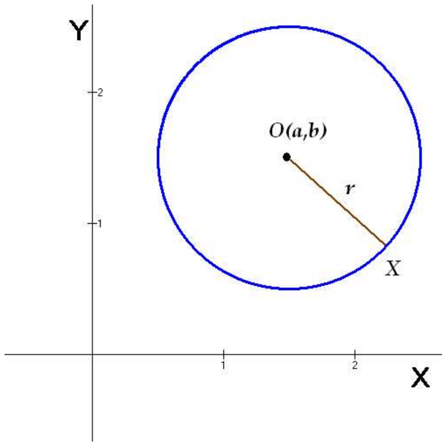



Figura 6.8: Circunferencia

Desarrollando los cuadrados y pasando todos los términos al miembro izquierdo de la ecuación, se obtiene,

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2 = 0,$$

que también es la ecuación de la circunferencia. Aunque es más fácil de recordar la primera expresión.

Así, para obtener la ecuación de una circunferencia hace falta conocer cuál es el centro y cuál es el radio.

Por ejemplo, la ecuación de la circunferencia de centro $O(-1,2)$ y radio 1 es,

$$(x+1)^2+(y-2)^2 = 1,$$

o bien, desarrollando los cuadrados y agrupando los términos,

$$x^2+y^2+2x-4y+4 = 0.$$

A partir de la ecuación de la circunferencia, también se puede calcular cuál es el centro y el radio de la misma. Si la ecuación está escrita en la forma

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, la obtención es muy sencilla. Sin embargo, si la ecuación está desarrollada, habrá que convertirla previamente a la forma anterior.

Por ejemplo, queremos calcular cuál es el centro y el radio de la circunferencia de ecuación

$$x^2+y^2-4x+6y+9=0$$

Primero agrupamos los términos en $x$, los términos en $y$ y pasamos el término independiente a la derecha,

$$x^2-4x+y^2+6y=-9$$

Ahora, los dos primeros términos, $x^2-4x$ son el comienzo del cuadrado de una diferencia, $(x-2)^2$ aunque falta el tercer sumando del desarrollo, que sería $2^2=4$; los dos siguientes, $y^2+6y$ son el comienzo del cuadrado de una suma, $(y+3)^2$ aunque falta el tercer término del desarrollo, que sería $3^2=9$. Añadimos los términos que faltan, y sumamos los mismos términos en el miembro derecho de la ecuación, para que no varíe,

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=-9+4+9.$$

Escribimos los cuadrados y sumamos en la derecha,

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4$$

Por tanto, el centro de la circunferencia es $O(2,-3)$ y el radio es $r=2$.

Supongamos que al llegar a esta expresión obtenemos algo de la forma,

$$(x-1)^2+(y-8)^2=-10.$$

Esto significa que no es la ecuación de la circunferencia, dado que el número negativo -10 no se puede escribir como un número al cuadrado (no tiene raíz cuadrada). Si fuese 0, tampoco lo sería, salvo que admitamos que un punto es una circunferencia de radio 0, en este caso la ecuación sólo representaría un punto.

**ACTIVIDADES**

**5.** Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $O(-2,0)$ y radio $r=2$.

**6.** Calcular la ecuación de la circunferencia de centro el origen de coordenadas $O(0,0)$ y que pasa por el punto $P(1,1)$.

**7.** De las ecuaciones siguientes, unas representan circunferencias y otras no. Calcular el centro y radio de aquellas que lo sean:
a) $x^2+y^2=9$ b) $x^2+y^2-2x-4y=0$ c) $x^2+y^2-2x-8y+20=0$.

## 3.2. Circunferencias y rectas

Tenemos una circunferencia y una recta. ¿Cómo pueden estar situadas una con respecto de la otra, es decir, cuáles son sus posibles posiciones relativas? En las gráficas de la figura 6.9 hemos dibujado las tres posibilidades posibles.

Puede ocurrir que la recta sea *exterior* a la circunferencia, cuando no tengan ningún punto en común; puede que la recta sea *secante* a la circunferencia, cuando tienen dos puntos en común; y, por último, puede que tengan sólo un punto en común, en este caso, se dice que la recta es *tangente* a la circunferencia.

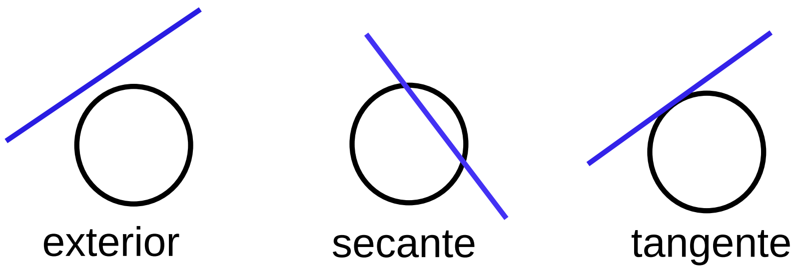



Figura 6.9: Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

Conociendo las ecuaciones de la recta y de la circunferencia, sus posiciones relativas se pueden determinar de varias formas. Una de ellas consiste simplemente en resolver el sistema formado por las dos ecuaciones. Dado que habrá una ecuación de primer grado, la recta, y otra de segundo grado, la circunferencia. Se trata de un sistema de segundo grado, que puede tener dos, una o ninguna solución; posibilidades estas que corresponderían, respectivamente, a secante, tangente o exterior.

Por ejemplo, si queremos estudiar las posiciones relativas de la recta $r : y = x$, y la circunferencia $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$, resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

y obtenemos dos soluciones, que son los dos puntos de corte:
$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $Q\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Otra forma de estudiar las posiciones relativas de una recta y una circunferencia consiste en comparar el radio de la circunferencia y la distancia del centro de la circunferencia a la recta.

Si $r$ es el radio y $d$ es la distancia desde el centro de la circunferencia a la recta, tenemos que:
- Si $d = r$, la recta es tangente.
- Si $d > r$, entonces la recta está más lejos del centro que la propia circunferencia, por tanto, es exterior.
- Si $d < r$, entonces la recta está más cerca del centro que la propia circunferencia, por tanto, es secante.

ACTIVIDADES

**8.** Estudiar la posición relativa de recta y circunferencia en los casos siguientes:

a) $\begin{cases} x-1=0 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+5=0 \\ \text{circunferencia de centro } O(-1,-3) \text{ y radio } r=3. \end{cases}$

Ya sabemos cómo se pueden determinar las posiciones relativas entre una recta y una circunferencia. Para acabar este apartado vamos a resolver un problema distinto: dada una circunferencia y un punto perteneciente a ella, encontrar la recta tangente a la circunferencia que pasa por el punto (figura 6.10).

Por ejemplo, el punto $P(3,4)$ pertenece a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=25$. Queremos calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia que pasa por el punto $P$.

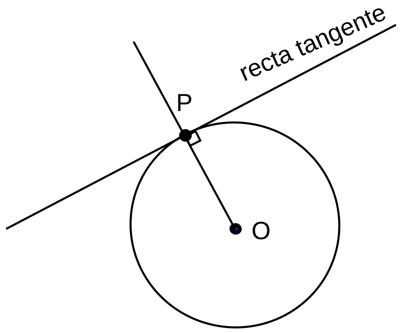



Figura 6.10: Recta tangente a una circunferencia

Como queremos calcular la ecuación de una recta, necesitamos un punto, que ya tenemos, y un vector de dirección o la pendiente de la recta. Según podemos apreciar en la figura 6.10, la recta tangente es perpendicular al radio de la circunferencia dibujado en ese punto. Por tanto, el vector de dirección de la recta será perpendicular al vector $\overrightarrow{OP}$, del centro al punto.

$\overrightarrow{OP}(3,4)$, (el centro de la circunferencia es $O(0,0)$) entonces un vector perpendicular puede ser $\vec{v}(4,-3)$. Ya que el producto escalar de $\overrightarrow{OP}(3,4)$ y $\vec{v}(4,-3)$ es nulo: $\overrightarrow{OP}\cdot\vec{v}=3\cdot4+4\cdot(-3)=0$ y, como vimos en la unidad anterior, esto implica que los vectores son perpendiculares. En definitiva, tenemos que calcular la ecuación de la recta que pasa por $P(3,4)$ y tiene como vector de dirección $\vec{v}(4,-3)$. Usando la ecuación de la recta en forma continua y convirtiéndola a la forma general,

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{-3}\Rightarrow 3x+4y-25=0$$

ACTIVIDADES

**9.** Calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-2y=0$, que pasa por el punto de la circunferencia $P(1,1)$.

## 3.3. Potencia

Sea una circunferencia $\mathcal{C}$, con centro en el punto $O(a,b)$ y radio $r$. Consideremos también un punto $P(x_0,y_0)$ cualquiera del plano, es decir, no es necesario que esté sobre la circunferencia, ni en ningún lugar concreto. Vamos a definir un número, que llamaremos **potencia**, calculado a partir de la circunferencia y el punto, que servirá, entre otras cosas, para estudiar la posición del punto con respecto de la circunferencia.

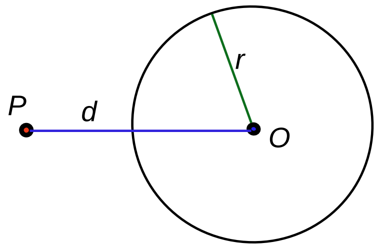



Figura 6.11: Potencia de $P$ con respecto de $\mathcal{C}$

En la figura 6.11 hemos representado una circunferencia y un punto $P$ exterior (aunque el concepto es válido para cualquier punto). Llamamos $d$ a la distancia entre el punto $P$ y el centro de la circunferencia. Entonces:

> Se llama *potencia del punto $P$ con respecto de la circunferencia $\mathcal{C}$* al número Pot$_{\mathcal{C}}(P) = d^2 - r^2$

Es evidente que el valor de la potencia cambiará dependiendo de la situación del punto con respecto de la circunferencia:

Si $P$ es exterior a la circunferencia, su distancia al centro es mayor que el radio. Por tanto, Pot$_{\mathcal{C}}(P) > 0$.

Si $P$ es interior a la circunferencia, su distancia al centro es menor que el radio. En consecuencia, Pot$_{\mathcal{C}}(P) < 0$.

Por último, si $P$ está sobre la circunferencia, su distancia al centro es precisamente el radio de la circunferencia. Por lo tanto, Pot$_{\mathcal{C}}(P) = 0$.

Se puede pensar que lo anterior no resulta demasiado útil, ya que, si para calcular la potencia necesitamos calcular la distancia del punto $P$ al centro, bastaría con comparar este número con el radio para decidir la posición del punto, ¿para qué elevarlo al cuadrado y restarle el cuadrado del radio? Sin embargo, la potencia se puede calcular de una manera más directa, y es lo que hace que resulte una herramienta útil. Veamos de qué manera.

Para calcular la distancia entre el punto $P(x_0, y_0)$ y el centro $O(a, b)$ utilizamos la fórmula

$$d = d(O, P) = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}.$$

A continuación, elevamos $d$ al cuadrado y le restamos el radio al cuadrado,

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = d^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2.$$

Pero esta expresión es exactamente la ecuación de la circunferencia (cuando todos los términos se han pasado a la derecha) cambiando $x$ por $x_0$, $y$ por $y_0$, es decir, las variables por las coordenadas del punto. Recordemos que la ecuación de la circunferencia era $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

¿Cómo calculamos entonces la potencia de un punto con respecto de una circunferencia? Pues sustituimos las coordenadas del punto en la ecuación de la circunferencia.

Por ejemplo, dada la circunferencia $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x - 2 = 0$ y el punto $P(1, 2)$, la potencia del punto con respecto de la circunferencia es

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = 1^2 + 2^2 - 4{,}1 - 2 = -1 < 0.$$

Es seguro entonces que el punto $P$ es interior a la circunferencia.

Pero hay más propiedades geométricas asociadas a la potencia. Dado el punto $P$ y la circunferencia, dibujamos la recta que pasa por el punto $P$ y por el centro de la circunferencia $O$. Esta recta corta a la circunferencia en dos puntos, $A$ y $B$, como se puede apreciar en la figura 6.12. La potencia se puede escribir

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = d^2 - r^2 = (d - r)(d + r)$$

(Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados).

Pero en la figura se observa que $d - r = PA$ y $d + r = PB$. Entonces,

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = PA.PB$$

Hay que tener en cuenta que en esta fórmula $PA$ y $PB$ representan las distancias entre los puntos “orientadas”. De manera que, si $PA$ y $PB$, pensados como vectores, tienen el mismo sentido, el producto es positivo; y si tienen sentidos opuestos, el producto es negativo.

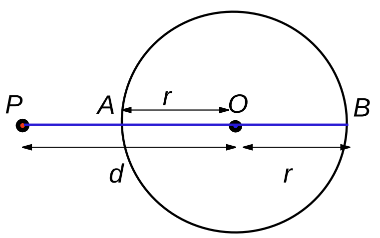


Figura 6.12: $\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = PA.PB$

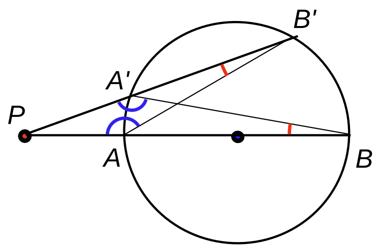


Figura 6.13: $PA.PB = PA'.PB'$

Lo más interesante es que esta fórmula se cumple para cualquier recta que pase por $P$ y corte a la circunferencia en dos puntos, incluso aunque no pase por el centro. En efecto, si dibujamos cualquier otra secante que corte en los puntos $A'$ y $B'$, como en la figura , se cumple (¿por qué? ¿cómo son los triángulos $PA'B$ y $PB'A$?)

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB} \Rightarrow PA.PB = PA'.PB'$$

## ACTIVIDADES

**10.** Sean las circunferencias
$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 1$ y $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$.
Calcular la potencia del origen de coordenadas, $P(0, 0)$, con respecto de cada una de las dos circunferencias.

**11.** Calcular la ecuación del lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano que tienen la misma potencia con respecto de las circunferencias $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 4 = 0$ y $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 6y = 0$.

En la actividad anterior ha aparecido un nuevo concepto, el de **eje radical** de dos circunferencias. En general, dadas dos circunferencias de ecuaciones $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ y $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0$, el eje radical de las dos circunferencias, es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que su potencia con respecto de las dos circunferencias es la misma.

Tal y como hemos visto en la actividad, el resultado es una recta, y para calcular su ecuación no hay más que igualar las dos ecuaciones de las circunferencias y simplificar. Cuando existe, porque hay ocasiones en las que no (cuando las dos circunferencias son concéntricas, es decir, cuando tienen el mismo centro), es una recta perpendicular a la recta que une los dos centros de las circunferencias.

Cuando tenemos tres circunferencias, el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia con respecto de las tres circunferencias resulta ser un punto. A este punto, si existe, se le llama **centro radical**. Se puede demostrar que es el punto donde se cortan los tres ejes radicales que se obtienen de las circunferencias, dos a dos.

## Recuerda

- ✓ Una *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo, que es el centro de la circunferencia. Si el centro es $O(a, b)$ y el radio es $r$, su ecuación es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- ✓ Una recta, con respecto de una circunferencia, puede ser: *exterior, secante o tangente.* Para determinar la posición se resuelve el sistema de segundo grado formado por las dos ecuaciones, la de la recta y la de la circunferencia.

- ✓ Se llama *potencia del punto $P$ con respecto de la circunferencia $\mathcal{C}$* al número

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = d^2 - r^2$$

donde $d$ es la distancia de $P$ al centro de la circunferencia, y $r$ es el radio de ésta.

- ✓ Se llama *eje radical* de dos circunferencias a la recta, lugar geométrico de los puntos del plano cuya potencia con respecto de las dos circunferencias es la misma. Cuando hay tres circunferencias, el lugar geométrico de los puntos que comparten la misma potencia con respecto de las tres es un punto, que se llama *centro radical.*

# 4. Elipse

La **elipse** también se puede definir como un lugar geométrico, además de ser una sección cónica, y utilizando la propiedad que la define, se puede deducir su ecuación.

## 4.1. Ecuación de la elipse

Empecemos con la definición.

Una *elipse* es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, $F_1$ y $F_2$, es constante. Estos puntos se llaman *focos* de la elipse.

Vamos a hacer un esbozo de cómo se puede deducir su ecuación a partir de la definición anterior. En primer lugar, situamos los focos sobre el eje $X$, $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, como se muestra en la figura 6.14. Esto se hace así para que la ecuación resulte más sencilla, si se pusieran en puntos arbitrarios, la ecuación tendría una expresión bastante complicada.

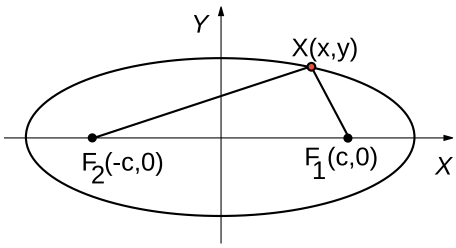



Figura 6.14: Elipse

Queremos encontrar los puntos $X(x, y)$ tales que

$$d(F_1, X) + d(F_2, X) = \text{constante.}$$

Resulta conveniente (para simplificar la expresión) elegir la constante $2a$. Entonces, aplicando la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Haciendo unos cálculos bastante laboriosos, que pasan por eliminar las raíces elevando dos veces al cuadrado, se llega a la expresión

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Por fin, llamando $b^2 = a^2 - c^2$, se llega a la expresión

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

donde $a^2 = b^2 + c^2$.

La expresión anterior se denomina *ecuación reducida* de la elipse (es la más sencilla posible).

Entonces, para calcular la ecuación de la elipse, hay que conocer el valor de los números $a$, $b$ y $c$. Aunque, como están relacionados por la expresión $a^2 = b^2 + c^2$, basta con conocer dos de ellos para poder calcular el tercero.

**ACTIVIDADES**

**12.** Calcular la ecuación de una elipse en la que $a = 5$ y los focos son los puntos $F_1(3, 0)$ y $F_2(-3, 0)$.

**13.** Calcular los focos de la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$.

**14.** Deducir la ecuación de la elipse con focos en los puntos $F_1(0, 2)$ y $F_2(0, -2)$; y vértices en los puntos $A_1(0, 3)$ y $A_2(0, -3)$.

## 4.2. Elementos de la elipse

Además de los focos, vamos a enumerar otros elementos y características de una elipse.

- El *centro* de la elipse es el origen de coordenadas, es decir, el punto $O(0, 0)$.

- Hemos visto antes que los focos de la elipse son los puntos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$. La distancia entre ellos, que es $2c$ se llama *distancia focal.* (Ver la figura 6.15).

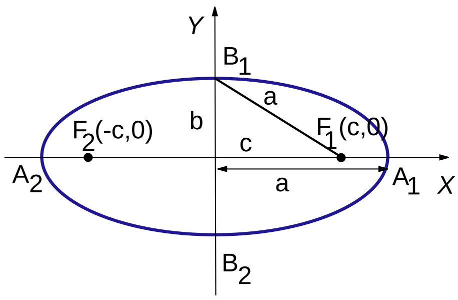



Figura 6.15: Elementos de la elipse

- Se llaman *vértices* a los puntos de corte de la elipse con los ejes coordenados. Los puntos de corte con el eje $X$, que se calculan haciendo $y = 0$ en la ecuación reducida, son $A_1(a, 0)$ y $A_2(-a, 0)$. Los puntos de corte con el eje $Y$, que se calculan haciendo $x = 0$ en la ecuación reducida, son $B_1(0, b)$ y $B_2(0, -b)$.

- La distancia entre los vértices $A_1$ y $A_2$ es $2a$, se llama **eje mayor**. Al número $a$ se le llama *semieje mayor.* Análogamente, $2b$ es el *eje menor* y $b$ es el *semieje menor.*

- La relación $a^2 = b^2 + c^2$ implica necesariamente que $a > b$. Por otra parte, esta relación es el *teorema de Pitágoras* aplicado al triángulo rectángulo de lados $a$, $b$ y $c$ de la figura 6.15.

- Si los focos de la elipse se sitúan sobre el eje $Y$, en lugar de hacerlo sobre el eje $X$, se puede deducir que la ecuación tiene la forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Y se sigue verificando $a^2 = b^2 + c^2$. Aunque ahora el eje mayor sería el vertical y el menor el horizontal.

Además de los parámetros $a$, $b$ y $c$; se utiliza otro que proporciona información sobre la forma de la elipse. Se llama **excentricidad**, y se define como la razón entre $c$ y $a$,

$$\boldsymbol{e = \frac{c}{a}}$$

Como $0 < c < a$, la excentricidad siempre será un número comprendido entre 0 y 1.

Si la excentricidad es un número próximo a 0, entonces $c$ es pequeño con respecto a la longitud de $a$, esto indica que los focos están muy juntos y, en consecuencia, la forma de la elipse será parecida a la de una circunferencia, como se muestra en la figura 6.16. Sin embargo, si la excentricidad es un número próximo a 1, entonces $c$ es

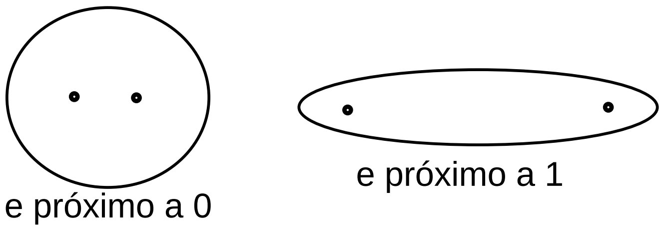



Figura 6.16: Excentricidad y forma de la elipse

grande con respecto a la longitud de $a$, lo que indicará que los focos están separados y, por tanto, la forma de la elipse será estirada.

## ACTIVIDADES

**15.** Calcular la excentricidad de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

**16.** Sabiendo que el semieje mayor de una elipse es $a = 2$ y que su excentricidad es $e = 0'2$, calcular su ecuación.

## Recuerda

- ✓ La *elipse* es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, $F_1$ y $F_2$, es constante. Estos puntos se llaman *focos* de la elipse.
- ✓ Su ecuación reducida es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a^2 = b^2 + c^2$
- ✓ $a$ es el semieje mayor, $b$ es el semieje menor y $2c$ es la distancia focal.
- ✓ La excentricidad de la elipse es $e = \dfrac{c}{a}$.

# 5. Hipérbola

## 5.1. Ecuación de la hipérbola

Empezamos definiendo la **hipérbola** como un lugar geométrico.

Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano tales que la diferencia (en valor absoluto) de sus distancias a dos puntos fijos, $F_1$ y $F_2$, es constante. Estos puntos también se llaman *focos*.

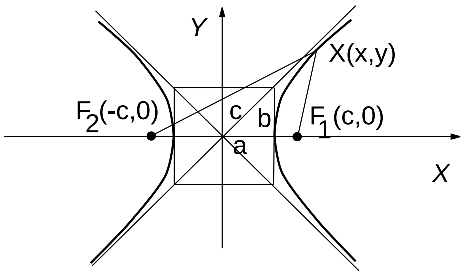



Figura 6.17: Hipérbola

La ecuación de la hipérbola se obtiene de modo similar a la ecuación de la elipse. Si situamos los focos sobre el eje $X$, $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, como se muestra en la figura 6.17, el problema ahora es encontrar los puntos $X(x, y)$ tales que

$$|d(F_1, X) - d(F_2, X)| = \text{constante.}$$

Elegimos la misma constante $2a$. Entonces, aplicando la fórmula de la distancia, ahora tenemos,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Después de eliminar las raíces elevando dos veces al cuadrado, se llega a la expresión

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Por fin, llamando $b^2 = c^2 - a^2$, se llega a la expresión

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$.

La expresión anterior se denomina *ecuación reducida* de la hipérbola.

Entonces, al igual que ocurría con la elipse, para calcular la ecuación de la hipérbola, hay que conocer el valor de los números $a$, $b$ y $c$. Aunque, como están relacionados por la expresión $c^2 = a^2 + b^2$ (¡cuidado, ahora es distinta!), basta con conocer dos de ellos para poder calcular el tercero.

ACTIVIDADES

**17.** Calcular la ecuación de una hipérbola en la que $b = 3$ y los focos son los puntos $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$.

**18.** Determinar los focos de la hipérbola de ecuación $9x^2 - 16y^2 = 144$.

## 5.2. Elementos de la hipérbola

Describimos también otros elementos de la hipérbola, análogos casi todos a los de la elipse.

- El *centro* de la hipérbola es el origen de coordenadas, es decir, el punto $O(0, 0)$. También aquí la distancia entre los focos, $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, se llama *distancia focal* y es $2c$. (Ver la figura 6.17).

- En la hipérbola sólo hay dos *vértices*, $A_1(a, 0)$ y $A_2(-a, 0)$. Pero no hay puntos de corte con el eje $Y$.

- La relación $c^2 = a^2 + b^2$ implica necesariamente que $c > a$. Por otra parte, esta relación es el *teorema de Pitágoras* aplicado al triángulo rectángulo de lados $a$, $b$ y $c$ de la figura 6.17. Aunque ahora la hipotenusa es $c$.

- Siguiendo con la misma figura, vemos que la gráfica de la hipérbola se encuentra entre dos rectas,

$$y = \frac{b}{a}x; \quad y = \frac{-b}{a}x;$$

que se llaman *asíntotas* de la hipérbola. Se puede demostrar que la gráfica de la hipérbola se aproxima cada vez más a estas rectas a medida que nos alejamos del centro.

- Si los focos de la hipérbola elipse se sitúan sobre el eje $Y$, en lugar de hacerlo sobre el eje $X$, se puede deducir que la ecuación tiene la forma

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Y se sigue verificando $c^2 = a^2 + b^2$. Además, esta hipérbola sigue teniendo las mismas asíntotas que la anterior, como se puede ver en la figura 6.18.

La **excentricidad** de la hipérbola se define como la de la elipse,

$$\boldsymbol{e = \frac{c}{a}}$$

Aunque ahora, como $0 < a < c$, la excentricidad siempre es un número mayor que 1.

Si la excentricidad es un número próximo a 1, entonces $c$ es parecido a la longitud de $a$, esto indica que los focos están muy pegados a los vértices y la forma de la elipse es estirada, como se muestra en la figura 6.19. Sin embargo, si la excentricidad es un número mucho mayor que 1, entonces $a$ es pequeño con respecto a la longitud de $c$, lo que indica que los focos están separados de los vértices y, por tanto, la forma de la hipérbola será alargada, como se ve en la figura 6.19.

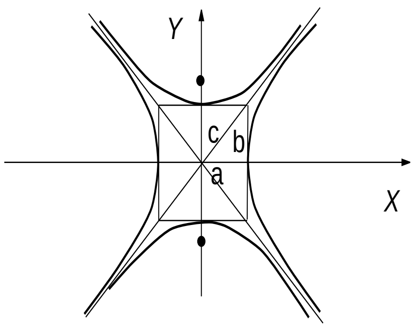



Figura 6.18: Dos hipérbolas con las mismas asíntotas

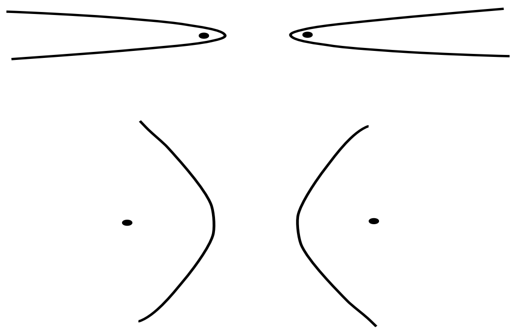


Figura 6.19: Excentricidad y forma de la hipérbola

## ACTIVIDADES

**19.** Calcular los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$.

**20.** Calcular la excentricidad de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$.

## Recuerda

✓ La *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano tales que la diferencia de sus distancias (en valor absoluto) a dos puntos fijos, $F_1$ y $F_2$, es constante. Estos puntos se llaman *focos* de la hipérbola.

✓ Su ecuación reducida es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } c^2 = a^2 + b^2$$

✓ Las *asíntotas* de la hipérbola son las rectas de ecuaciones

$$y = \frac{b}{a}x \qquad y = \frac{-b}{a}x$$

✓ La excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a}$.

# 6. Parábola

La **parábola** también se puede definir como un lugar geométrico, de la forma siguiente:

> Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano que equidistan de una recta $r$, llamada *directriz* y un punto $F$, que es el foco de la parábola.

Para obtener la ecuación, situamos el foco lo situamos en el punto de coordenadas $F\left(\frac{c}{2}, 0\right)$ y la directriz es la recta $x = \frac{-c}{2}$, con $c > 0$, de manera que $c$ sea la distancia entre el foco y la directriz, como se puede apreciar en la figura 6.20.

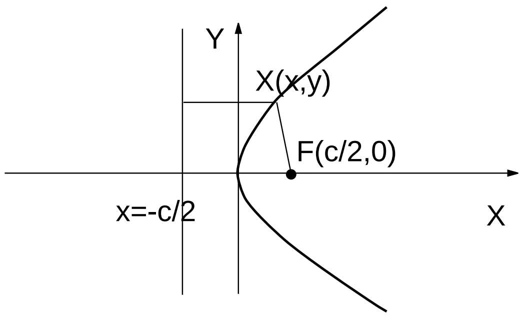



Figura 6.20: Parábola

Entonces, queremos encontrar la ecuación que cumplen los puntos $X(x, y)$ tales que $d(F, X) = d(X, r)$.
Utilizando las fórmulas de las distancias correspondientes, se obtiene

$$\sqrt{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{c}{2}$$

Si elevamos al cuadrado y simplificamos, obtenemos la *ecuación reducida de la parábola*

$$\boldsymbol{y^2 = 2cx}$$

Sin embargo, si se cambian las posiciones del foco y la directriz, se obtienen ecuaciones distintas. En las figuras 6.21, 6.22 y 6.23, ponemos las ecuaciones correspondientes a cada gráfica.

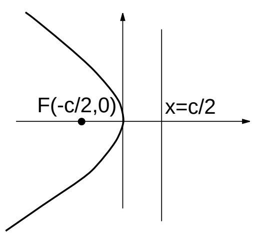



Figura 6.21: $y^2 = -2cx$

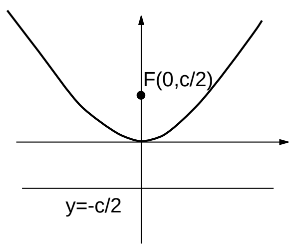



Figura 6.22: $x^2 = 2cy$

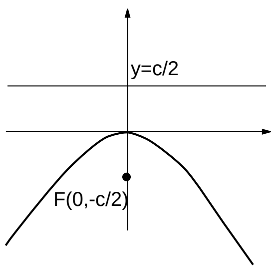



Figura 6.23: $x^2 = -2cy$

## ACTIVIDADES

**21.** Calcular la ecuación de la parábola con foco $F(2,0)$ y directriz $x = -2$.

**22.** ¿Cuál es el foco y la directriz de la parábola de ecuación $x^2 = 4y$?

**23.** Calcular el foco y la directriz de la parábola de ecuación $y^2 + 10x = 0$.

## Recuerda

- ✓ Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos $X(x,y)$ del plano que equidistan de una recta $r$, llamada *directriz* y un punto $F$, que es el foco de la parábola.
- ✓ La ecuación reducida de la parábola, dependiendo de la situación del foco y de la directriz puede ser una de las siguientes:

| Ecuación | Foco | Directriz |
|---|---|---|
| $y^2 = 2cx$ | $F(\frac{c}{2}, 0)$ | $x = \frac{-c}{2}$ |
| $y^2 = -2cx$ | $F(\frac{-c}{2}, 0)$ | $x = \frac{c}{2}$ |
| $x^2 = 2cy$ | $F(0, \frac{c}{2})$ | $y = \frac{-c}{2}$ |
| $x^2 = -2cy$ | $F(0, \frac{-c}{2})$ | $y = \frac{c}{2}$ |