5 Derivada de una función. Aplicaciones (I)

Esta Unidad trata sobre la derivada, herramienta creada casi al unísono por Leibniz (1646 -1716) y Newton. Ya conocemos su importancia debido a sus muchas aplicaciones. Repasamos la definición, recordando que la derivada surge para hallar la tasa de variación instantánea y así poder averiguar la velocidad de crecimiento de una función. Seguimos con las reglas para derivar, estudiamos la derivabilidad de las funciones y aprendemos a calcular las derivadas de órdenes superiores.

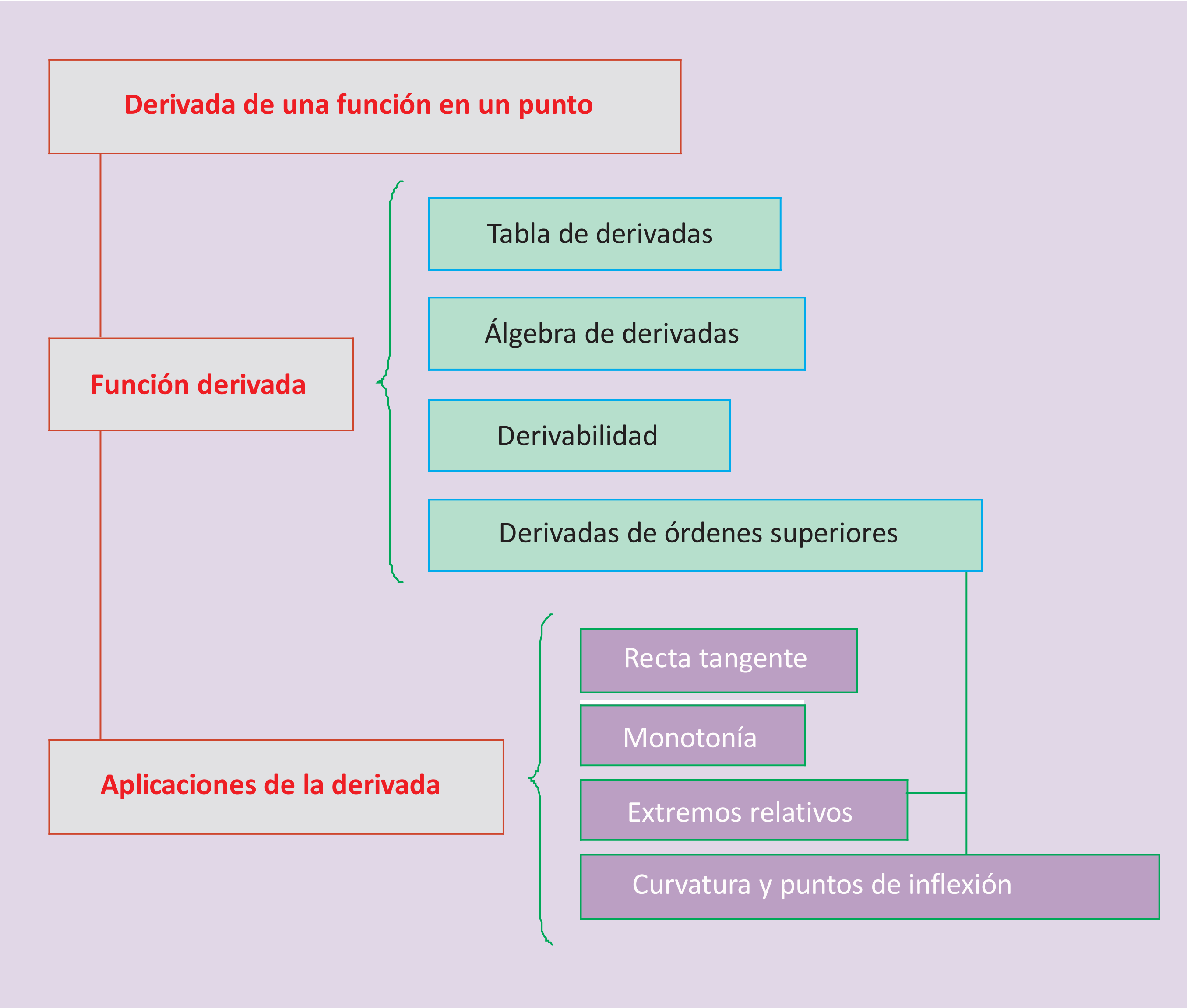
Gottfried W. von Leibniz (Wikipedia. org. Dominio público)

La derivada permite examinar con detalle cualquier función y extraer de ella toda la información que necesitamos, tal como averiguar la ecuación de la recta tangente a la curva en cualquier punto, conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento, hallar sus extremos relativos y determinar sus intervalos de concavidad y convexidad.

Como orientación para el estudio y la comprensión de las aplicaciones de la derivada que aparecen en la Unidad, queremos hacer ver que la base del tema es el estudio del signo de una función. Esto lo haremos con las mismas herramientas que ya vimos en Primero de Bachillerato. Así, usamos una misma técnica que aplicamos a diferentes funciones, o mejor dicho, a las derivadas de una misma función: el crecimiento se estudia a partir de la derivada primera y la curvatura, de la derivada segunda.

Por lo tanto, esta Unidad tiene como **objetivos** los siguientes:

1. Calcular la derivada de cualquier función.
2. Hallar la ecuación de la recta tangente a una función en cualquier punto.
3. Estudiar la derivabilidad de una función.
4. Obtener las derivadas sucesivas.
5. Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de una función.
6. Calcular los extremos relativos de una función.
7. Estudiar la concavidad y la convexidad, así como hallar los puntos de inflexión de una función.

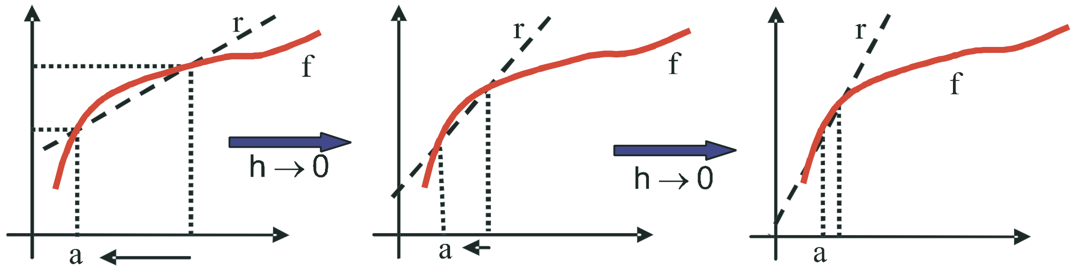


ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Derivada de una función

1.1. Derivada de una función en un punto

Vimos en Primero de Bachillerato que la derivada de una función en un punto no era más que la tasa de variación instantánea en dicho punto $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. La interpretación geométrica de la definición nos lleva a relacionarla con la pendiente de la recta tangente a la curva, siendo $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ la ecuación de dicha recta tangente a la función f en el punto (x_0, y_0).



La interpretación física de la derivada conduce al concepto de velocidad instantánea, definida como $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, relacionada con la notación $\dfrac{dy}{dx}$, en la que se expresa la variación en la función y (diferencial de y ó dy) inducida por la variación en la variable x (diferencial de x ó dx).

Para calcular una derivada siguiendo la definición recurríamos a la *Regla de los 4 pasos*, consistente en desglosar la definición y efectuar los cálculos poco a poco:

1er paso: cálculo de las imágenes *f(a+h)* y *f(a)*.

2º paso: cálculo de la diferencia *f(a+h) – f(a)*. Si se puede, se saca factor común *h*.

3er paso: cálculo del cociente $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Si se puede, se simplifica *h*.

4º paso: cálculo del límite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, que ya es la derivada.

Recordemos el procedimiento con un ejemplo: Dada $f(x)=\dfrac{2x-1}{3x+4}$, calcula *f'(-1)* usando la definición.

Primero escribimos la definición para este caso: $f'(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$.

1er paso: $f(-1+h)=\dfrac{2(-1+h)-1}{3(-1+h)+4}=\dfrac{2h-3}{3h+1}$, $f(-1)=\dfrac{2(-1)-1}{3(-1)+4}=-3$.

2º paso: $f(-1+h)-f(-1)=\dfrac{2h-3}{3h+1}-(-3)=\dfrac{2h-3+9h+3}{3h+1}=\dfrac{11h}{3h+1}$.

3er paso: $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\dfrac{11h/(3h+1)}{h}=\dfrac{11}{3h+1}$.

4º paso: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{11}{3h+1}=11 \Rightarrow f'(-1)=11.$

En la Unidad 8 de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de 1º* encontrarás más ejemplos del uso de la Regla de los cuatro pasos.

1.2. Función derivada

Dado lo tedioso del cálculo de la derivada punto a punto, se recurre a definir una **función derivada** que nos permite calcular la derivada de cualquier función en cualquier punto. Para ello definíamos la derivada de una función en un punto genérico x como: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ó $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. A partir de esta definición se obtienen las derivadas de las funciones elementales y las reglas del álgebra de derivadas.

1.3. Derivada de funciones conocidas

Como ya dijimos al introducir la derivada en Primero, hay que intentar entender la definición, saber manejarla para funciones sencillas, y, para el cálculo, debemos aprender las derivadas de las funciones matemáticas más habituales, así como las reglas que nos permitan derivar funciones más complejas, obtenidas como una cierta combinación de las elementales.

A esta tarea se dedica este apartado donde se expone la información necesaria en forma de tablas. En la primera aparecen las derivadas de las funciones usuales y de las trigonométricas, no muy usadas en las ciencias sociales, aunque ya son conocidas de Primero. En la segunda están las reglas (**álgebra de derivadas**) que nos permiten derivar sumas, restas, productos, cocientes y composiciones de funciones. Dada la importancia y dificultad que presenta la regla de la cadena (derivada de la composición de funciones) se desarrolla para los casos más habituales. Estas tablas deben ser memorizadas.

Tabla de derivadas de las funciones usuales	
Función	Derivada
k (constante)	0
$x^n,\quad n\in\Re$	$n\cdot x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Álgebra de derivadas

$$(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x),\ k \text{ constante}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\left(\frac{k}{f}\right)'(x) = -\frac{k \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}, \quad k \in \Re,$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

La última fórmula, conocida como **regla de la cadena**, puede desglosarse un poco para algunas funciones, obteniendo la siguiente tabla:

Función	Derivada
$(f(x))^n$	$n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x), \quad n \in \Re$
$e^{f(x)}$	$f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$ln(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$sen(f(x))$	$f'(x) \cdot cos f(x)$
$cos(f(x))$	$-f'(x) \cdot sen(f(x))$
$tg(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{cos^2(f(x))} = f'(x)\left(1 + tg^2(f(x))\right)$

Ejemplos

1. Averigua la derivada de **a)** $y = 7x^3 - 6x^2 + 5x - 3$; **b)** $y = x^3 e^x$; **c)** $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Solución:

a) $y' = 7 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x + 5 = 21x^2 - 12x + 5;$

b) $y' = (x^3)'e^x + x^3(e^x)' = 3x^2e^x + x^3e^x = (3+x)x^2e^x;$

c) $y' = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - (\ln x) \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}.$

2. Deriva: **a)** $y = (3x^5 - 5x^2 + 7)^8$; **b)** $y = \sqrt[7]{(2x - 5x^3)^4}$; **c)** $f(x) = \dfrac{1 + senx}{1 - senx}$.

Solución:

a) $y' = 8\left(3x^5 - 5x^2 + 7\right)^7\left(15x^4 - 10x\right) = 8\left(15x^4 - 10x\right)\left(3x^5 - 5x^2 + 7\right)^7$;

b) $y = \left(2x - 5x^3\right)^{4/7} \Rightarrow y' = \frac{4}{7}\left(2x - 5x^3\right)^{-3/7}\left(2 - 15x^2\right) = \frac{4\left(2 - 15x^2\right)}{7\left(2x - 5x^3\right)^{3/7}} = \frac{4\left(2 - 15x^2\right)}{7\sqrt[7]{\left(2x - 5x^3\right)^3}}$;

c) $y' = \frac{(1 + senx)'(1 - senx) - (1 + senx)(1 - senx)'}{(1 - senx)^2} = \frac{\cos x(1 - senx) + \cos x(1 + senx)}{(1 - senx)^2} \Rightarrow y' = \frac{2\cos x}{(1 - senx)^2}$.

3. Deriva: **a)** $f(x) = \left(3x^2 - 7\right)^2$; **b)** $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 5}$; **c)** $y = \frac{e^{-x^2}}{x^2}$.

Solución:

a) $f'(x) = 2\left(3x^2 - 7\right)\cdot 6x = 12x\left(3x^2 - 7\right)$;

b) $y' = \frac{(2x - 3)(x + 5) - \left(x^2 - 3x\right)\cdot 1}{(x + 5)^2} = \frac{x^2 + 10x - 15}{(x + 5)^2}$.

Antes de usar las reglas de la derivación y como el numerador es un polinomio de grado mayor que el denominador, podíamos haber usado la división de polinomios y, recordando que $\frac{D(x)}{d(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$, haber escrito la función como $y = x - 8 + \frac{40}{x + 5} \Rightarrow y' = 1 - \frac{40}{(x + 5)^2} = \frac{(x + 5)^2 - 40}{(x + 5)^2} = \frac{x^2 + 10x - 15}{(x + 5)^2}$.

Te recuerdo que esto lo hicimos en Primero al tratar la función de proporcionalidad inversa. Esta técnica más que ayudarnos al derivar, puede servirnos para orientarnos cuando tengamos que representar funciones.

c) $y' = \frac{-2xe^{-x^2}\cdot x^2 - e^{-x^2}\cdot 2x}{x^4} = \frac{-2xe^{-x^2}\left(x^2 + 1\right)}{x^4} = \frac{-2e^{-x^2}\left(x^2 + 1\right)}{x^3}$.

4. Calcula la derivada de **a)** $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 3}$; **b)** $y = \frac{e^{2x}\cdot \ln x}{x^3}$; **c)** $y = \frac{(4x - 1)^2}{(3x + 2)^2}$.

Solución:

a) $f'(x) = \frac{(2x - 5)(x - 3) - \left(x^2 - 5x + 4\right)\cdot 1}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 11}{(x - 3)^2}$;

b) $y' = \frac{\left(2e^{2x}\ln x + e^{2x}\cdot \frac{1}{x}\right)\cdot x^3 - e^{2x}(\ln x)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{\left(2xe^{2x}\ln x + e^{2x}\right)\cdot x^2 - 3x^2e^{2x}\ln x}{x^6} \Rightarrow y' = \frac{x^2e^{2x}(2x\ln x + 1 - 3\ln x)}{x^6} = \frac{e^{2x}(2x\ln x - 3\ln x + 1)}{x^4}$;

c) $y' = \frac{2(4x - 1)\cdot 4\cdot(3x + 2)^2 - (4x - 1)^2\cdot 2(3x + 2)\cdot 3}{(3x + 2)^4} = \frac{(3x + 2)(4x - 1)\left[8\cdot(3x + 2) - 6\cdot(4x - 1)\right]}{(3x + 2)^4} = \frac{22(4x - 1)}{(3x + 2)^3}$.

5. Calcula la derivada de: **a)** $y=e^{4x}(x-1)$; **b)** $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$.

Solución:

a) $y'=\left(e^{4x}\right)'(x-1)+e^{4x}(x-1)'=4e^{4x}(x-1)+e^{4x}=e^{4x}(4x-4+1)=e^{4x}(4x-3)$.

b) $y'=\dfrac{2x\cdot\left(x^2+3\right)-\left(x^2-3\right)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{12x}{\left(x^2+3\right)^2}$.

6. Calcula la derivada de: **a)** $y=tg^2(x-1)$; **b)** $y=\sqrt{1-sen\dfrac{x}{2}}$.

Solución:

a) $y'=2tg(x-1)\cdot\left(1+tg^2(x-1)\right)$;

b) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-sen\dfrac{x}{2}}}\cdot\left(-\cos\dfrac{x}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-\cos\dfrac{x}{2}}{4\sqrt{1-sen\dfrac{x}{2}}}$.

Te recomendamos que repases la unidad 8 del libro de Primero, donde encontrarás más ejemplos de las reglas elementales de la derivación. De todos modos, aquí va otra colección de funciones que te proponemos derivar.

Actividades

1. Halla la derivada de: **a)** $y=\dfrac{3x-1}{3x^2+1}$; **b)** $y=x^2\ln x$; **c)** $y=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$.

2. Averigua la derivada de: **a)** $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; **b)** $y=x^3-3x$; **c)** $y=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.

3. Calcula la derivada de: **a)** $y=\dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}$; **b)** $y=xe^{-x^2}$; **c)** $y=\dfrac{3x^2-x}{x+2}$.

4. Halla la derivada de: **a)** $y=\ln\left(5x^3-6x^2+7\right)$; **b)** $y=\sqrt{x^2-5x+3}$.

5. Calcula la derivada de: **a)** $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; **b)** $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$; **c)** $f(x)=\dfrac{8(x-1)^2}{x^3}$.

6. Averigua la derivada de: **a)** $y=xe^{-3x}$; **b)** $y=\dfrac{10}{8-x}$; **c)** $y=\dfrac{38x-100}{0{,}4x}$.

7. Deriva: **a)** $y=7e^{2x-1}-3x^4+5x$; **b)** $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

8. Halla la derivada de: **a)** $y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$; **b)** $y=\dfrac{2x}{x^2-4}$; **c)** $y=\dfrac{5x^3}{5x^3-7}$.

9. Halla la derivada de: **a)** $y=sen\left(x^2+2x\right)$; **b)** $y=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$.

10. Halla la derivada de: **a)** $y=e^{x^2-1}(3x+5)$; **b)** $y=\dfrac{4x^2+5}{4x^2-5}$.

1.4. Ecuación de la recta tangente

Geométricamente la derivada surge para dar respuesta al problema del cálculo de la **recta tangente** a una curva en cualquier punto. Como la pendiente de dicha recta es la derivada en el punto, la ecuación es:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ejemplos

7. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 5x + 6$ en el punto (1,4).

Solución:

Hay que averiguar $f'(1) \Rightarrow y' = 6x - 5 \Rightarrow y'(1) = 6x - 5|_{x=1} = 1 \Rightarrow$ Sustituyendo en la fórmula queda $y - 4 = x - 1 \Rightarrow r: y = x + 3$.

8. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = -3x^2 + 1$ en $x = 2$.

Solución:

Hay que averiguar $f(2)$ y $f'(2) \Rightarrow f(2) = -3 \cdot 2^2 + 1 = -11; f'(2) = -6x|_{x=2} = -12 \Rightarrow$
$\Rightarrow y - (-11) = -12(x - 2) \Rightarrow r: y = -12x + 13.$

9. ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 + 5x - 6$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Hállese el punto de tangencia.

Solución:

Para que dos rectas sean paralelas han de tener la misma pendiente. La bisectriz del primer cuadrante es la recta $y = x \Rightarrow m = 1$ y la pendiente de la recta tangente es $f'(x_0) \Rightarrow 2x_0 + 5 = 1 \Rightarrow x_0 = -2$. Como $y_0 = y(-2) = -12$ y $f'(-2) = 1$, la tangente es $y - (-12) = x - (-2) \Rightarrow r: y = x - 10$ y el punto de tangencia $(-2, -12)$.

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = xe^{x^2}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

$f(1) = e; f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = (1 + 2x^2)e^{x^2} \Rightarrow f'(1) = 3e \Rightarrow$ La recta tangente tiene por ecuación $y - e = 3e(x - 1) \Rightarrow r: y = 3ex - 2e.$

Actividades

11. Averigua la ecuación de la recta tangente a la curva $y = (x + 1)e^{-3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

12. ¿En qué punto la recta tangente a la curva $y = x^2 + 3x - 5$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Escribe también la ecuación de dicha recta tangente.

13. Halla el valor del parámetro a para que la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{a - x}$ sea paralela a la recta $y = 4x - 5$ en el punto de abscisa 1. Escribe la ecuación de dicha recta tangente.

1.5. Derivabilidad

Sabemos que para que una función sea derivable ha de ser previamente continua. Sin embargo, ésta sólo es una condición necesaria, pero no suficiente, pues no todas las funciones continuas son derivables. El ejemplo habitual es la función valor absoluto, que nos permitirá introducir las derivadas laterales. Veámoslo:

¿Cuánto vale la derivada del valor absoluto $|x| = \begin{cases} -x, si\ x < 0 \\ x, \quad si\ x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$?

Dado que $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ es continua en $x = 0$.

$f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$ ¿Cómo calculamos el límite? Fíjate que es distinto por la izquierda $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$ que por la derecha $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$, por lo que debemos concluir que no existe $f'(0)$. Por lo tanto, es una función continua en un punto, pero no derivable en dicho punto.

La definición de las derivadas laterales es claramente:

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \equiv \text{ derivada por la izquierda.}$$

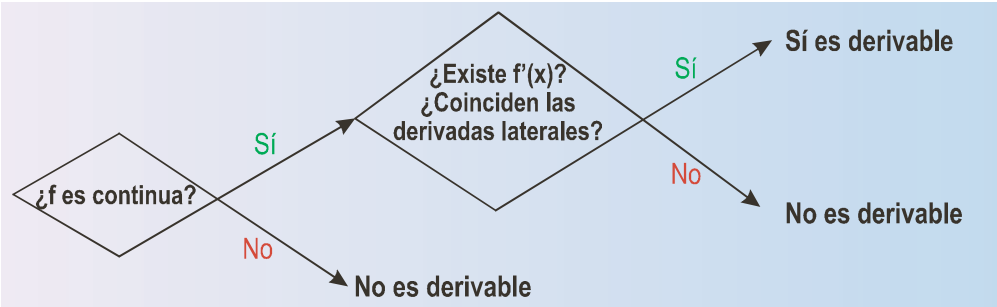
$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \equiv \text{ derivada por la derecha.}$$

No te preocupes, ya que para calcular las derivadas laterales en un punto, si se trata de funciones definidas a trozos (lo más habitual), se calcula la derivada de la función que esté en el trozo que interese y se sustituye el valor del punto. En el ejemplo anterior $f'(0^-) = -1\big|_{x=0} = -1; \quad f'(0^+) = 1\big|_{x=0} = 1$.

El otro tipo de funciones que presentarán problemas en la derivada son aquellas que al derivar se convierten en funciones con denominadores, como las que tienen radicales. Observa lo que pasa con $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Esta función es continua en $x = 0$, pues $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$, pero no es derivable en dicho punto: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(0) = \frac{1}{0} \Rightarrow \nexists f'(0) \Rightarrow$ f es continua en $\Re$ y derivable en $\Re - \{0\}$.

En resumen, para estudiar la derivabilidad de una función primero se estudia la continuidad y después se calcula la derivada, en ocasiones a partir de las derivadas laterales. Si coinciden, la función es derivable y si no coinciden, no es derivable.



Ejemplos

11. ¿Es derivable $f(x)=\begin{cases} 0, & si\ x<0\ ó\ si\ x\geq\frac{\pi}{2} \\ senx, & si\ 0\leq x<\frac{\pi}{4} \\ \cos x, & si\ \frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$ en $x=0,\ x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{2}$?

Solución:

• Estudio en $x = 0 \Rightarrow$

Continuidad: $f(0)=sen0=0;\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0;\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} senx=0 \Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\Rightarrow$ es continua en $x=0$.

Derivabilidad: $f'(0^-)=0\big|_{x=0}=0;\quad f'(0^+)=\cos x\big|_{x=0}=1\Rightarrow \nexists f'(0)$.

• Estudio en $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$

Continuidad: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} senx=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)\Rightarrow$ es continua en $x=\frac{\pi}{4}$.

Derivabilidad: $f'\left(\frac{\pi}{4}^-\right)=\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\ f'\left(\frac{\pi}{4}^+\right)=-senx\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\nexists f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

• Estudio en $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

Continuidad: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0;\quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0;\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 0=0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\Rightarrow$ es continua en $x=\frac{\pi}{2}$.

Derivabilidad: $f'\left(\frac{\pi}{2}^-\right)=-senx\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-1;\ f'\left(\frac{\pi}{2}^+\right)=0\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0\Rightarrow\nexists f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

12. Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x<1 \\ 2x-1 & si\ x\geq 1\end{cases}$

Solución:

El único punto en el que puede presentar problemas es en x = 1, que es donde cambia de definición.

Continuidad: $f(1)=2x-1\big|_{x=1}=1;\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x^2=1;\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1\Rightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)\Rightarrow$ es continua en $x=1$.

Derivabilidad: $f'(1^-)=2x\big|_{x=1}=2;\ f'(1^+)=2\big|_{x=1}=2\Rightarrow f'(1)=2\Rightarrow$ es derivable en x = 1.

Por lo tanto, *f* es continua y derivable en todo $\Re$.

13. ¿Es $f(x)=\begin{cases}1-4x, & si\ x\le -2\\ x^2+5, & si\ x>-2\end{cases}$ derivable en $x=-2$?

Solución:

Continuidad: $f(-2)=(1-4x)\big|_{x=-2}=9$; $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(1-4x)=9$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2+5\right)=9\Rightarrow$
$f(-2)=\lim\limits_{x\to -2} f(x)\Rightarrow$ es continua en $x=-2$.

Derivabilidad: $f'(-2^-)=-4\big|_{x=-2}=-4$; $f'(-2^+)=2x\big|_{x=-2}=-4\Rightarrow f'(-2)=-4$. Sí es derivable en $x=-2$.

14. Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases}x+4,\ si\ x<2\\ x^2-3x+8,\ si\ x\ge 2\end{cases}$

Solución:

Continuidad: $f(2)=x^2-3x+8\big|_{x=2}=6$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+4)=6$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+8\right)=6\Rightarrow$
$f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)\Rightarrow$ es continua en $x=2$.

Derivabilidad: $f'(2^-)=1\big|_{x=2}=1; f'(2^+)=2x-3\big|_{x=2}=1\Rightarrow f'(2)=1\Rightarrow$ es derivable en todo $\Re$.

15. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\sqrt{x-7}$.

Solución:

Se observa que *Dom f* = $[7,\infty)$ siendo continua en todo su dominio, aunque en x = 7 sólo podemos calcular un límite lateral, pues el otro haría que el radicando fuese negativo: $\lim\limits_{x\to 7^+}\sqrt{x-7}=0=f(7)$; no existe límite cuando x tiende a 7^-.

Es fácil ver que $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-7}}\Rightarrow DEN=0\Rightarrow\sqrt{x-7}=0\Rightarrow x=7\Rightarrow f'(7)=\dfrac{1}{0}\Rightarrow\nexists f'(7)\Rightarrow f$ es derivable en $(7,\infty)$

16. ¿Es derivable la función $f(x)=5\sqrt[3]{x^2-8}$ en el intervalo [1, 3]?

Solución:

Como es una raíz cúbica no presenta problemas para ningún número (la raíz cúbica de un número negativo es un número negativo), por lo que *Dom f* = $\Re$ y, por ello, será continua en $\Re$ y también, lógicamente, en cualquier intervalo de dicha recta.

$$f(x)=5\left(x^2-8\right)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}\left(x^2-8\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{10x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-8\right)^2}}\Rightarrow DEN=0\Rightarrow\left(x^2-8\right)^2=0\Rightarrow x^2=8\Rightarrow x=\pm\sqrt{8}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\nexists f'\left(\pm\sqrt{8}\right)$. Se ve fácilmente que $1\le\sqrt{8}\le 3\Rightarrow$ f es derivable en $[1,3]-\left\{\sqrt{8}\right\}$.

Actividades

14. Estudia la derivabilidad de: **a)** $y = 3 - \sqrt[3]{x+5}$; **b)** $f(x) = \dfrac{3|x|}{4+2|x|}$.

15. Averigua los valores de los parámetros *a* y *b* para que la función $f(x) = \begin{cases} ae^x + 1, si\ x \le 0 \\ -\dfrac{b}{x+2}, si\ x > 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en todo R.

16. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones: **a)** $y = \sqrt{2x^2+5}$ **; b)** $f(x) = \ln\left(4x^2 - 1\right)$ **; c)** $y = 2x \cdot |x|$ **.**

17. Averigua el valor de *a* y *b* para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - b, si\ x < -1 \\ 3 + ax, si\ -1 \le x \le 1 \\ bx + 2a, si\ x > 1 \end{cases}$ sea continua y estudia la derivabilidad de *f* para dichos valores.

18. Estudia la derivabilidad de $y = \dfrac{1-|x|}{1+|x|}$.

19. Halla *a* y *b* para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax,\ si\ x \le 2 \\ 5x + b, si\ x > 2 \end{cases}$ sea continua y derivable.

1.6. Derivadas sucesivas

¿Nos puede servir para algo hallar la tasa de variación instantánea de la derivada? Fíjate en que la derivada es una función, por lo que podemos calcular su TVI, que será la derivada de la derivada. La derivada de la derivada de una función recibe el nombre de **derivada segunda** y en la unidad siguiente la usarás para estudiar la curvatura (concavidad y convexidad) de una función. Se define como:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Este proceso lo podemos prolongar indefinidamente y así tendremos la derivada tercera f''' (que es derivar la función derivada segunda), la derivada cuarta f^{iv} (que es derivar la función derivada tercera), la derivada quinta f^{v} (derivar la función derivada cuarta),…, la derivada n-sima o enésima $f^{(n}$. Observa la notación: se usan números romanos para las primeras y un paréntesis con el grado para las de orden superior con el fin de no confundirlas con las potencias. Estas derivadas de órdenes superiores (que es un nombre que a menudo reciben) se calculan con las mismas reglas que vimos para la derivada, que ahora se llama derivada primera (y simplemente derivada cuando no hay confusión posible).

Las derivadas de órdenes sucesivos se utilizan para calcular el desarrollo en serie de Taylor para una función, utilísima herramienta que permite averiguar el valor de la raíz cuadrada, seno, coseno, exponencial, logaritmo, etc., de cualquier número. En concreto, este tipo de desarrollo es el que está presente en las calculadoras científicas, permitiéndonos efectuar todos los cálculos que necesitemos. El desarrollo consiste en encontrar un polinomio que se aproxima a la función y que es el que usamos para los cálculos.

Ejemplos

17. Calcula la derivada segunda de las siguientes funciones: **a)** $y=\frac{3x-1}{3x^2+1}$; **b)** $y=x^2\ln x$; **c)** $y=\frac{x+1}{x^2+x-2}$.

Solución:

a) $y'=\frac{3(1+2x-3x^2)}{(3x^2+1)^2}\Rightarrow y''=3\frac{(2-6x)\cdot(3x^2+1)^2-(1+2x-3x^2)\cdot 2\cdot(3x^2+1)\cdot 6x}{(3x^2+1)^4}$.

Antes de efectuar las multiplicaciones, sacaremos factor común en el numerador. El factor común no es más que el denominador, algo que siempre sucede en las fracciones algebraicas :

$$y''=3\frac{(3x^2+1)\left[(2-6x)\cdot(3x^2+1)-(1+2x-3x^2)\cdot 2\cdot 6x\right]}{(3x^2+1)^4}=3\frac{2-6x+6x^2-18x^3-12x-24x^2+36x^3}{(3x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{6(9x^3-9x^2-9x+1)}{(3x^2+1)^3}.$$

b) $y'=2x\ln x+x\Rightarrow y''=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}+1=2\ln x+3;$

c) $y'=-\frac{x^2+2x+3}{(x^2+x-2)^2}\Rightarrow y''=-\frac{(2x+2)\cdot(x^2+x-2)-(x^2+2x+3)\cdot 2\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^3}.$

Observa que ya hicimos la simplificación de la que hablábamos en el apartado **a)**:

$$y''=-\frac{2x^3+4x^2-2x-4-(4x^3+10x^2+16x+6)}{(x^2+x-2)^3}=\frac{2(x^3+3x^2+9x+5)}{(x^2+x-2)^3}.$$

18. Averigua la derivada segunda de: **a)** $y=\frac{x^3}{x^2+1}$; **b)** $y=x^3-3x$; **c)** $y=\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.

Solución:

a) $y'=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}\Rightarrow y''=\frac{(4x^3+6x)\cdot(x^2+1)-(x^4+3x^2)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2+1)^3}\Rightarrow y''=\frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$.

b) $y'=3x^2-3\Rightarrow y''=6x$.

c) Transformamos la función desarrollando el binomio y efectuando la división de polinomios:

$$y=\frac{4x^2+1-4x}{4x^2+1}=1-\frac{4x}{4x^2+1}\Rightarrow y'=\frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2}\Rightarrow y''=-\frac{32x(4x^2+1)-(16x^2-4)2\cdot 8x}{(4x^2+1)^3}=\frac{-128x^3+96x}{(4x^2+1)^3}=\frac{-32x(4x^2-3)}{(4x^2+1)^3}.$$

19. Halla la derivada segunda de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{1}{x^2+x}$; **b)** $y=xe^{2x}$; **c)** $y=\dfrac{3x^2+x}{x+2}$.

Solución:

a) $y'=\dfrac{-(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}\Rightarrow y''=-\dfrac{2\left(x^2+x\right)-(2x+1)\cdot 2\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^3}=\dfrac{2\left(3x^2+3x+1\right)}{\left(x^2+x\right)^3}$.

b) $y'=(1+2x)e^{2x}\Rightarrow y''=(2+2+4x)e^{2x}=4(1+x)e^{2x}$.

c) Simplificamos la función dividiendo los polinomios:

$$y=3x-5+\frac{10}{x+2}\Rightarrow y'=3-\frac{10}{(x+2)^2}\Rightarrow y''=\frac{20}{(x+2)^3} .$$

Actividades

20. Calcula la derivada segunda de: **a)** $y=\ln\left(5x^3-6x^2+7\right)$; **b)** $y=\sqrt{x^2-5x+3}$.

21. Halla la derivada segunda de: **a)** $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; **b)** $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$; **c)** $f(x)=\dfrac{8(x-1)^2}{x^3}$.

22. Halla la derivada segunda de: **a)** $y=x^2e^{-3x+1}$; **b)** $y=\dfrac{10}{8-x}$; **c)** $y=\dfrac{38x-100}{0,4x}$.

23. Calcula la derivada segunda de: **a)** $y=7e^{2x-1}-3x^4+5x$; **b)** $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

24. Halla la derivada segunda de: **a)** $y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$; **b)** $y=\dfrac{2x}{x^2-4}$; **c)** $y=\dfrac{5x^3}{5x^3-7}$.

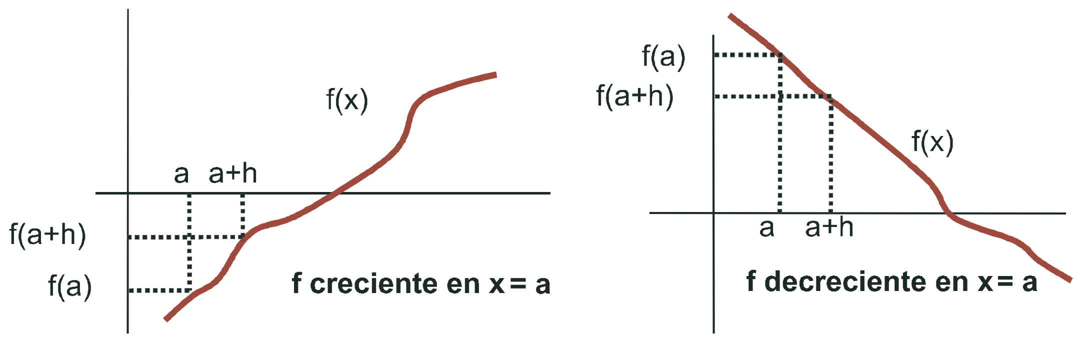
25. Averigua la derivada segunda de: **a)** $y=sen\left(x^2+2x\right)$; **b)** $y=\dfrac{x(x+1)+1}{x+1}$.

2. Monotonía: crecimiento y decrecimiento

Con el término **monotonía** hacemos referencia al crecimiento o decrecimiento de las funciones. Se dice que una función es monótona creciente o simplemente **creciente** en $x = a$ cuando $f(a+h) \geq f(a)$ y $f(a-h) \leq f(a)$, si $h > 0$.

Si no aparece la igualdad diremos que la función es estrictamente creciente, aunque habitualmente usamos el término creciente en el sentido de estrictamente creciente. La definición para el caso de que la función sea **decreciente** en $x = a$ no debe plantear problemas. Será estrictamente decreciente cuando $f(a+h) < f(a)$ y $f(a-h) > f(a)$, si $h > 0$.

Observa que lo que hemos escrito es que, si f es creciente, al aumentar x debe aumentar f y que si es decreciente, al aumentar x disminuye f.



A pesar de lo intuitivo de las definiciones anteriores, no son excesivamente útiles para los cálculos. Tendríamos que ir punto a punto, algo imposible de llevar a la práctica. Sin embargo, si nos fijamos en las definiciones, observamos que aparecen unos términos, viejos conocidos de la derivada: $f(a+h)$, $f(a)$, h. Yendo a la definición de derivada en un punto tendríamos lo siguiente (suponiendo $h > 0$):

$$\text{Si } f \text{ es creciente en } x = a \Rightarrow f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0.$$
$$\text{Si } f'(a) > 0 \Rightarrow f(a+h) - f(a) > 0 \Rightarrow f(a+h) > f(a) \Rightarrow f \text{ es creciente en } x = a.$$

Por lo tanto, podemos cambiar nuestras definiciones por otras alternativas que digan:

f es creciente en $x = a$ si $f'(a) > 0$ y decreciente si $f'(a) < 0$.

De este modo, estudiar el crecimiento de una función no es más que estudiar el signo de su derivada, pues la función será creciente en aquellos intervalos en los que su derivada sea positiva y decreciente en aquellos en los que su derivada sea negativa.

¿Qué sucede si $f'(a) = 0$? En estos puntos, la recta tangente será una recta horizontal, paralela al eje OX. La función cambia su comportamiento, pasando de crecer a decrecer o a la inversa, presentando o un máximo o un mínimo relativo, respectivamente. Estos, como ya sabías, son los llamados puntos críticos o extremos relativos, que detallaremos más adelante.

Ejemplos

20. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)=2x^2-\frac{1}{3}x^3$.

Solución:

Calculamos su derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=4x-x^2=(4-x)x \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 4-x=0 \Rightarrow x=4 \\ x=0 \end{cases}$

Construimos la siguiente tabla para estudiar el signo de f' y simultáneamente indicar el comportamiento de la función.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4,\infty)$
$sgn[x(4-x)]$	–	+	–
f	$D\downarrow$	$C\uparrow$	$D\downarrow$

21. Dada la curva $y=\frac{x}{x^2-1}$ halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

Al ser una fracción algebraica, calculamos su derivada e igualamos a cero su numerador y su denominador independientemente: $y'=\frac{x^2-1-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2} \Rightarrow \left.\begin{cases} NUM=0 \Rightarrow x^2+1>0 \Rightarrow NUM>0 \\ DEN=0 \Rightarrow \left(x^2-1\right)^2>0 \text{ en } \Re-\{\pm 1\} \end{cases}\right\} \Rightarrow y'<0$

en $\Re-\{\pm1\}$; *y* es decreciente en $\Re-\{\pm1\}$, es decir, *y* es decreciente en todo su dominio.

22. Una enfermedad se propaga de tal forma que, después de *t* semanas afecta a *N(t)* cientos de personas, donde

$N(t)=\begin{cases} 5-t^2(t-6) \text{ para } 0\le t\le 6 \\ -\frac{5}{4}(t-10) \text{ para } 6<t\le 10 \end{cases}$. Estudia el crecimiento y decrecimiento de *N(t).*

Solución:

Como es una función definida a trozos, su derivada también lo será y habrá que estudiar la monotonía por separado en cada uno de los trozos. Antes hay que averiguar si es derivable en *t* = 6, que es el único posible punto de discontinuidad:

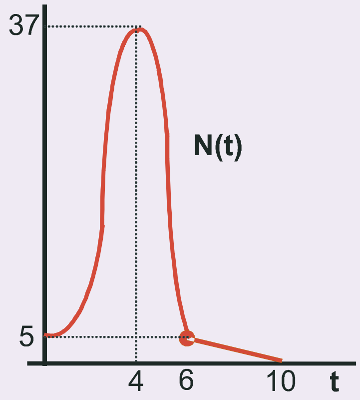
$$N(6)=5;\ \lim_{t\to 6^-} N(t)=\lim_{t\to 6}\left[5-t^2(t-6)\right]=5;\ \lim_{t\to 6^+} N(t)=\lim_{t\to 6}\left[-\frac{5}{4}(t-10)\right]=5 \Rightarrow \text{N es continua.}$$

$$N'(6^-)=-3t^2+12t\Big|_{t=6}=-36;\ N'(6^+)=-\frac{5}{4}\Big|_{t=6}=-\frac{5}{4} \Rightarrow \nexists N'(6).$$

La derivada es: $N'(t)=\begin{cases} -3t^2+12t \text{ para } 0\le t<6 \\ -\frac{5}{4} \text{ para } 6<t\le 10 \end{cases} \Rightarrow N'(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} -3t(t-4)=0 \Rightarrow t=0,4 \\ -\frac{5}{4}<0 \end{cases} \Rightarrow$

La tabla que hay que construir y la gráfica (no a escala) son las siguientes:

	(0, 4)	(4, 6)	(6,10)
sgn $N'(t)$	+	–	–
N	*C*↑	*D*↓	*D*↓



23. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2 \text{ si } x<3 \\ -\dfrac{10}{x} \text{ si } x\geq 3\end{cases}$

Solución:

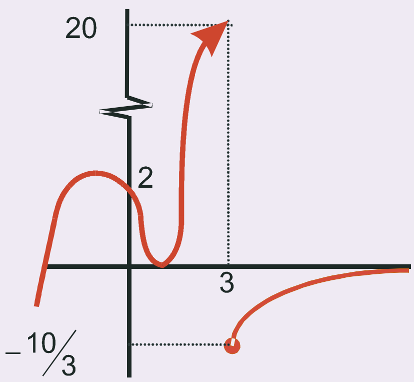
Al ser una función definida a trozos su derivada también lo es, por lo que hay que estudiar el crecimiento en cada uno de los trozos separadamente. Previamente hay que averiguar si es derivable en $x=3$, que es el único punto problemático (x = 0, que afecta a $-\dfrac{10}{x}$, no entra en su intervalo de definición):

$f(3)=-\dfrac{10}{3}$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(x^3-3x+2\right)=20$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(-\dfrac{10}{x}\right)=-\dfrac{10}{3}\Rightarrow$ No es continua, por lo que tampoco es derivable en $x=0$. La derivada queda como: $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-3 \text{ si } x<3 \\ \dfrac{10}{x^2} \text{ si } x>3\end{cases} \Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow \begin{cases} 3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm 1 \\ \dfrac{10}{x^2}>0\Rightarrow f \text{ creciente en } (3,\infty)\end{cases}$.

La tabla que hay que construir es:

	$(-\infty,-1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3,\infty)$
sgn $f'(x)$	+	–	+	+
f	*C*↑	*D*↓	*C*↑	*C*↑

Su representación es la que aparece a la derecha.



24. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=xe^{-2x}$.

Solución:

$$f'(x)=e^{-2x}+xe^{-2x}\cdot(-2)\Rightarrow f'(x)=(1-2x)e^{-2x}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 1-2x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
sgn $f'(x)$	+	–
f	*C*↑	*D*↓

Actividades

26. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

27. Averigua los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y = (2x - 3)^3$.

28. Estudia la monotonía de la función $y=\left(x^2+x-11\right)\cdot e^x$.

29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)=(3x-2)\cdot e^{4x-1}$.

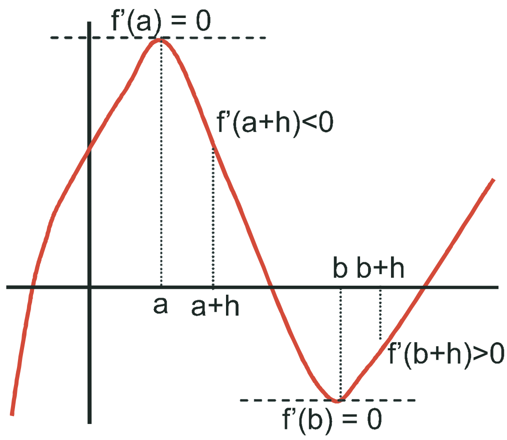
30. Averigua los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)=\dfrac{1-x^2}{(x+3)^2}$.

31. Estudia la monotonía de la función $y=\dfrac{2x^2-5}{x+8}$.

32. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-4x$.

3. Puntos críticos o extremos relativos

Intuitivamente sospechamos que los extremos de una función son el menor y el mayor valor que puede tomar una función. Estos valores reciben el nombre de **extremos absolutos**, y no suelen ser buscados. Existen otros extremos en Matemáticas, también conocidos como **puntos críticos** o **extremos relativos**, de mayor importancia que los anteriores. Estos puntos se caracterizan porque en ellos la recta tangente a la curva es horizontal, es decir, paralela al eje *OX*, por lo que la derivada se anula en dichos puntos. Al anularse, y si la derivada es continua, la función será creciente a la izquierda y decreciente a la derecha (si es un máximo relativo), y decreciente a la izquierda y creciente a la derecha (si es un mínimo relativo). Éste es un método útil para averiguar los extremos relativos cuando se dispone de la tabla de crecimiento.



Otro procedimiento exige que vayamos a la derivada segunda. Observando la gráfica, y teniendo en cuenta la definición de derivada segunda tendríamos:

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)}{h} < 0\,;$$

$$f''(b) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(b+h) - f'(b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(b+h)}{h} > 0$$

Concluimos que f tiene un punto crítico en x_0 cuando $f'(x_0) = 0$. Es un **máximo relativo** si $f''(x_0) < 0$ y un **mínimo relativo** si $f''(x_0) > 0$.

Ejemplos

25. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

Solución:

La función no existe para los valores de x que anulan al denominador, éstos son $x = 1$ y $x = 2$. Construimos la tabla de crecimiento, el método más sencillo en este caso:

$$f'(x)=\frac{3-2x}{\left(x^2-3x+2\right)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 3-2x=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}\text{ punto crítico}.$$

	$(-\infty, 3/2)-\{1\}$	$(3/2, \infty)-\{2\}$
sgn $f'(x)$	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{-}{+}=-$
f	*C*↑	*D*↓

La función tiene un máximo en $\left(\frac{3}{2},f\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\left(\frac{3}{2},-4\right)$.

26. El valor, en miles de millones, de una empresa en función del tiempo *t*, viene dado por $f(t)=9-\left(t-2\right)^2, 0\le t\le 4,5$.

Deduce en qué valor de *t* la empresa alcanzó su máximo valor y en qué valor de *t* tuvo su valor mínimo.

Solución:

Derivamos e igualamos la derivada primera a cero: $f'(t)=-2\left(t-2\right)\Rightarrow f'(t)=0\Rightarrow t=2$;

$f''(t)=-2\Rightarrow f''(2)=-2<0\Rightarrow f$ tiene un máximo para $t=2$ y vale $f_{máx}=9$. No aparece mínimo relativo, así que el mínimo se encontrará en alguno de los extremos del intervalo en el que está definida la función: $f(0)=5$; $f(4,5)=2,75$.

La función alcanza dicho valor mínimo para $t=4,5$ y vale $f_{mín}=2,75$.

27. Una empresa ha estimado que los ingresos y los gastos anuales (en euros) que generan la fabricación y venta de *x* unidades de un determinado producto, vienen dados por las siguientes funciones:

$$\text{Ingresos: } I(x)=28x^2+36000x;\ \text{Gastos: } G(x)=44x^2+12000x+700000.$$

Determina, justificando las respuestas:

a) La función que define el beneficio anual.

b) El número de unidades que hay que vender para que el beneficio sea máximo.

c) El valor de dicho beneficio máximo.

Solución:

a) Evidentemente, *Beneficio* = *Ingresos* – *Gastos*, con lo que se obtiene: $B(x) = -16x^2 + 24000x - 700000$.

b) Hallamos el máximo relativo de $B(x)$: $B'(x)=-32x+24000\Rightarrow B'(x)=0\Rightarrow x=750\Rightarrow B''(x)=-32\Rightarrow$ $\Rightarrow B''(750)=-32<0\Rightarrow$ hay que vender 750 unidades para que el beneficio sea máximo.

c) $B_{max}=B(750)=-16\cdot 750^2+24000\cdot 750-700000=8300000$ €.

28. Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$. Calcula sus máximos y sus mínimos relativos, si los tiene.

Solución:

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-9\right)-2x\cdot x^2}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{-18x}{\left(x^2-9\right)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow -18x=0\Rightarrow x=0 \text{ punto crítico.}$$

$$f''(x)=\frac{-18\left(x^2-9\right)^2-(-18x)\cdot 2\left(x^2-9\right)\cdot 2x}{\left(x^2-9\right)^4}=\frac{\left(x^2-9\right)\left[-18\left(x^2-9\right)+18x\cdot 2\cdot 2x\right]}{\left(x^2-9\right)^4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{54x^2+162}{\left(x^2-9\right)^3}\Rightarrow f''(0)=\frac{162}{(-9)^3}=-\frac{2}{9}<0\Rightarrow$$

máximo para $x=0, f(0)=0$. La función sólo presenta un máximo en el origen de coordenadas O(0, 0).

29. De la función $f(x)=x^2+ax+b$ se sabe que tiene un mínimo en $x=2$ y que su gráfica pasa por el punto (2,2). ¿Cuánto vale la función en $x=-1$?

Solución:

Primero averiguamos el valor de los coeficientes *a* y *b* a partir de las condiciones que se dan y después el valor pedido:

Mínimo en $x=2, f'(2)=0\Rightarrow f'(x)=2x+a\Rightarrow f'(2)=4+a=0\Rightarrow a=-4$. La gráfica pasa por $(2,\ 2)\Rightarrow$

$f(2)=2^2-4\cdot 2+b=2\Rightarrow b=6\Rightarrow f(x)=x^2-4x+6$. Por lo tanto, $f(-1)=(-1)^2-4\cdot(-1)+6=11$.

30. Sea la función $f(x)=2x^2-\dfrac{1}{3}x^3$. Calcúlense:

a) Las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) El valor de *x* para el que es máxima la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f(x).*

Solución:

a) $f'(x)=4x-x^2\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x(4-x)=0\Rightarrow x=0,4\rightarrow f''(x)=4-2x\Rightarrow f''(0)=4>0\Rightarrow$ mínimo en

$(0,f(0))=(0,0)$. $f''(4)=-4<0\Rightarrow$ máximo en $(4,f(4))=\left(4,\ \dfrac{32}{3}\right)$.

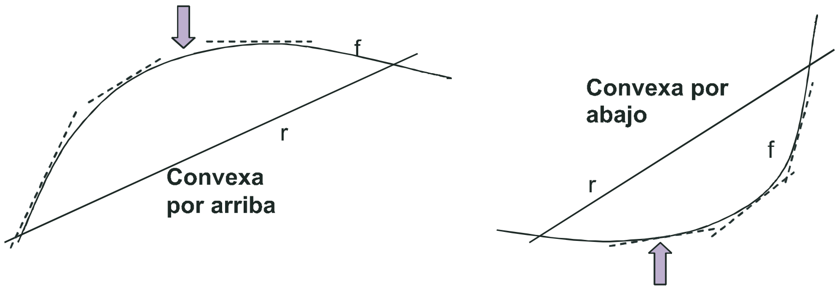
b) La pendiente de *f* en cualquier punto *x* viene dada por la función $y=4x-x^2$. Ahora tenemos que hallar los extremos relativos de esta nueva función:

$y'=4-2x\Rightarrow y'=0\Rightarrow x=2$; $y''=-2\Rightarrow y''(2)=-2<0\Rightarrow$ la pendiente es máxima para $x=2$ y vale 4.

4. Curvatura y puntos de inflexión

Una función presenta dos **curvaturas** diferentes, definidas a partir de una recta secante: si la función va por encima de la recta, decimos que es convexa por arriba, convexa o que tiene la forma ∩. Si va por debajo de la recta podemos decir que es convexa por abajo, cóncava o que tiene la forma ∪.

Tanto nombre se debe a que podemos mirar la función desde dos posiciones diferentes (arriba y abajo) y a que los comportamientos son complementarios (lo que desde una posición es convexo, por la otra será cóncavo y viceversa). Para evitar meternos en discusiones, calificamos uno u otro comportamiento con su representación gráfica ∩ ó ∪.



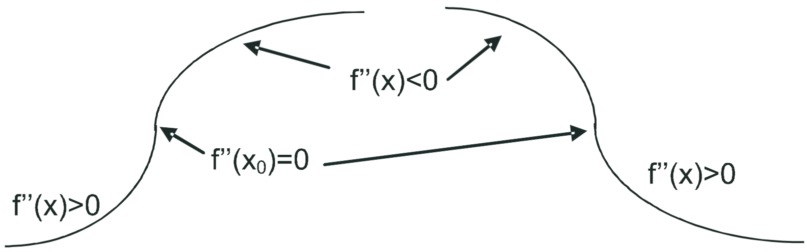
Como ocurre con el crecimiento, la definición no es demasiado práctica para los cálculos y tenemos que intentar encontrar algún otro procedimiento más cómodo. Observa que cuando la función es convexa por arriba, su función derivada decrece (líneas punteadas de la gráfica), por lo que su derivada segunda será negativa; cuando la función es convexa por abajo, la función derivada crece (líneas punteadas de la gráfica), por lo que la derivada segunda será positiva (observa que coincide con lo obtenido para los extremos relativos). Por lo tanto, estudiar la **curvatura de una función** consiste en estudiar el **signo de su derivada segunda**:

f es ∩ en aquellos intervalos en los que $f''(x) < 0$.

f es ∪ en aquellos intervalos en los que $f''(x) > 0$.

f tiene un punto de inflexión en aquellos puntos en los que $f''(x) = 0$.

Un **punto de inflexión** es aquel en el que la función cambia su curvatura de forma continua:



Ejemplos

31. Estudia la curvatura de la función $y = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$.

Solución:

Tenemos que calcular la derivada segunda, igualarla a cero y estudiar su signo.

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60 \,;\, f''(x) = 12x - 42 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}.$$

La función tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{7}{2},\ f\left(\frac{7}{2}\right)\right) = \left(\frac{7}{2},\ \frac{13}{2}\right)$.

	$(-\infty,\ ^7/_2)$	$(^7/_2,\ \infty)$
sgn $(12x - 42)$	–	+
f	∩	∪

32. Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)=\dfrac{3x^2-x}{x+2}$.

Solución:

$$f'(x)=\frac{3x^2+12x-2}{(x+2)^2};\ f''(x)=\frac{(6x+12)(x+2)^2-(3x^2+12x-2)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4}\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{(6x+12)(x+2)-2\cdot(3x^2+12x-2)}{(x+2)^3}=\frac{28}{(x+2)^3}\Rightarrow\begin{cases}NUM>0\\ DEN=0\Rightarrow x=-2\end{cases}$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,\infty)$
$\operatorname{sgn}\left(\dfrac{28}{(x+2)^3}\right)$	–	+
f	∩	∪

La función cambia de curvatura en $x=-2$, pero no tiene punto de inflexión pues no lo hace con continuidad ($f''(x)\neq 0$ y $\nexists f''(-2)$), sino en la asíntota vertical de la función.

Este comportamiento suelen tenerlo las fracciones algebraicas. Para obtenerlo hay que simplificar en la derivada segunda, sacando factor común en el numerador antes de operar. En caso contrario el denominador sería un binomio a la cuarta, siempre positivo, y el numerador se anularía, apareciendo un falso punto de inflexión. Podemos darnos cuenta del error porque la abscisa de este falso punto de inflexión coincide con la de la asíntota vertical, con lo que la derivada segunda en ese punto sería una indeterminación $^0/_0$, que se convierte en ∞ ó $-\infty$ al ser resuelta.

33. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

Solución:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2};\ f''(x)=\frac{2}{x^3}\Rightarrow\begin{cases}NUM>0\Rightarrow \text{no tiene puntos de inflexión}\\ DEN=0\Rightarrow x=0\end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0,\infty)$
$\operatorname{sgn}\dfrac{2}{x^3}$	–	+
f	∩	∪

La función cambia su curvatura en su asíntota vertical, por lo que no tiene punto de inflexión.

34. Estudia la curvatura de la función $f(x)=e^x\cdot(x^2+x-11)$.

Solución:

$$f'(x)=e^x\cdot(x^2+3x-10);\ f''(x)=e^x\cdot(x^2+5x-7)\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow x^2+5x-7=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-5-\sqrt{53}}{2}\cong-6{,}14;\ x_2=\frac{-5+\sqrt{53}}{2}\cong 1{,}14.\ \text{La función tiene dos puntos de inflexión:}$$

	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2,∞)
$sgn\,[e^x(x^2+5x-7)]$	+	–	+
f	∪	∩	∪

$$(x_1,\ f(x_1))=(-6{,}14,\ 0{,}044)\ \text{y}\ (x_2,\ f(x_2))=(1{,}14,\ -26{,}767).$$

35. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-4$.

Solución:

$$f'(x)=x^3+4x^2-x\,;f''(x)=3x^2+8x-1\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow x_1=\frac{-4-\sqrt{19}}{3}\cong -2{,}786\,;x_2=\frac{-4+\sqrt{19}}{3}\cong 0{,}120\Rightarrow$$

La función tiene dos puntos de inflexión:

$(x_1,f(x_1))=(-2{,}786,\ \ -21{,}656)\,;(x_2,f(x_2))=(0{,}120,\ -4{,}005)$.

	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2,∞)
sgn $(3x^2+8x-1)$	+	–	+
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

36. Estudia la curvatura de $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$.

Solución:

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x-4}{x^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{12-6x}{x^4}\Rightarrow\begin{cases}NUM=0\Rightarrow x=2\\ DEN>0 \text{ en } \Re-\{0\}\end{cases}$$

	$(-\infty,\ 2)-\{0\}$	$(2,\ \infty)$
$\text{sgn}\left(\frac{12-6x}{x^4}\right)$	+	–
f	$\cup$	$\cap$

La función tiene un punto de inflexión en $(2, f(2)) = (2,\ 0)$. En este caso, la asíntota vertical $x = 0$ no cambia la curvatura.

37. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x) = xe^{2x}$.

Solución:

$$f'(x)=(1+2x)e^{2x}\Rightarrow f''(x)=4(1+x)e^{2x}\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\ \infty)$
sgn $[4(1+x)\,e^{2x}]$	–	+
f	$\cap$	$\cup$

La función tiene un punto de inflexión en $(-1,f(-1))=\left(-1,-\frac{1}{e^2}\right)$.

Actividades

33. Estudia la curvatura y halla las coordenadas de los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y=2x^2-\frac{1}{3}x^3$; **b)** $y=(2x-3)^3$.

34 (a)
34 (b)
34. Halla los intervalos en los que las siguientes funciones son cóncavas y convexas, así como las coordenadas de sus puntos de inflexión, si los tienen: **a)** $y=\frac{x^2+1}{x}$; **b)** $y=\frac{x^2}{x^2-9}$.

35. Estudia la curvatura y averigua los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$$\textbf{a)}\ y=\frac{1}{x^2-3x+2};\quad \textbf{b)}\ y=(x+1)e^{-3x}.$$

36. Averigua en qué intervalos las siguientes funciones son cóncavas o convexas, así como sus puntos de inflexión:

$$\textbf{a)}\ y=\frac{2x^2-5}{x+8};\quad \textbf{b)}\ y=\frac{1-x^2}{(x+3)^2}.$$

37. Estudia la curvatura y averigua los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$$\textbf{a)}\ y=\ln(x^2+1);\quad \textbf{b)}\ y=(x^2+x)e^{x-1}.$$

38. Halla los intervalos en los que las siguientes funciones son cóncavas y convexas, así como las coordenadas de sus puntos de inflexión, si los tienen: **a)** $y=e^{-x^2}$; **b)** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

39. Averigua en qué intervalos las siguientes funciones son cóncavas o convexas, así como sus puntos de inflexión:

$$\textbf{a)}\ y=\frac{x}{x^2+2};\quad \textbf{b)}\ y=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}-x^2+5.$$

40. Para cada valor de a se considera la función $f(x)=\dfrac{3x^2-ax}{x+2}$. Se pide:

a) Calcular el valor de a para que f(x) tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

b) Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$ para el valor $a = 3$.

41. a) Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $f(x)=x^4-12x^3+48x^2-27$.

b) Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2-8x-15, \text{ si } x\le -3\\ 0, \text{ si } -3<x<1\\ \ln x, \text{ si } x\ge 1\end{cases}$

1) Dibuja la gráfica.

2) Obtén los valores x tales que $f(x) = 0$.

3) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

4) Determina la tangente a la curva en el punto de abscisa -6.

42. a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3-4x+2$ en su punto de inflexión.

b) La función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene un extremo relativo en $x = 1$.

Calcúlense a, b y c.

RECUERDA

- **Derivada de una función en un punto.** $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- **Función derivada de $f(x)$.** $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Función	Derivada
k (constante)	0
$x^n,\quad n\in\Re$	$n\cdot x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Álgebra de derivadas

$$(f\pm g)'=f'(x)\pm g'(x)$$
$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$
$$(k\cdot f)'(x)=k\cdot f'(x),\ k\ constante$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2},\quad g(x)\neq 0$$
$$\left(\frac{k}{f}\right)'(x)=-\frac{k\cdot f'(x)}{[f(x)]^2},\quad k\in\Re,$$
$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Función	Derivada
$(f(x))^n$	$n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x),\quad n\in\Re$
$e^{f(x)}$	$f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$\ln(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$\operatorname{sen}(f(x))$	$f'(x)\cdot\cos f(x)$
$\cos(f(x))$	$-f'(x)\cdot\operatorname{sen}(f(x))$
$\operatorname{tg}(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}=f'(x)\left(1+\operatorname{tg}^2(f(x))\right)$

- **Ecuación recta tangente:** $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$
- Una función f es **creciente** en el intervalo (a,b) si $f'(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$ y es **decreciente** cuando $f'(x)<0$ para todo $x\in(a,b)$.
- Una función f tiene un **punto crítico** en x_0 cuando $f'(x_0)=0$. Es un **máximo relativo** cuando $f''(x_0)<0$ y un **mínimo relativo** cuando $f''(x_0)>0$.
- Una función f es $\cup$ en (a,b) cuando $f''(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$ y es $\cap$ cuando $f''(x_0)<0$ para todo $x\in(a,b)$.
- Una función f tiene un **punto de inflexión** en x_0 cuando $f''(x)=0$.