EJERCICIOS DE FRACCIONES

Resolver las siguientes operaciones con fracciones, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $\frac{5}{4}-\frac{2}{4}=$

2. $\frac{5}{5}-\frac{4}{4}=$

3. $\frac{5}{5}-\frac{16}{4}=$

4. $-\frac{2}{3}-4=$

5. $\left(32+\frac{1}{2}-4\right)-\left(16-\frac{3}{2}-2\right)=$

6. $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}=$

7. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{5}=$

8. $1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=$

9. $\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}=$

10. $-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=$

11. $-2-\frac{1}{3}=$

12. $\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{5}=$

13. $-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}=$

14. $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{5}=$

15. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=$

16. $\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}=$

17. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{12}+\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{3}=$

18. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{12}+\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{3}=$

19. $-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}-\frac{2}{14}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}=$

20. $-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{7}-\frac{2}{14}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}=$

21. $\frac{21}{2}-\frac{19}{2}:\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{8}\right)-\frac{9}{2}:\frac{3}{4}=$

22. $\frac{17}{9}-\frac{15}{5}+\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{15}\right)+\frac{14}{3}:\frac{16}{8}=$

23. $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}:\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{9}+4\right)=$

24. $\frac{21}{2}-\frac{19}{2}:\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{8}\right)=$

25. $\frac{\left(\frac{3}{4}+2\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)}{5}-\frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}{4}=$

CURIOSIDAD MATEMÁTICA: *El matemático italiano Leonardo de Pisa (1ª mitad s. XIII), más conocido como* ***Fibonacci****, fue el primero en utilizar la notación actual para fracciones, es decir, dos números superpuestos con una barra horizontal entre medias.*

EJERCICIOS DE FRACCIONES II

Resolver las siguientes operaciones con fracciones, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $\frac{2}{3}+\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\right]=$

2. $\frac{4}{5}-\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{5}\left(2+\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{3}+4:\frac{6}{5}=$

3. $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{10}\right)-\frac{5}{4}+\left(\frac{3}{5}:4\right)+\frac{12}{5}=$

4. $2+\frac{1}{5}:\left(2+\frac{7}{3}-\frac{2}{4}+\frac{5}{3}\right)=$

5. $\left(\frac{2}{7}-\frac{4}{5}+\frac{2}{8}\right)\cdot\frac{3}{2}-\frac{7}{5}:\frac{4}{7}=$

6. $\frac{17}{9}-\frac{15}{5}+\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{15}\right)+\frac{14}{3}:\frac{16}{8}=$

7. $\frac{21}{5}+\frac{15}{4}\cdot\frac{16}{3}-\frac{15}{30}+\frac{12}{4}:\frac{5}{4}+3=$

8. $\frac{2}{3}-\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{5}-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{2}\right)\right]-\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=$

9. $2-\left[\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\right]-\left(\frac{4}{3}+2\right)-\frac{1}{5}=$

10. $2+\left(\frac{5}{2}-3\right)-\left[\frac{7}{10}-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)\right]=$

11. $-\frac{3}{8}+\left(4-\frac{1}{2}\right)-\left[\left(2-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{8}\right)\right]=$

12. $\left(\frac{4}{3}-\frac{-1}{9}\right)+\left[2-\left(-\frac{5}{4}+\frac{2}{3}\right)\right]-\frac{7}{2}=$

13. $\left[\left(\frac{4}{6}+\frac{1/7}{2}\right):\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{12}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\right)=$

14. $\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot 3-\frac{1+2/5}{3}\right]=$

15. $\frac{4}{5}:\left[\frac{12}{16}\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{8}\right]-3\left[\frac{1}{6}:\left(1-\frac{2}{5}\right)\right]=$

16. $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}:\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{8}+1\right)=$

EJERCICIOS DE FRACCIONES

Resolver las siguientes fracciones de términos racionales, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $$\frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=$$

2. $$\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}}=$$

3. $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right):\frac{1}{6}}=$$

4. $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}:\frac{2}{3}-4}{\left(3+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{3}}=$$

5. $$\frac{\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(4-\frac{2}{3}\right)}{1+\frac{5}{4}:\frac{3}{12}}=$$

6. $$\frac{1+\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}{1-\frac{1-\frac{1}{3}}{3}}=$$

7. $$\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}-3}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+3}=$$

8. $$\frac{\left(\frac{2}{5}:3+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{7}}{\frac{2}{5}\cdot 3-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{7}}=$$

9. $$\frac{\frac{3}{5}:\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}\right)+3}{\left[\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{2}\right]:\frac{1}{2}}=$$

10. $$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{2}:\frac{1}{4}+5}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{2}:\frac{1}{4}+5\right)}=$$

11. $$\frac{\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{3}+2\right)\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}:\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{3}}=$$

12. $$\frac{\frac{2}{5}-\frac{6}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{5}-\frac{6}{4}}-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{6}{5}}=$$

13. $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{2+\frac{5}{2}-\frac{1}{6}}\cdot\frac{2}{1-\frac{3}{2-\frac{1}{4}}}=$$

14. $$\frac{\frac{5}{3}+\frac{3}{4}:1-\frac{5}{4}+\frac{17}{3}}{\frac{15}{3}+\frac{2}{5}}=$$

15. $$\frac{\left[-3+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{27}\right)\right]:\frac{3}{2}}{\left(\frac{2}{5}-3:\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{8}{27}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)}=$$

16. $$\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}}{2+\frac{1}{3}\cdot\left(2-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)}=$$

17. $$\frac{\frac{5}{3}-\left[\frac{2}{3}:\frac{2}{5}-\left(3+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\frac{3}{11}}{\frac{14}{3}-\frac{13}{3}:\left(\frac{2}{5}-3\right)+\frac{1}{2}}=$$

EJERCICIOS DE FRACCIONES

Resolver las siguientes fracciones de términos racionales, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $$\frac{\frac{1}{3}:\left(2+\frac{2}{5}\cdot\frac{25}{8}\right)}{\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}:2\right)\cdot\frac{25}{8}}=$$

2. $$\frac{\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\;\frac{25}{6}-2:\frac{4}{9}}{\frac{4}{9}\left(\frac{1}{5}-2\right)-\frac{1}{3}}=$$

3. $$\frac{2-\frac{5}{3}:\left(1+\frac{1}{5}\right)-2}{2:\frac{5}{3}+1-\frac{1}{5}:2}=$$

4. $$\frac{\frac{3}{5}:\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}:\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{9}\right)}{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}:\frac{2}{5}\;\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}+\frac{10}{9}\right)}=$$

5. $$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=$$

6. $$\frac{\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right]\frac{2}{5}-3}{\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}:\frac{1}{3}\ \frac{2}{5}-3}=$$

7. $$3+\cfrac{2}{3+\cfrac{2}{3+\cfrac{2}{3}}}=$$

8. $$\frac{\frac{1}{2}\ \frac{8}{3}+\frac{3}{5}:\frac{9}{25}-1}{\frac{1}{2}\quad\frac{8}{3}+\frac{\ }{\ }\quad:\frac{\ }{25}+1}=$$

9. $$\frac{\frac{3}{5}:3-2\frac{3}{8}+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\right)-3}=$$

10. $$\frac{\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ \frac{8}{27}\right)\frac{2}{5}-3\right]:\frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\frac{8}{27}\left(\frac{2}{5}-3:\frac{3}{2}\right)}=$$

11. $$1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{6}{7}}}=$$

12. $$\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}-3\right)+\frac{29}{6}:5}{1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5}}:\left(2-\frac{28}{19}\right)}=$$

13. $$\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{15}{8}\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{10}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\frac{12}{5}\right)}=$$

14. $$\frac{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\left(2-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right):\frac{2}{5}-\frac{1}{5}}{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}:2-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}:\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{5}}=$$

15. $$\frac{\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{6}+\frac{2}{24}\right)-\left(\frac{2}{30}-\frac{1}{4}+\frac{3}{9}\right)}{\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{10}\right):\frac{5}{3}-\frac{4}{16}\left(3-\frac{5}{3}\right)}=$$

16. $$\frac{\left(\frac{1}{5}+2-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{5}+\frac{3}{2}}{\frac{1}{5}+\left(2-\frac{1}{3}:\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{3}{2}}=$$

17. $$\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}+3:\frac{6}{5}\right)-\frac{7}{20}}{\left(3+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{10}\right):\frac{6}{5}-\frac{4}{5}}=$$

18. $$\frac{\left(\frac{2}{3}+-4+\frac{1}{5}\right):\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}-\left(4+\frac{1}{5}:\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}}=$$

POTENCIAS EJERCICIOS

RECORDAR:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^0 = 1$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	

También es importante saber que:

$1^{\text{algo}} = 1$	$(\text{base negativa})^{\text{par}} = +$
$(-1)^{\text{par}} = 1$	$(\text{base negativa})^{\text{impar}} = -$
$(-1)^{\text{impar}} = -1$	

(Añade estas fórmulas al formulario que realizarás a lo largo del curso)

1. Calcular las siguientes potencias de exponente natural (**sin usar calculadora**):

$(-2)^5 =$ $(-1)^{21} =$ $13^0 =$ $(-2)^2 =$ $1^{21} =$ $(-3)^4 =$ $-3^4 =$

$(-2)^3 =$ $-2^3 =$ $9^2 =$ $(-9)^2 =$ $9^3 =$ $(-9)^3 =$ $1^9 =$

$1^{4569} =$ $(-1)^{10} =$ $(-1)^{523} =$ $1^0 =$ $235^0 =$ $(-1)^0 =$ $(0{,}75)^0 =$

2. Calcular las siguientes potencias de exponente entero (**sin usar calculadora**), dejando el **resultado en forma entera o fraccionaria**:

$2^{-1} =$ $2^{-2} =$ $2^{-3} =$ $3^{-1} =$ $3^{-2} =$ $3^{-3} =$

$1^{-4} =$ $1^{-7} =$ $1^{-10} =$ $(-1)^{-4} =$ $(-1)^{-7} =$ $(-1)^{-10} =$

3. Calcular las siguientes potencias de base fraccionaria, dejando el **resultado en forma fraccionaria**:

$\left(\frac{5}{3}\right)^{3}=$	$\left(\frac{9}{4}\right)^{2}=$	$\left(-\frac{1}{5}\right)^{2}=$	$\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}=$	$\left(\frac{9}{4}\right)^{-2}=$
$\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2}=$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}=$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}=$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}=$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}=$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}=$
$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=$	$\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}=$	$\left(\frac{4}{7}\right)^{3}=$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=$
$\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}=$	$\left(-\frac{5}{2}\right)^{-2}=$	$\left(-\frac{7}{2}\right)^{3}=$	$\left(-\frac{9}{2}\right)^{-3}=$	$0{,}1^{-1}=$

4. Pasar a forma de potencia **de base entera lo más simple posible**:

$8=$	$32=$	$81=$	$125=$	$343=$	$\frac{1}{3}=$	$\frac{1}{4}=$
$\frac{1}{5}=$	$\frac{1}{10}=$	$\frac{1}{14}=$	$\frac{1}{64}=$	$100=$	$10.000=$	$1.000.000=$
$\frac{1}{100}=$	$\frac{1}{10.000}=$	$\frac{1}{1.000.000}=$	$0{,}1=$	$0{,}01=$	$0{,}001=$	

1 millón =	1 billón =	1 trillón =	1 milésima =
1 millonésima =	1 cienmilésima =	$\frac{1}{1024}=$	$\frac{1}{125}=$

5. Pasar a potencia única de base racional, y **simplificar el resultado**:

$7^{2}\cdot 6^{2}=$	$7^{3}\cdot 6^{3}=$	$(-7)^{2}\cdot 6^{2}=$	$(-7)^{3}\cdot 6^{3}=$	$7^{2}\cdot(-6)^{2}=$
$(-7)^{3}\cdot(-6)^{3}=$	$\frac{7^{2}}{6^{2}}=$	$\frac{7^{3}}{6^{3}}=$	$\frac{(-7)^{2}}{6^{2}}=$	$\frac{7^{3}}{(-6)^{3}}=$
$\frac{(-7)^{2}}{(-6)^{2}}=$	$7^{-2}\cdot 7^{3}=$	$6^{-2}\cdot 6^{-5}=$	$9^{0}\cdot 9^{3}=$	$10^{20}\cdot 10^{4}=$
$10^{-20}\cdot 10^{4}=$	$10^{-20}\cdot 10^{-4}=$	$\frac{7^{-2}}{7^{3}}=$	$\frac{6^{-2}}{6^{-5}}=$	$\frac{9^{0}}{9^{3}}=$
$\frac{10^{20}}{10^{4}}=$	$\frac{10^{-20}}{10^{4}}=$	$\left(7^{-2}\right)^{3}=$	$\left(6^{-2}\right)^{-5}=$	$\left(9^{0}\right)^{3}=$

$\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}=$	$\left(\frac{7}{4}\right)^{2}\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^{5}\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^{6}=$	$\left(\frac{7}{10}\right)^{-6}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{2}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{-3}=$

$\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{6}}{\left(\frac{5}{2}\right)^{4}}=$	$\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}}{\left(\frac{5}{4}\right)^{2}}=$	$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}=$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}=$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{7}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}=$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}=$	$3^{3}\cdot 3^{3}=$	$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}}=$

6. Calcular y **simplificar**:

a) $-5^4 =$

b) $(-5)^4 =$

c) $-3^3 =$

d) $(-3)^3 =$

e) $-\left(\frac{1}{2}\right)^6 =$

f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6 =$

g) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 =$

h) $-\left(\frac{1}{3}\right)^3 =$

i) $2^2 - 3^2 =$

j) $2^2\left(-3^2\right) =$

k) $(-3)^{-3} =$

l) $(-3)^{-4} =$

m) $-3^{-4} =$

n) $\left(2^3\right)^{-2} =$

o) $\left(2^{-3}\right)^{-2} =$

p) $\left(-2^3\right)^{-2} =$

q) $\left[(-2)^3\right]^{-2} =$

r) $\left[(-2)^{-3}\right]^{-2} =$

s) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^3 =$

t) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]^2 =$

u) $\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} =$

v) $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}\right]^3 =$

w) $\left[\left(\frac{2}{9}\right)^2\right]^{-1} =$

7. Calcular, **aplicando las propiedades de las potencias, y simplificando en todo momento**:

a) $\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\right)^5 =$

b) $\left[\left(-\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{8}\cdot(-2)\right]^{-4} =$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-5} =$

d) $\left[\frac{15}{7}\cdot\left(\frac{21}{5}\right)^2\cdot(-1)\cdot\frac{2}{3}\right]^3 =$

e) $$\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^5}{\left(\frac{2}{7}\right)^4}=$$

f) $a^2\cdot a^{-2}\cdot a^3=$

g) $$\frac{\left(2^{-5}\right)^0}{2^{-3}}=$$

h) $$\frac{2^3}{(5\cdot 2)^{-5}}=$$

i) $$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^3\right]^{-4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}=$$

j) $$\frac{2^{-3}\cdot(-2)^4\cdot(-4)^{-1}}{-2}=$$

k) $$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{2^{-1}}=$$

l) $$\frac{12^5}{18^4}=$$

m) $\left(8\cdot 4^{-2}\right)^3=$

n) $$3^2\cdot 9^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot 27^{-2}=$$

o) $$\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3}{\left(\frac{25}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot 2^{-7}}=$$

p) $$\left(\frac{6}{5}\right)^6\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)^{-4}=$$

q) $$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right]^{-3}}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-8}\right]^{-2}}=$$

r) $$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-5}:\left(\frac{1}{5}\right)^{-9}}{\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-10}:\frac{1}{5}}=$$

s) $$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=$$

8. Idem:

a) $\dfrac{2^7 \cdot 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^0}{2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^6} =$

b) $\dfrac{2^3 \cdot 2^4 \cdot 5^3 \cdot 5^{-1}}{2^{-1} \cdot 2^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^{-3}} =$

c) $\dfrac{3^{-2} \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 7^{-4} \cdot 3^5}{7^3 \cdot 3^{-1} \cdot 7^{-5} \cdot 3^4} =$

d) $\dfrac{3^8 \cdot 7^{-1} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 3^{-2}}{7^4 \cdot 5^{-1} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^{-2}} =$

e) $\dfrac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 2^6 \cdot 2 \cdot 8^{30}}{16 \cdot 2^3 \cdot 32 \cdot 2^4} =$

f) $\dfrac{15^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 45^2}{25 \cdot 5^3 \cdot 125 \cdot 27} =$

g) $\dfrac{6 \cdot 12^3 \cdot 18^2 \cdot 3^2 \cdot 108^2}{27^2 \cdot 3^2 \cdot 16 \cdot 48 \cdot 36} =$

h) $\dfrac{2^2 \cdot \left(2^3 : 2^4\right)^{-5} : 2^{-3}}{2^3 \cdot \left(2^{-2}\right)^{-3}} =$

i) $\dfrac{15^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^3 \cdot 45^2}{\left(5^3\right)^2 \cdot 27 \cdot 3^{-2}} =$

j) $\dfrac{2^{-1} \cdot (2^3)^5 \cdot 4 \cdot 5^3}{100 \cdot 2^{-2} \cdot 8} =$

k) $\dfrac{3^2 : \left(2 : 3^3\right)^2}{2 : \left(3 \cdot 2^2\right)^{-2}} =$

l) $\dfrac{2^3 \cdot 8^{-3} \cdot 12^{-1} \cdot (-3)^2}{6^2 \cdot 16^{-2} \cdot 3^{-3}} =$

m) $\dfrac{6^4 \cdot 9^2 \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-5} \cdot 2^{-1}}{18^3 \cdot 2^{-5} \cdot 3^6 \cdot \left(3^3\right)^{-3}} =$

n) $\dfrac{\left(3^2\right)^3 \cdot 3^{-2} \cdot \left(2^{-2}\right)^3 \cdot \left(2^2\right)^{-3}}{18 \cdot \left(3^{-1}\right)^{-2} \cdot 2^{-7} \cdot \left(2^2\right)^{-3}} =$

o) $\dfrac{\left(6a^{-3}b^{2}\right)^{-3}}{(2ab)^{-4}} =$

p) $\dfrac{4^{3}\cdot\left(3^{-2}\right)^{-3}\cdot 27^{-3}\cdot 32^{2}\cdot\left(36^{2}\right)^{-2}}{8^{2}\cdot\left(2^{6}\right)^{2}\cdot\left(9^{-3}\right)^{5}\cdot 24^{-3}\cdot\left[\left(3^{-2}\right)^{2}\right]^{-5}} =$

q) $\dfrac{\left(-x^{2}y\right)^{5}\left(-y^{4}\right)^{-3}}{(-y)^{2}(-x)^{3}(-y)^{6}} =$

r) $\dfrac{2^{3}\cdot(3^{-2})^{-3}\cdot(-8)^{-2}\cdot(6^{2})^{-4}}{[(-9)^{-2})]^{3}\cdot 16^{-1}\cdot 4^{-3}\cdot[(-3)^{-2}]^{-3}} =$

s) $\left[\dfrac{\left(10x^{-3}yz\right)^{-4}}{\left(5xy^{-2}z\right)^{-4}}\right]^{-2} =$

t) $\dfrac{(-3)^{-3}\cdot 15^{-1}\cdot(-25^{-2})^{-2}\cdot 5^{-3}}{[(-45)^{-2}]^{2}\cdot 9^{2}\cdot(-5)^{4}} =$

9. Calcular el valor de las siguientes expresiones, aplicando en todo momento las propiedades de las potencias (¡no vale calcular el valor de las potencias de exponente elevado!). En la mayor parte de los casos, bastará con <u>sacar como factor común la mayor potencia posible</u>. Fíjate en el 1er ejemplo:

a) $\dfrac{2\cdot 3^{18}}{3^{20}-3^{18}} = \dfrac{2\cdot 3^{18}}{3^{18}(3^{2}-1)} = \dfrac{2\cdot 3^{18}}{3^{18}(9-1)} = \dfrac{2\cdot\cancel{3^{18}}}{\cancel{3^{18}}\cdot 8} = \dfrac{2}{8} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

b) $\dfrac{2^{15}}{2^{16}-2^{15}} =$

c) $\dfrac{7\cdot 2^{30}}{2^{32}+2^{31}+2^{30}} =$

d) $\dfrac{2^{9}}{2^{9}+2^{9}} =$

e) $\dfrac{2^{6}-2^{5}}{3\cdot 2^{5}} =$

f) $\dfrac{2^{22}}{2^{20}+4^{10}}=$

g) $\dfrac{27^{10}}{3^{31}-9^{15}}=$

10. Calcular, **aplicando las propiedades de las potencias, y simplificando en todo momento**:

a) $\dfrac{4^4\cdot 8^{-1}\cdot 16^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot 8^6}=$

b) $\dfrac{(-3)^2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2\cdot\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^0\right]^{-2}}{(-3)^5\cdot 3^{-2}\cdot(-3)^{-3}\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3\right]^{-1}}=$

c) $\dfrac{\left(-\dfrac{5}{4}\right)^3\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}\left[\left(\dfrac{2}{25}\right)^{-2}\right]^2}{\left(\dfrac{4}{5}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)^{-1}\cdot(-25)^{-2}\cdot\left\{\left[\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-3}\right]^2\right\}^{-3}}=$

d) $\dfrac{\dfrac{3^3\cdot 5^2}{2^{-1}}}{\dfrac{3^2\cdot 5}{2^{-2}}}\cdot\dfrac{2^2}{3\cdot 5}=$

e) $\dfrac{3^3\cdot\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right]^3\cdot(-2)^3}{3^{-1}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-4}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-1}\cdot 12}=$

f) $$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\cdot\left(-\frac{9}{8}\right)^{-2}\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^{-3}\cdot\left[\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}\right]^{0}}{\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}\right]^{2}\cdot\left(-\frac{16}{27}\right)^{-1}\cdot 18^{2}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}\right]^{-2}}=$$

g) $$\frac{\dfrac{\left(5^{2}\cdot 5^{3}\cdot 5^{-4}\right)^{2}}{\left(5^{-2}\cdot 5^{-3}\cdot 5^{4}\right)^{3}}}{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{2}:\left(\frac{1}{5}\right)^{4}\right]^{4}}=$$

h) $$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}{\left(\frac{5}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\cdot 8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\cdot 3^{-2}}=$$

i) $$\left(\frac{4^{2}}{3^{5}}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2^{-2}\cdot 3^{2}}{3^{-3}\cdot 2^{2}}\right)^{6}\cdot\left(\frac{5^{3}}{4^{3}}\right)^{4}\cdot\left(\frac{4^{2}}{5^{4}\cdot 3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2^{10}}{5^{2}}\right)^{2}=$$

j) $$\frac{\left[\left(\frac{5}{7}\right)^{3}\right]^{-2}\cdot 5^{3}}{\left(\frac{25}{49}\right)^{-3}\cdot 7^{-2}\cdot 35\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}=$$

k) $$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot 3^{-2}\cdot(-3)^{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(-2)^{5}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}}=$$

l) $$\frac{2^2\cdot(-2)^3\cdot4^{-2}\cdot(-2)^{-5}\cdot8^0}{9^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5}}=$$

m) $$\frac{6^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot12}{\left(\frac{5}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\cdot27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}=$$

n) $$\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot(-3)^2\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2\cdot\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^0\right]^{-2}}{(-3)^5\cdot3^{-2}\cdot(-3)^{-3}\cdot\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^{-1}}=$$

o) $$\frac{2^3\cdot(-3)^{-5}\cdot18^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}{(-2)^2\cdot2^{-3}\cdot(-3)^3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}}=$$

p) $$\left[\left(\frac{4^2\cdot3^{-5}}{3^2}\right)^3\cdot\left(\frac{2^{-2}\cdot3^2}{3^{-3}\cdot2^2}\right)^6\cdot\left(\frac{4^{-3}}{5^{-3}}\right)^6\cdot\left(\frac{4}{3\cdot4}\right)^3\cdot\left(\frac{7\cdot5^{-2}}{5\cdot7^{-3}}\right)^2\cdot\left(\frac{2^5}{5^2\cdot2^{-5}}\right)^2\right]^3=$$

11. OPERACIONES MIXTAS: Calcular, **aplicando, siempre que sea posible, las propiedades de las potencias,** y simplificando en todo momento. **Cuando no sea ya posible aplicar las propiedades de las potencias, debido a la existencia de una suma o resta, pasar la potencia a número y operar**:

a) $$\frac{\left(2^0\cdot2^{-1}\cdot2^3\right)^3}{\left[\frac{(1/3)^{-2}}{3}+1\right]^3}=$$

CONSECUENCIA: Hay que aplicar las propiedades de las potencias siempre que se pueda; cuando ello no sea posible (normalmente porque hay sumas y/o restas) se pasa la potencia a número y se opera.

b) $$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left[(-2)^{3}\right]^{2}+(-3)^{3}\cdot(-3)^{2}}=$$

c) $$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}{\left[(-2)^{3}+2^{-3}\right]\cdot 63^{-1}}=$$

d) $$\frac{\dfrac{\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}\left(\frac{5}{2^{3}}\right)^{-1}}{\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}}+(-4)^{-3}}{1+\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}{4^{-3}}}=$$

e) $$\frac{\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{3}\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}}{\left[(-2)^{3}\right]^{2}+(-5)^{3}\cdot 2^{3}}=$$

f) $$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]^{2}-\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left[\left(\frac{4}{9}\right)^{2}\right]^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}\frac{1}{3^{4}}\ 2^{-1}}=$$

g) $$\frac{\left[\dfrac{3}{(1/3)^{-2}}\right]^{-2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}+3^{-1}}{\left[\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-3}\cdot 25-\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-1}\right]:\dfrac{5}{3}}=$$

h) $$\frac{\left[\dfrac{(2/3)^{-2}}{(1/3)^{-1}}+4^{-1}\right]^{-2}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2}+\dfrac{7}{16}}{\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}+3^{-3}\right]^{2}+2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}}=$$

i) $$\left\{\frac{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{2}\cdot(-3)^{2}\cdot\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\right]^{2}}{2\cdot 3^{6}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-6}}\right\}^{10}=$$

j) $$\frac{(-3)^{-2}\cdot 2^{-3}\cdot\left(\dfrac{1}{72}\right)^{-1}}{(-3)^{3}-\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{2}}=$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA:

12. Escribir en notación científica los siguientes números:

a) 300.000.000	**f)** 0,000001	**k)** 14 millones €	**p)** 10
b) 456	**g)** -78986,34	**l)** 150 millardos $	**q)** 1
c) 0,5	**h)** 0,0000093	**l)** 7,3	**r)** 0,011001
d) 0,0000000065	**i)** 93 mil moléculas	**n)** 73 billones kg	**s)** 16.730.000
e) 18.400.000.000	**j)** 1.230.000.000.000	**o)** 0,00010001	**t)** -345,45

(NOTA: Un millardo son mil millones, un billón son mil millardos, es decir, un millón de millones, etc...)

13. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas (y comprobar que se obtiene el mismo resultado):

- Sin calculadora, aplicando sólo las propiedades de las potencias.
- Utilizando la calculadora científica.

a) $2{,}5\cdot10^{7}+3{,}6\cdot10^{7}=$

b) $4{,}6\cdot10^{-8}+5{,}4\cdot10^{-8}=$

c) $1{,}5\cdot10^{6}+2{,}4\cdot10^{5}=$

d) $2{,}3\cdot10^{9}+3{,}25\cdot10^{12}=$

e) $3{,}2\cdot10^{8}-1{,}1\cdot10^{8}=$

f) $4{,}25\cdot10^{7}-2{,}14\cdot10^{5}=$

g) $7{,}28\cdot10^{-3}-5{,}12\cdot10^{-3}=$

h) $(2\cdot10^{9})\cdot(3{,}5\cdot10^{7})=$

i) $\dfrac{8{,}4\cdot10^{9}}{2\cdot10^{7}}=$

j) $\dfrac{(3{,}2\cdot10^{-3})\cdot(4\cdot10^{5})}{2\cdot10^{-8}}=$

k) $(2\cdot10^{5})^{2}=$

l) $(1{,}4\cdot10^{15}+2{,}13\cdot10^{18})\cdot2\cdot10^{-5}=$

m) $2{,}23\cdot10^{-3}+3\cdot10^{-4}-5\cdot10^{-5}=$

n) $(0{,}55\cdot10^{23}-5\cdot10^{21})\cdot2\cdot10^{-13}$

14. La estrella más cercana a nuestro sistema solar es α-Centauri, que está a una distancia de tan sólo 4,3 años luz. Expresar, en km, esta distancia en notación científica. (Dato: velocidad de la luz: 300.000 km/s) ¿Cuánto tardaría en llegar una nave espacial viajando a 10 Km/s?

15. Calcular el volumen aproximado (en m^3) de la Tierra, tomando como valor medio de su radio 6378 km, dando el resultado en notación científica con dos cifras decimales. $\left(\text{Volumen de la esfera}: \frac{4}{3} - r^3\right)$

16. Un glóbulo rojo tiene forma de cilindro, con un diámetro de unas 7 millonésimas de m y unas 2 millonésimas de altura. Hallar su volumen en notación científica.

17. En una balanza de precisión pesamos cien granos de arroz, obteniendo un valor de 0,0000277 kg. ¿Cuántos granos hay en 1000 ton de arroz? Utilícese notación científica.

18. La luz del sol tarda 8 minutos y 20 segundos en llegar a la Tierra. Calcular la distancia Tierra-Sol

19. Rellenar la siguiente tabla para una calculadora de 10 dígitos en notación entera y 10+2 dígitos en notación científica:

	SIN NOTACIÓN CIENTÍFICA	**CON NOTACIÓN CIENTÍFICA**
Nº MÁXIMO que puede representar		
Nº MÍNIMO (positivo) que puede representar		

EJERCICIOS DE RAÍCES	**4º ESO**

RECORDAR:

- Definición de raíz n-ésima: $\sqrt[n]{a}=x \Leftrightarrow x^n=a$
- Equivalencia con una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{x^m}=x^{m/n}$
- Simplificación de radicales/índice común: $\sqrt[n\cdot p]{x^{m\cdot p}}=\sqrt[n]{x^m}$
- Propiedades de las raíces: $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

  $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

  $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$
- Introducir/extraer factores: $x\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{x^n\cdot a}$

1. Calcular mentalmente, **<u>sin usar calculadora</u>**:

$\sqrt{9}=$ $\quad\sqrt{25}=$ $\quad\sqrt{49}=$ $\quad\sqrt{100}=$ $\quad\sqrt{1}=$

$\sqrt{0}=$ $\quad\sqrt{\dfrac{1}{4}}=$ $\quad\sqrt{\dfrac{1}{9}}=$ $\quad\sqrt{\dfrac{4}{25}}=$ $\quad\sqrt{\dfrac{16}{100}}=$

$\sqrt{0{,}25}=$ $\quad\sqrt{0{,}09}=$ $\quad\sqrt{0{,}0081}=$ $\quad\sqrt{0{,}49}=$ $\quad\sqrt{7^6}=$

$\sqrt{5^{24}}=$ $\quad\sqrt{2^{10}}=$ $\quad\sqrt{9^{-10}}=$

2. Calcular mentalmente, **<u>sin usar calculadora</u>**:

$\sqrt[3]{8}=$ $\quad\sqrt[3]{27}=$ $\quad\sqrt[3]{64}=$ $\quad\sqrt[3]{1331}=$

$\sqrt[3]{-1}=$ $\quad\sqrt[3]{-8}$ $\quad\sqrt[3]{-27}=$ $\quad\sqrt[3]{-1000}=$

$\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=$ $\quad\sqrt[3]{\dfrac{1}{125}}=$ $\quad\sqrt[3]{-\dfrac{64}{125}}=$ $\quad\sqrt[3]{\dfrac{64}{1000}}=$

$\sqrt[3]{0{,}125}=$ $\quad\sqrt[3]{0{,}027}=$ $\quad\sqrt[3]{0{,}001}=$ $\quad\sqrt[3]{-0{,}216}=$

3. Calcular, aplicando la definición de raíz (**<u>no vale con calculadora</u>**):

a) $\sqrt[3]{-8}=-2$ pq $(-2)^3=\boxed{-8}$ **b)** $\sqrt{-8}=$ **c)** $\sqrt[6]{-1}=$ **d)** $\sqrt[5]{-32}=$

e) $\sqrt[4]{81}=$ **f)** $\sqrt{5^2}=$ **g)** $\sqrt[6]{2^6}=$ **h)** $\sqrt{\dfrac{625}{81}}=$

i) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}=$ **j)** $\sqrt[4]{-\dfrac{81}{16}}=$ **k)** $\sqrt[5]{3^{15}}=$ **l)** $\sqrt[3]{0{,}064}=$

m) $\sqrt{0{,}\widehat{1}}=$ **n)** $\sqrt{2{,}25}=$ **o)** $\sqrt{2{,}\widehat{7}}=$

4. Hallar el valor de **k** en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 2$

b) $\sqrt[k]{-243} = -3$

c) $\sqrt[5]{k} = \dfrac{2}{3}$

d) $\sqrt[k]{1{,}331} = 1{,}1$

POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO:

5. Utilizar la calculadora para hallar, con tres cifras decimales bien aproximadas:

a) $\sqrt[4]{8} \cong \boxed{1{,}682}$ **b)** $\sqrt[5]{9}$ **c)** $\sqrt[6]{25}$ **d)** $\sqrt[3]{10}$

e) $\sqrt[5]{-15}$ **f)** $\sqrt[6]{-40}$ **g)** $\sqrt[4]{2^3}$ **h)** $\sqrt[5]{3^2}$

i) $\sqrt[6]{5^2}$ **j)** $\sqrt[8]{256}$ **k)** $\sqrt[3]{64}$

6. Hallar $\sqrt[3]{3}$ con cuatro cifras decimales bien aproximadas, razonando el error cometido.

7. Pasar a forma de raíz las siguientes potencias, y a continuación calcular (**no vale utilizar la calculadora**):

a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = \boxed{2}$ **b)** $125^{1/3}$ **c)** $625^{1/4}$

d) $8^{2/3}$ **e)** $64^{5/6}$ **f)** $81^{3/4}$

g) $8^{-2/3}$ **h)** $27^{-1/3}$

RADICALES EQUIVALENTES. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES:

8. Simplificar los siguientes radicales, y comprobar el resultado con la calculadora cuando proceda:

a) $\sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4/2]{3^{2/2}} = \boxed{\sqrt{3}}$ **b)** $\sqrt[8]{5^4}$ **c)** $\sqrt[9]{27}$ **d)** $\sqrt[5]{1024}$

e) $\sqrt[6]{8}$ **f)** $\sqrt[9]{64}$ **g)** $\sqrt[8]{81}$ **h)** $\sqrt[12]{x^9}$

i) $\sqrt[12]{x^8}$ **j)** $\sqrt[5]{x^{10}}$ **k)** $\sqrt[6]{a^2b^4}$ **l)** $\sqrt[10]{a^4b^6}$

m) $\sqrt[6]{5^3}$ **n)** $\sqrt[15]{2^{12}}$ **o)** $\sqrt[10]{a^8}$ **p)** $\sqrt[12]{x^4y^8z^4}$

q) $\sqrt[8]{\left(x^2y^2\right)^2}$

9. Decir si los siguientes radicales son equivalentes (y comprobar después con la calculadora):

a) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{25}$, $\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[8]{625}$

b) $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{243}$

c) $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[8]{16}$

10. Reducir los siguientes radicales a índice común y ordenarlos de menor a mayor (y comprobar el resultado con la calculadora):

a) $\sqrt{5}$, $\sqrt[5]{2^3}$, $\sqrt[15]{7^2}$

b) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[5]{7^3}$, $\sqrt[15]{3^2}$

c) $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{16}$, $\sqrt[15]{9}$

d) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[5]{27}$

e) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[6]{6}$

f) $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[4]{125}$, $\sqrt[6]{243}$

g) $\sqrt[4]{31}$ y $\sqrt[3]{13}$

h) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[9]{132650}$

i) $\sqrt[3]{-10}$ y $\sqrt[4]{8}$

OPERACIONES CON RADICALES:

11. Multiplicar los siguientes radicales de igual índice, y simplificar cuando sea posible:

a) $\sqrt{2}\,\sqrt{32}=\sqrt{64}=\boxed{8}$

b) $\sqrt{2}\,\sqrt{15}$

c) $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{9}$

d) $\sqrt{2}\,\sqrt{8}$

e) $\sqrt{3}\,\sqrt{4}$

f) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{5}$

g) $\sqrt{12}\,\sqrt{6}\,\sqrt{50}$

h) $\sqrt{21}\,\sqrt{7}$

i) $4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{27}$

12. Multiplicar los siguientes radicales de distinto índice, reduciendo previamente a índice común, y simplificar:

a) $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{32}=\sqrt{2}\,\sqrt[3]{2^5}=\sqrt[6]{2^3}\,\sqrt[6]{2^{10}}=\boxed{\sqrt[6]{2^{13}}}$

b) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[4]{8}$

c) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[5]{2}$

d) $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[6]{3}$

e) $\sqrt[3]{2^2}\,\sqrt[4]{2}$

f) $\sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[6]{a^5}$

g) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt[4]{8}$

h) $\sqrt[4]{8}\,\sqrt[3]{4}\,\sqrt{a^3}$

13. Simplificar, aplicando convenientemente las propiedades de las raíces:

a) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{32}{2}}=\sqrt{16}=\boxed{4}$

b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{9}}$

d) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

g) $\sqrt{\frac{256}{729}}$

h) $\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{7}}$

i) $\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{3}}$

j) $\sqrt[3]{\frac{125}{512}}$

k) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$

l) $\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{8}}{\sqrt{32}}$

m) $\sqrt{\frac{154}{9}+23}$ - $\sqrt{4\,\frac{144}{9}}$

n) $\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

14. ¿Cómo podríamos comprobar rápidamente que $\frac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$? (no vale calculadora)

(Sol: multiplicando en cruz)

15. Operar los siguientes radicales de distinto índice, reduciendo previamente a índice común:

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{2^6}}{\sqrt[4]{2}}=\boxed{\sqrt[4]{2^5}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{32}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{8}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt{7}}$

f) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$

g) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$

h) $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt[3]{ab}}$

i) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5c}}{\sqrt{ab^3c^3}}$

j) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$

k) $\dfrac{\sqrt[3]{-2000}}{3\sqrt{2}}$

l) $\dfrac{\sqrt[3]{4}\ \sqrt{3}}{\sqrt[6]{12}}$

m) $\dfrac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{4}\ \sqrt{2}}$

n) $\dfrac{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{125}}{\sqrt[4]{25}} =$

o) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[12]{2}}{\sqrt[12]{18}} =$

p) $\dfrac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[12]{2}}{\sqrt[4]{2}} =$

q) $\dfrac{\sqrt[6]{54}\cdot\sqrt[12]{27}}{\sqrt[12]{4}\cdot\sqrt[4]{12}} =$

r) $\dfrac{\sqrt[4]{abc^2}\cdot\sqrt[12]{a^3b^5c^2}}{\sqrt[6]{a^2b^2c}} =$

16. Simplificar:

a) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6 = \sqrt[3]{a^{12}} = a^{12/3} = \boxed{a^4}$

b) $\left(\sqrt[6]{ab^2}\right)^2 =$

c) $\left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{x} =$

d) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{2}\right)^2} =$

e) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{2}\right)^3} =$

f) $\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{2}\right)^3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 =$

g) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{3}\right)^5}{\left(\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt[3]{3}\right)^4} =$

h) $\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{2}\sqrt[3]{4}\right)^3 =$

i) $\sqrt{\sqrt{2^6}} =$

j) $\sqrt{\sqrt{12}} =$

k) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8 =$

l) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5x^7}} =$

m) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{15}}} =$

n) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{\sqrt{8x^3}}}\right)^7 =$

o) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{5}}\right)^5\left(\sqrt[4]{5}\right)^3 =$

p) $\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}\right)^6} =$

q) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 \cdot \left(\sqrt[4]{8}\right)^3}{\sqrt{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}} =$

r) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \left(\sqrt{a^3}\right)^3}{\left(\sqrt{a}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{a^4}} =$

s) $\dfrac{\left(\sqrt{27}\right)^3 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{81} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3} =$

17. Introducir convenientemente factores y simplificar:

a) $2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^3} = \boxed{\sqrt{8}}$

b) $2\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

d) $3\sqrt{2}$

e) $3\sqrt{\dfrac{2}{27}}$

f) $3\sqrt[3]{3}$

g) $6\sqrt{\dfrac{5}{12}}$

h) $3\sqrt[4]{5}$

i) $ab\sqrt{\dfrac{c}{ab^3}}$

j) $3\sqrt{7}$

k) $2a\sqrt{\dfrac{3c}{2a}}$

l) $\sqrt{x\sqrt{x}} =$

m) $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}} =$

n) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} =$

o) $\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt{3}}} =$

p) $\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{2} =$

q) $\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}} =$

r) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}\,\sqrt{2}}\right)^3 =$

s) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt[3]{3}}\,\sqrt[3]{3}} =$

t) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{3\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{3}}\right)^2 =$

u) $\dfrac{\sqrt[3]{81}\,\left(\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\,\sqrt{\sqrt[3]{9}}} =$

v) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}\,\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\,\sqrt[4]{8}} =$

w) $\dfrac{\left(\sqrt{2\sqrt[3]{2}}\right)^3}{\sqrt{2\sqrt{2}}\,\sqrt[4]{2}} =$

x) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}} =$

y) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2}{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}} =$

z) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{3}\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}} =$

α) $\dfrac{\sqrt{125}\left(\sqrt[3]{5}\right)^2}{\sqrt{5\sqrt[3]{25}}} =$

β) $\sqrt{ab\sqrt{8ab\sqrt{4a^2b^2}}} =$

18. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas, y comprobar que se obtiene el mismo resultado:

- operando, teniendo en cuenta las propiedades de las raíces
- pasando a potencia de exponente fraccionario, y aplicando a continuación las propiedades de las potencias.

a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{2} =$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}} =$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}\,\dfrac{a^3}{\sqrt{a}} =$

d) $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} =$

19. Extraer factores y simplificar cuando proceda:

a) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2\,2} = \boxed{2\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{18}$

c) $\sqrt{98}$

d) $\sqrt{32}$

e) $\sqrt{60}$

f) $\sqrt{72}$

g) $\sqrt{128}$

h) $\sqrt{162}$

i) $\sqrt{200}$

j) $\sqrt{12}$

k) $\sqrt{27}$

l) $\sqrt{48}$

m) $\sqrt{75}$

n) $\sqrt{108}$

o) $\sqrt[3]{3^4 5^5}$

p) $\sqrt[4]{80}$

q) $\sqrt[3]{2592}$

r) $\sqrt[5]{279936}$

s) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{10}$

t) $\sqrt[3]{500}$

u) $\sqrt[3]{32x^4}$

v) $\sqrt{1936}$

w) $\sqrt{3,24}$

x) $\sqrt{529}$

y) $\sqrt{676}$

z) $\sqrt[3]{128a^2b^7}$

α) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$

β) $\sqrt[5]{64}$

γ) $\sqrt[3]{16x^6}$

δ) $\sqrt{\dfrac{28x^5}{75y^3}}$

ε) $\dfrac{11\sqrt{132}}{132}$

ζ) $\dfrac{\sqrt{396}}{66}$

η) $\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}}$

ϑ) $\dfrac{\sqrt{11}\sqrt{132}}{132}$

ι) $\sqrt{25+\dfrac{25}{4}}$

κ) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{50}=$

λ) $5\ \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\ \sqrt[3]{\dfrac{4}{81}}=$

20. Sumar los siguientes radicales, reduciéndolos previamente a radicales semejantes (Fíjate en el 1<u>er</u> ejemplo):

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}=\sqrt{2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{3^2 2}-\sqrt{2^5}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2^2\sqrt{2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\boxed{2\sqrt{2}}$

FACTORIZAMOS RADICANDOS — EXTRAEMOS FACTORES — SUMAMOS RADICALES SEMEJANTES

b) $\sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80}$

c) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}$

d) $\sqrt[3]{54}-2\cdot\sqrt[3]{16}$

e) $27\sqrt{3}-5\sqrt{27}-9\sqrt{12}$

f) $\sqrt{75}-\sqrt{20}-\sqrt{12}+\sqrt{45}$

g) $2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50}$

h) $5\sqrt[6]{256} - 2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128} =$

i) $\sqrt{32} + 2\sqrt{3} - \sqrt{8} + \sqrt{2} - 2\sqrt{12}$

j) $3\sqrt{24} - \frac{1}{3}\sqrt{54} + \sqrt{150}$

k) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{8} + 3\sqrt{18} + 2\sqrt{32} + \sqrt{50}$

l) $\sqrt{20} - \frac{1}{5}\sqrt{5} + \sqrt{45}$

m) $2\sqrt{108} - \sqrt{75} - \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{3}$

n) $\sqrt{128} + 5\sqrt{12} - 2\sqrt{18} - 3\sqrt{27} - \sqrt{2} =$

o) $\sqrt{5} + \sqrt{\frac{45}{4}}$

p) $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{18}{75}}$

q) $\sqrt{\frac{1}{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{8}}$

r) $\sqrt{\frac{3}{16}} - 4\sqrt{12}$

s) $\sqrt{\frac{5}{12}} - \sqrt{\frac{10}{6}}$

t) $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$

u) $5\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{27} - 4\sqrt{3} - \sqrt{300} =$

v) $\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{27}}{3}+\frac{5\sqrt{243}}{9}$

w) $6\sqrt[6]{4}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{16}-3\sqrt[9]{8}+5\sqrt[3]{\frac{2}{27}}=$

x) $2\sqrt[4]{\frac{2}{81}}-\sqrt[8]{4}+2\sqrt[4]{32}=$

y) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{\frac{2}{27}}=$

z) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{40}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{5}+\frac{5}{2}\sqrt[3]{320}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{1080}+\sqrt[3]{\frac{135}{8}}=$

α) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{\frac{3}{8}}=$

β) $\sqrt{9x+9}-\sqrt{4x+4}$

RECORDAR LAS IGUALDADES NOTABLES:

$$\boxed{\begin{aligned}(A+B)^2&=A^2+2AB+B^2\\(A-B)^2&=A^2-2AB+B^2\\(A+B)(A-B)&=A^2-B^2\end{aligned}}$$

21. Calcular, dando el resultado lo más simplificado posible:

a) $\left(2\sqrt{2}\right)^2=$

b) $\left(3\sqrt{5}\right)^2=$

c) $(1+\sqrt{2})^2 =$

d) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 =$

e) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 =$

f) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) =$

g) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) =$

h) $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{8}) =$

i) $(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{12}) =$

j) $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2} =$

k) $2\sqrt{8}\cdot 8\sqrt{2} =$

l) $3\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3} =$

m) $2\sqrt{15}\cdot 3\sqrt{15} =$

n) $(5\sqrt{3})^2 =$

o) $(5+\sqrt{3})^2 =$

p) $(5-\sqrt{3})^2 =$

q) $(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3}) =$

r) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 =$

s) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 =$

t) $(2\sqrt{3}+5)^2 =$

u) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2 =$

v) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)=$

w) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-4\right)=$

x) $\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{3} =$

y) $\left(3\sqrt{2}+2\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)=$

z) $\left(2\sqrt{5}-5\right)\sqrt{5} =$

α) $\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)=$

β) $\left(2\sqrt{8}+3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{8}-2\sqrt{2}\right)=$

γ) $\left(2\sqrt{5}-5\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}+5\sqrt{2}\right)=$

δ) $\left(2\sqrt{5}-5\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}+2\right)=$

ε) $\left(2\sqrt{27}-3\right)\left(1+\sqrt{3}\right)=$

ζ) $\left(3\sqrt{8}-4\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-5\sqrt{8}\right)=$

η) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2 =$

θ) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2\left(5-\sqrt{21}\right)=$

ι) $\left(3\sqrt{8}+2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{8}-3\sqrt{2}\right)=$

κ) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2=$

λ) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$

RACIONALIZACIÓN:

22. Racionalizar denominadores, y simplificar:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$

c) $\frac{5}{3\sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

e) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

f) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

g) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

h) $\frac{4}{\sqrt{6}}$

i) $\frac{1}{\sqrt{27}}=$

j) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

k) $\frac{12}{\sqrt{8}} =$

l) $\frac{\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}} =$

m) $\frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

n) $\frac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}} =$

o) $\frac{-2\sqrt{7}}{7\sqrt{2}}$

p) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}$

q) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$

r) $\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1}{\sqrt{2}}$

s) $\frac{1-\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}}$

t) $\frac{\sqrt{81+\frac{81}{4}}}{\sqrt{5}}$

u) $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{125}}$

v) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$

w) $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}$

x) $\dfrac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}$

y) $\dfrac{3\sqrt{10}}{5\sqrt{6}}$

23. Racionalizar denominadores, y simplificar:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{9}}$

c) $\dfrac{8}{\sqrt[6]{8}}$

d) $\dfrac{10}{3\sqrt[4]{125}}$

e) $\dfrac{\sqrt[5]{25}}{5\sqrt[3]{5}}$

f) $\dfrac{10}{\sqrt[5]{128}} =$

g) $\dfrac{\sqrt{3}}{5\sqrt[5]{27}}$

h) $\dfrac{3\sqrt[5]{9}}{2\sqrt[3]{243}}$

i) $\dfrac{5\sqrt{15}}{\sqrt[3]{15}}$

j) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$

k) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2}}$

l) $\dfrac{3}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}$

m) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{64}}$

n) $\dfrac{x}{\sqrt{x}}+\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

24. Racionalizar denominadores, y simplificar:

a) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{9}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{4(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}-1}$

d) $\dfrac{3(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{7}+2}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

f) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

g) $\dfrac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

h) $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6+\sqrt{6}} =$

i) $\dfrac{7}{7-\sqrt{7}}$

j) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

k) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}-2}$

l) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

m) $\dfrac{7}{\sqrt{8}-2}$

n) $\dfrac{2\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}-2} =$

o) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

p) $\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

q) $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}+4} =$

r) $\dfrac{2\sqrt{8}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{8}+3\sqrt{2}} =$

s) $\dfrac{12 - 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3} =$

t) $\dfrac{\left(\sqrt{2+\sqrt{8}}\right)^2}{2-\sqrt{2}} =$

u) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

v) $\dfrac{3\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}-2} =$

w) $\dfrac{24 - 13\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} =$

x) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

y) $\dfrac{4 - \sqrt{6}}{\sqrt{6}-2} =$

z) $\dfrac{2-\sqrt{8}}{2+\sqrt{2}} =$

α) $\dfrac{-\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}} =$

β) $\dfrac{9+4\sqrt{3}}{3\left(4-\sqrt{3}\right)} =$

γ) $\dfrac{\sqrt{2}+4}{2-\sqrt{2}}=$

δ) $\sqrt{x}+\dfrac{x}{2\sqrt{x}}=$

ε) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3}+\dfrac{12}{\sqrt{3}}=$

ζ) $\dfrac{17-9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5}-\dfrac{9}{\sqrt{3}}=$

25. ¿V o F? Razonar **algebraicamente** la respuesta:

a) $\dfrac{\cancel{5}+\sqrt{3}}{\cancel{5}}=1+\sqrt{3}$

b) $\dfrac{\cancel{5}+\sqrt{3}}{\cancel{5}}=\sqrt{3}$

c) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{\cancel{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\cancel{5}}=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

e) $\dfrac{3+6\sqrt{2}}{3}=1+2\sqrt{2}$

f) $\dfrac{4+14\sqrt{5}}{6}=\dfrac{2+7\sqrt{5}}{3}$

g) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=2+3=5$

h) $\sqrt{16+9}=4+3=7$

NÚMEROS REALES EJERCICIOS

1. Ordenar de menor a mayor los siguientes números, pasándolos previamente a común denominador:

a) $\frac{1}{2}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{5}{6}$ **b)** $\frac{1}{2}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{7}{15}$ **c)** $\frac{1}{5}\quad\frac{3}{4}\quad-\frac{2}{7}\quad\frac{9}{8}\quad\frac{6}{5}\quad\frac{5}{6}$

2. **a)** Representar en la recta real los siguientes números racionales:

$$\frac{2}{3}\quad\frac{7}{6}\quad\frac{16}{3}\quad-\frac{5}{7}\quad-\frac{18}{5}\quad 3\quad\frac{5}{4}\quad-\frac{9}{2}$$

b) A la vista de lo anterior, ordenarlos de menor a mayor.

c) Utilizar la calculadora para comprobar el resultado anterior.

d) Construir $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8}$ y $\sqrt{10}$ sobre la recta real, utilizando regla y compás, y aplicando el teorema de Pitágoras (se recomienda utilizar, también, papel milimetrado), y comprobar el resultado con la calculadora.

3. Hallar una fracción comprendida entre las dos siguientes. Comprobar el resultado con la calculadora:

a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{3}$ **c)** $\frac{5}{4}$ y $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ **e)** $\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{4}$

***RECORDAR*:**

REGLA PRÁCTICA PARA AVERIGUAR SI UNA FRACCIÓN <u>IRREDUCIBLE</u> CONDUCE A UN DECIMAL EXACTO O PERIÓDICO (sin necesidad de efectuar la división): " Si los únicos divisores primos del denominador de una fracción **irreducible** de n^{os} enteros son el 2 y/o el 5, entonces su expresión decimal será necesariamente exacta; en caso contrario, será periódica"

4. Utilizando la regla anterior, indicar si las siguientes fracciones conducen a un decimal exacto o periódico. Comprobar el resultado haciendo la división directamente (¡sin usar la calculadora!):

a) $\frac{1}{2}\quad\frac{3}{20}\quad\frac{7}{50}\quad\frac{23}{12}\quad\frac{1}{7}\quad\frac{1}{21}\quad\frac{3}{12}\quad\frac{23}{18}\quad\frac{1}{18}\quad\frac{7}{35}\quad\frac{16}{9}$

b) $\frac{3}{4}\quad\frac{7}{5}\quad\frac{23}{20}\quad\frac{13}{25}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{3}{7}\quad\frac{23}{9}\quad\frac{132}{21}\quad\frac{7}{6}$

5. Hallar la fracción generatriz de los siguientes números decimales. Comprobar el resultado con la calculadora:

a) $0{,}25$ *(Soluc: 1/4)*

b) $0{,}\overset{\frown}{6}$ *(Soluc: 2/3)*

c) $0{,}2\overset{\frown}{3}$ *(Soluc: 7/30)*

d) $0{,}12$ *(Soluc: 3/25)*

e) $0{,}1\overset{\frown}{2}$ *(Soluc: 11/90)*

f) $0{,}12\overset{\frown}{35}$ *(Soluc: 1223/9900)*

g) $1{,}125$

h) $0{,}1\overset{\frown}{26}$

i) $0{,}34\overset{\frown}{5}$

j) $1{,}1\overset{\frown}{8}$

k) $1{,}2\overset{\frown}{3}$

l) 25,372

m) $12,\overset{\frown}{20}$

n) $5,13\overset{\frown}{5}$

o) $12,13\overset{\frown}{40}$

6. Razonar por qué no cabe considerar el período 9, es decir, no tiene sentido indicar $0,\overset{\frown}{9}$ o $0,0\overset{\frown}{9}$

7. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas, y comprobar que se obtiene idéntico resultado:

1º Operando directamente en forma decimal (a partir del **i**, utilizar la calculadora)

2º Pasando previamente a fracción generatriz y operando a continuación las fracciones resultantes.

a) $0,\overset{\frown}{3}+0,\overset{\frown}{6}=$

b) $0,3-0,\overset{\frown}{15}=$

c) $3,4\overset{\frown}{1}+2,37\overset{\frown}{8}=$

d) $0,\overset{\frown}{4}\cdot 0,1=$

e) $3,\overset{\frown}{1}+2,0\overset{\frown}{3}=$

f) $0,\overset{\frown}{3}+0,1\overset{\frown}{6}=$

g) $4\cdot 2,\overset{\frown}{5}=$

h) $4,\overset{\frown}{89}-3,\overset{\frown}{78}=$

i) $8-2,\overset{\frown}{7}=$

j) $4,5\cdot 0,0\overset{\frown}{2}+0,\overset{\frown}{4}=$

k) $0,\overset{\frown}{6}:0,0\overset{\frown}{5}+0,25=$

l) $1,25-1,1\overset{\frown}{6}+1,\overset{\frown}{1}=$

m) $2,\overset{\frown}{7}\cdot 1,8+2,\overset{\frown}{26}:0,1\overset{\frown}{13}=$

n) $1,9\overset{\frown}{2}+0,25(0,2\overset{\frown}{5}+0,\overset{\frown}{5})=$

o) $\sqrt{2,\overset{\frown}{7}}=$

p) $0,8\overset{\frown}{3}-0,8:0,\overset{\frown}{6}=$

q) $4,08\overset{\frown}{3}\cdot 11,\overset{\frown}{1}-0,1\overset{\frown}{5}:0,3=$

r) $0,\overset{\frown}{6}+1,3\overset{\frown}{8}\cdot 0,72=$

s) $0,\overset{\frown}{5}-0,15+1,2\overset{\frown}{3}$

8. Separar los siguientes números en racionales o irracionales, indicando, de la forma más conveniente en cada caso, el porqué:

$$\frac{1}{8} \qquad \frac{-}{3} \qquad \sqrt{5} \qquad 2,6 \qquad 0 \qquad -3 \qquad -\frac{25}{3} \qquad \sqrt{13} \qquad 0,1 \qquad 6,\overset{\frown}{4} \qquad 534 \qquad 1,414213\ldots$$

(Soluc: Q; I; I; Q; Q; Q; Q; I; Q; Q; Q; I)

9. Indicar cuál es el menor conjunto numérico al que pertenecen los siguientes números (IN, Z, Q o I); en caso de ser Q o I, razonar el porqué:

$$\frac{\pi}{2} \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt{4} \qquad 0,0015 \qquad -10 \qquad \frac{5}{6} \qquad 2,\overset{\frown}{3} \qquad 2,020020002\ldots$$

10. Señalar cuáles de los siguientes números son racionales o irracionales, indicando el porqué:

a) 3,629629629....
b) 0,128129130...
c) 5,216968888...
d) 0,123456789...
e) 7,129292929...
f) 4,101001000...
g) 0,130129128...

(Soluc: Q; I; Q; I; Q; I; Q)

11. Rellenar la siguiente tabla (véase el primer ejemplo):

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
1		[-1,3]	{x∈IR/ -1≤x≤3}
2			
3			
4		[-2,1)	
5			{x∈IR/ 1<x≤5}
6			
7			{x∈IR/ x<2}
8		(0,∞)	
9			
10		(-1,5)	
11			{x∈R/ x≤0}
12		[2/3,∞)	
13			{x∈IR/ -2<x≤2}
14			{x∈IR/ |x|<3}
15			{x∈IR/ |x|K3}
16			
17		[-1,1]	
18			{x∈IR/ x<-1}
19			
20		(-∞,-2)U(2,∞)	
21		(-∞,2)U(2,∞)	
22			{x∈IR/ |x|≤5}

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
23		[-2,2]	
24			

12. ¿Verdadero o falso? Razonar la respuesta:

a) Todo número real es racional.

b) Todo número natural es entero.

c) Todo número entero es racional.

d) Siempre que multiplicamos dos números racionales obtenemos otro racional.

e) Siempre que multiplicamos dos números irracionales obtenemos otro irracional.

f) Entre dos números reales existe siempre un racional.

g) " " " " " " " irracional.

13. Hallar la U e ∩ de los siguientes intervalos, dibujándolos previamente:

a) A=[-2,5)	**c)** E=(0,3]	**e)** I=[-5,-1)	**g)** M=(2,5)	**i)** Q=(-3,7)
B=(1,7)	F=(2,∞)	J=(2,7/2]	N=(5,9]	R=(2,4]
b) C=(-1,3]	**d)** G=(-∞,0]	**f)** K=(-∞,0)	**h)** O=[-3,-1)	**j)** S=[-3,2)
D=(1,6]	H=(-3,∞)	L=[0,∞)	P=(2,7]	T=(0,∞)
				U=[1,4]

¿Serías capaz de hacer la U e ∩ sin dibujar previamente los intervalos?

14. ¿Qué otro nombre recibe el intervalo [0,∞)? ¿Y (-∞,0]?

15. ¿A qué equivale IR^+ U IR^- ? ¿Y IR^+ ∩ IR^- ?

ERRORES:

16. Completar la siguiente tabla (Sígase en el primer ejemplo). ¿Cuál es, de todas ellas, la mejor aproximación de π?

	Aproximación de π	Aproximación decimal (a la cienmillonésima)	Error absoluto ε_a	Error relativo ε_r
Antiguo Egipto (>1800 a.C.)	$\left(\frac{4}{3}\right)^4$	3,16049383	0,018901…	0,006016…
Arquímedes (s. III a.C.)	$\frac{22}{7}$			
Ptolomeo (s. II d.C.)	$\frac{377}{120}$			
China (s. V d.C.)	$\frac{355}{113}$			

¿Algún día se podrá encontrar una fracción de enteros **exactamente** igual a π?

17. Como muy bien sabemos, los números π o √3 son irracionales, es decir, no pueden ser expresados de manera exacta como un cociente de números enteros; ahora bien, los matemáticos babilonios, egipcios y griegos manejaban aproximaciones bastante precisas, como por ejemplo:

$$\pi \cong 3 + \frac{17}{120} = \frac{377}{120} \qquad \text{(Ptolomeo)}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong \pi \qquad \text{(desconocido)}$$

$$\sqrt{3} \cong 3 + \frac{265}{153}\text{, y mejor: } \sqrt{3} \cong 3 + \frac{1351}{780} \qquad \text{(Arquímedes)}$$

Comprobar la precisión de dichas aproximaciones e indicar el error cometido.

18. El sabio griego *Eratóstenes* (siglo III a.C.) fue capaz de obtener un valor del radio de la Tierra de 6548 km. Hallar el error cometido, teniendo en cuenta que el valor real es 6378 km. *(Soluc: ≅2,67 %)*

19. **CURIOSIDAD MATEMÁTICA:** Comprobar, con la calculadora, la validez de la siguiente serie, debida al matemático alemán *Leibniz* (s. XVII-XVIII):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

20. **CURIOSIDAD MATEMÁTICA:** Comprobar la siguiente fórmula, llamada "Método de la fracción continua infinita", debida al matemático italiano *Cataldi* (s. XVI-XVII):

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

EJERCICIOS de ECUACIONES y SISTEMAS de 1er y 2^{o} GRADO

1. Resolver las siguientes **ecuaciones de 1$^{\underline{er}}$ grado** y comprobar la solución:

a) $5[2x-4(3x+1)]=-10x+20$

b) $x-13=4[3x-4(x-2)]$

c) $3[6x-5(x-3)]=15-3(x-5)$

d) $2x+3(x-3)=6[2x-3(x-5)]$

e) $5(x-3)-2(x-1)=3x-13$

f) $x+4[3-2(x-1)]=5[x-3(2x-4)]+1$

g) $3-2x+4[3+5(x+1)]=10x-7$

h) $8x-6=2[x+3(x-1)]$

2. Resolver las siguientes **ecuaciones de 1$^{\underline{er}}$ grado con denominadores** y comprobar la solución:

a) $3-\frac{5x-1}{10}=\frac{3}{5}-\frac{x}{2}$

b) $\frac{5-x}{15}-\frac{9}{5}=-x-\frac{1-x}{3}$

c) $\frac{x+8}{6-x}=13$

d) $\frac{3(x-2)}{4}-\frac{2(x-3)}{3}=\frac{x}{6}-\frac{3x-6}{4}$

e) $\frac{x-2}{3-x}=-\frac{5}{4}$

f) $x=\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+3\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{5}\right)+1$

g) $\frac{1}{3}=\frac{\frac{3}{5}-x}{1+\frac{3}{5}x}$

h) $4-\frac{7-x}{12}=\frac{5x}{3}-\frac{5-3x}{4}$

i) $x-\frac{12x+1}{3}=2x+1-\frac{15x+4}{3}$

j) $\frac{2x+1}{3x-6}=\frac{3}{2}$

k) $\frac{x}{2}-\frac{6-x}{4}=x+1$

l) $\frac{1+5x}{4}-\frac{3-x}{6}=1-2x-\frac{8x-2}{9}$

m) $\frac{6x+1}{11}=\frac{2x-3}{7}$

n) $x+\frac{3(x-5)}{2}=3+\frac{5x-21}{2}$

o) $\frac{3(x-3)}{2}+\frac{2x}{3}-2x=\frac{3(2x-1)}{9}-\frac{1}{6}$

p) $\frac{1+96\frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600}$

q) $1-\frac{2}{3}(x-3)=2-\frac{1}{4}(3x-4)$

r) $2-4\left(\frac{2x}{7}+\frac{1}{7}\right)=\frac{3}{2}-x$

s) $5x-3\left(3-\frac{x}{4}\right)=\frac{7x}{2}-3$

t) $5\left(\frac{2x}{3}-\frac{3x}{5}\right)+1=2x-2(x-1)$

u) $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)$

v) $\frac{2x}{3}-5\left(\frac{x}{12}+\frac{1}{4}\right)=3-2\left(1-\frac{x}{6}\right)$

w) $3\left(\frac{11x}{6}-x\right)-4=2x-3\left(1-\frac{x}{6}\right)$

3. Resolver los siguientes **SS.EE.LL** (cada uno de los tres primeros apartados por los tres métodos habituales, y el resto <u>por reducción</u>), clasificarlos y <u>comprobar la solución</u>:

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 4x-y=7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=12 \\ 3x+y=7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=9 \\ 2x+5y=-13 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{2}+2y=10 \\ x-3y=6 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} \frac{2x}{3}-\frac{3y}{2}=1 \\ x+y=4 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{l} \frac{2(x-4)}{3}+4y=2 \\ \frac{3(y-1)}{2}+3x=6 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=5 \\ -4x-6y=-6 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=5 \\ 6x+9y=15 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{l} \frac{3(x-2)}{4}+\frac{2(y-3)}{5}=\frac{2}{5} \\ \frac{2(y-4)}{3}+\frac{3(x-1)}{2}=\frac{3}{2} \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=9 \\ -6x+4y=-18 \end{array}\right\}$

k) $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=9 \\ 6x-4y=4 \end{array}\right\}$

l) $\left.\begin{array}{l} \frac{2(x-3)}{5}+\frac{y}{4}=\frac{1}{2} \\ \frac{3(y-2)}{5}+\frac{x}{9}=\frac{1}{3} \end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{l} \frac{2(x-5)}{7}+\frac{y-3}{2}=-\frac{1}{3} \\ \frac{3(y-1)}{5}-\frac{x-3}{3}=-1 \end{array}\right\}$

n) $\left.\begin{array}{r}\frac{x+1}{2}-\frac{y-2}{3}=\frac{1}{3}\\ \frac{x}{3}+\frac{y+1}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$

o) $\left.\begin{array}{r}\frac{3(x-1)}{2}+\frac{2(y-2)}{3}=\frac{13}{6}\\ \frac{3(x+1)}{2}-\frac{2(y+2)}{5}=\frac{5}{2}\end{array}\right\}$

p) $\left.\begin{array}{r}x-y+z=6\\ 2x+y-3z=-9\\ -x+2y+z=-2\end{array}\right\}$

q) $\left.\begin{array}{r}2x+y-z=0\\ x-2y+3z=13\\ -x+y+4z=9\end{array}\right\}$

r) $\left.\begin{array}{r}-2x+y+z=6\\ 3x-z=-7\\ x-5y+2z=7\end{array}\right\}$

4. Inventar, razonadamente, un SS.EE.LL. 2x2 con soluciones x=2, y=-3

5. Inventar, razonadamente, un SS.EE.LL. 2x2 sin solución.

ECUACIÓN DE 2º GRADO:

6. Dadas las siguientes **ecuaciones de 2º grado**, se pide:

i) Resolverlas mediante la fórmula general de la ecuación de 2º grado.

ii) Comprobar las soluciones obtenidas.

iii) Factorizar cada ecuación y comprobar dicha factorización.

iv) Comprobar las relaciones de Cardano-Vieta.

a) $x^2-4x+3=0$
b) $x^2-5x+6=0$
c) $x^2-x-6=0$
d) $x^2-9x+20=0$
e) $x^2+2x+5=0$
f) $2x^2-5x+2=0$
g) $x^2-6x+9=0$
h) $x^2-2x-1=0$
i) $6x^2-13x+6=0$
j) $x^2+x-1=0$

7. Escribir <u>una</u> ecuación de 2º grado que tenga por soluciones:

a) $x_1=4$, $x_2=-6$
b) $x_1=-3$, $x_2=-5$
c) $x_1=2$, $x_2=-7$
d) $x_1=-2/7$, $x_2=7$
e) $x_1=-16$, $x_2=9$
f) $x_1=3/4$, $x_2=-2/5$
g) x=3 doble
h) $x_1=-4$, $x_2=-1/8$
i) $x=\pm 2$
j) $x=\pm\sqrt{2}$
j) x=2/5 doble
l) $x=2\pm\sqrt{3}$
m) $x_1=5$, $x_2=-12$
n) $x_1=3/10$, $x_2=-4$

8. Escribir en cada caso <u>la</u> ecuación de 2º grado que tenga por soluciones 5 y -2 y tal que:

a) el coeficiente de x^2 sea 4
b) el coeficiente de x sea 9
c) el término independiente sea -4
d) el coeficiente de x^2 sea 5

9. Un alumno indica en un examen que las soluciones de $x^2+4x+3=0$ son 2 y 5. Utilizar las relaciones de Cardano-Vieta para razonar que ello es imposible.

10. Inventar, razonadamente, una ecuación de 2º grado: **a)** Que tenga dos soluciones. **b)** Que tenga una solución. **c)** Que no tenga solución.

11. Hallar el valor de los coeficientes **b** y **c** en la ecuación $7x^2+bx+c=0$ sabiendo que sus soluciones son $x_1=5$ y $x_2=-6$

12. Calcular el valor del coeficiente **b** en la ecuación $5x^2+bx+6=0$ sabiendo que una de sus soluciones es 1 ¿Cuál es la otra solución?

13. Calcular el valor de **a** y **b** para que la ecuación $ax^2+bx-1=0$ tenga por soluciones $x_1=3$ y $x_2=-2$

14. ¿Para qué valores de a la ecuación $x^2-6x+3+a=0$ tiene solución única?

15. **TEORÍA:** Justificar la validez de la siguiente fórmula, utilizada por los matemáticos árabes medievales para resolver la ecuación de 2º grado $x^2+c=bx$:

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

16. Hallar el discriminante de cada ecuación y, sin resolverlas, indicar su número de soluciones:

a) $5x^2-3x+1=0$
b) $x^2-4x+4=0$
c) $3x^2-6x-1=0$
d) $5x^2+3x+1=0$

17. Determinar para qué valores de **m** la ecuación $2x^2-5x+m=0$:

a) Tiene dos soluciones distintas.
b) Tiene una solución.
c) No tiene solución.

18. Determinar para qué valores de **b** la ecuación $x^2-bx+25=0$:

a) Tiene dos soluciones distintas.
b) Tiene una solución.
c) No tiene solución.

19. **TEORÍA:** **a)** ¿Qué es el discriminante de una ecuación de 2º grado? ¿Qué indica? Sin llegar a resolverla, ¿cómo podemos saber de antemano que la ecuación x^2+x+1 carece de soluciones?

b) Inventar una ecuación de 2º grado con raíces $x_1=2/3$ y $x_2=2$, y cuyo coeficiente cuadrático sea 3

c) Sin resolver y sin sustituir, ¿cómo podemos asegurar que las soluciones de $x^2+5x-300=0$ son $x_1=15$ y $x_2=-20$?

d) Calcular el valor del coeficiente **b** en la ecuación $x^2+bx+6=0$ sabiendo que una de las soluciones es 1. Sin necesidad de resolver, ¿cuál es la otra solución?

20. Resolver las siguientes **ecuaciones de 2º grado incompletas**:

a) $x^2-5x=0$
b) $2x^2-6x=0$
c) $2x^2-18=0$
d) $5x^2+x=0$
e) $x^2=x$
f) $x^2+x=0$
g) $4x^2-1=0$
h) $-x^2+12x=0$
i) $x^2-10x=0$
j) $9x^2-4=0$

k) $3x^2-11x=0$

l) $x(x+2)=0$

m) $x^2+16=0$

n) $25x^2-9=0$

o) $4-25x^2=0$

p) $2x^2-8=0$

q) $-x^2-x=0$

21. Resolver las siguientes **ecuaciones de 2º grado completas** y comprobar siempre las soluciones:

a) $x^2-2x-8=0$

b) $x^2+2x+3=0$

c) $2x^2-7x-4=0$

d) $x^2+6x-8=0$

e) $4x^2+11x-3=0$

f) $x^2+2x+1=0$

g) $x^2-13x+42=0$

h) $x^2+13x+42=0$

i) $x^2+5x+25=0$

j) $3x^2-6x-6=0$

k) $2x^2-7x-15=0$

l) $x^2-4x+4=0$

m) $2x^2+ax-3a^2=0$

n) $6x^2-x-1=0$

o) $3x^2-6x-4=0$

p) $x^2-19x+18=0$

q) $12x^2-17x-5=0$

r) $3x^2-ax-2a^2=0$

s) $2x^2-5x-3=0$

t) $\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x+2=0$

u) $\sqrt{3}\,x^2+2x-\sqrt{3}=0$

v) $5x^2+16x+3=0$

w) $2x^2-\sqrt{2}\,x-2=0$

x) $x^2+9x-22=0$

y) $\frac{1}{2}x^2-x-4=0$

z) $0,1x^2-0,4x-48=0$

α) $x^2+2x-3=0$

β) $48x^2-38,4x-268,8=0$

γ) $\frac{ax^2}{3}-\frac{abx}{6}-\frac{ab^2}{6}=0$

δ) $4x^2+8x+3=0$

ε) $3x^2+4x+1=0$

ζ) $x^2+4x+3=0$

η) $x^2+2x-35=0$

θ) $x^2+13x+40=0$

ι) $x^2-4x-60=0$

κ) $x^2+7x-78=0$

λ) $2x^2-5x+2=0$

μ) $x^2-10x+25=1$

ν) $2x^2-11x+5=0$

ξ) $x^2+10x-24=0$

ο) $2x^2-3x+1=0$

π) $3x^2-19x+20=0$

22. Resolver las siguientes **ecuaciones de todo tipo**, operando convenientemente en cada caso -para así pasarlas a la forma general de 2º grado-, y comprobar el resultado:

a) $2x^2+5x=5+3x-x^2$

b) $4x(x+1)=15$

c) $(5x-1)^2=16$

d) $(4-3x)^2-64=0$

e) $2(x+1)^2=8-3x$

f) $(2x-4)^2-2x(x-2)=48$

g) $(2x-3)^2+x^2+6=(3x+1)(3x-1)$

h) $(3x-2)^2=(2x+3)(2x-3)+3(x+1)$

i) $\frac{3(x^2-11)}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36$

j) $1064=\frac{4+6(x-1)}{2}\cdot x$

k) $\sqrt{3}=\frac{2x}{1-x^2}$

l) $(x-1)(x-2)=0$

m) $(2x-3)(1-x)=0$

n) $(x-1)(x-2)=6$

o) $(x^2-4)(2x-6)(x+3)=0$

p) $\frac{x^2-4}{x+3}=0$

q) $\frac{x^2-4}{x+3}=-12$

r) $\frac{x}{3x}=\frac{x-1}{-3x-1}$

s) $\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{(x-3)^2}{3}=\frac{x(11-x)}{6}$

t) $6+\frac{2x+4}{3}x=8$

u) $\frac{3x^2+2x}{5x^2-3}=0$

v) $\frac{x^2+3x-4}{x-3}=0$

w) $\frac{x^2+6x+3}{x-1}=-x$

x) $12x^3-2x^2-2x=0$

y) $\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{13}{12}$

z) $(x^2+1)^4=625$

α) $(x-3)^2=\frac{x}{4}$

β) $(2x-4)^2=0$

γ) $(x+3)^7=0$

δ) $\frac{x^4}{10}=8x$

ε) $\frac{\sqrt{x}}{x}=0$

ζ) $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(1+2x)^2}{3}=-2-$

η) $\sqrt{x^2+4x+4}=1$

θ) $\frac{(x+3)(x-3)-4}{2}-\frac{x-2}{3}=\quad 6$

23. Resolver las siguientes **ecuaciones factorizadas** o **factorizables** y comprobar:

a) $(x^2-4)(x^2+1)(x-3)=0$

b) $(x^2-3x)(2x+3)(x-1)=0$

c) $(3x^2-12)(-x^2+x-2)(x^2+1)=0$

d) $x^6-16x^2=0$

e) $x^3=3x$

f) $(3x^2+12)(x^2-5x)(x-3)=0$

g) $x^3+2x^2-15x=0$

h) $(x-3)(2x^2-8)(x^2+5x)=0$

i) $(x+1)(x-2)(x^2-3x+4)=0$

24. Resolver las siguientes **ecuaciones bicuadradas** y comprobar las soluciones obtenidas:

a) $x^4-5x^2+4=0$

b) $x^4-5x^2-36=0$

c) $x^4+13x^2+36=0$

d) $x^4-13x^2+36=0$

e) $x^4-4x^2+3=0$

f) $x^4+21x^2-100=0$

g) $x^4+2x^2+3=0$

h) $x^4-41x^2+400=0$

i) $36x^4-13x^2+1=0$

j) $x^4-77x^2-324=0$

k) $x^4-45x^2+324=0$

l) $x^4+2x^2-8=0$

m) $x^6+7x^3-8=0$

n) $x^4-16=0$

o) $x^4+16=0$

p) $x^4-16x^2=0$

q) $x^6-64=0$

r) $(x^2+2)(x^2-2)+3x^2=0$

s) $5x^2=(6+x^2)(6-x^2)$

t) $(x^2+x)(x^2-x)=(x-2)^2+x(x+4)$

u) $(2x^2+1)\ (x^2-3)=(x^2+1)\ (x^2-1)-8$

v) $(x^2-2)^2=5(1+x)(1-x)+1$

w) $(x^2+1)\cdot(x^2-1)+3x^2=3$

x) $(3+x)(3-x)x^2-2x(x-3)=(x+3)^2-1$

y) $x^2(x+1)(x-1)=(2-x)^2+(x+4)x$

z) $(x+3)(x-3)=\left(\frac{20}{x}\right)^2$

α) $(x^2+4)(x+4)(x^4+2x^2-8)=0$

β) $\frac{x^2-32}{4}=-\frac{28}{x^2-9}$

γ) $\frac{2}{x^2-9}=\frac{x^2-16}{72}$

δ) $\frac{(2x+3)^2-12x}{x^2+2x}=x^2-2x$

ε) $\frac{(x+1)(x-1)}{2}-\frac{(x^2+3)(x^2-3)}{6}=\frac{1}{3}$

ζ) $\frac{(2x+1)^2-(x^2+1)(x^2-1)}{x}=3(x+1)+1$

η) $\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{x^2}{2}=\frac{(x^2-2x)(x^2+2x)}{4}-2$

θ) $\frac{(3x^2-1)(x^2+3)}{4}-\frac{(2x^2+1)(x^2-3)}{3}=4x^2$

25. Resolver las siguientes **ecuaciones irracionales** y comprobar la solución:

a) $\sqrt{x+4}-7=0$

b) $x-\sqrt{25-x^2}=1$

c) $\sqrt{169-x^2}+17=x$

d) $2\sqrt{x+5}=x-10$

e) $x+\sqrt{5x+10}=8$

f) $x+\sqrt{5x-10}=8$

g) $11=2x-3\sqrt{x-1}$

h) $\sqrt{x+13}-\sqrt{x+6}=1$

i) $x=6-\sqrt{x}$

j) $\sqrt{3x+1}=1+\sqrt{2x-1}$

k) $1=2x-3\sqrt{4x-7}$

l) $x-2\sqrt{x-1}=4$

m) $\sqrt{5x+4}=2x+1$

n) $\sqrt{2x+1}-3=\sqrt{x-8}$

o) $\sqrt{x+5}-1=\sqrt{x}$

p) $x-\sqrt{2x-1}=2$

q) $\sqrt[3]{x+5}=2$

r) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}=7$

s) $2x-13\sqrt{x}-15=0$

t) $9(1-x)=3\sqrt{1+(3x-4)^2+x^2}$

u) $x-\sqrt{2x-1}=1-x$

v) $x-\sqrt{7-3x}=1$

w) $\sqrt{x-1}+1=x-2$

x) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$

y) $\sqrt{3x+1}+1=x$

z) $2x-\sqrt{3x-5}=4$

α) $\sqrt{x+2}+x=3x-2$

β) $\sqrt{7+2x}-\sqrt{3+x}=1$

γ) $\sqrt{x+7}-1=x$

δ) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$

ε) $\sqrt{2x+x^2}-x-2=0$

ζ) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=3$

η) $\sqrt{x+23}=\sqrt{4x+1}+2$

θ) $\sqrt{x}-2=\sqrt{x-8}$

ι) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$

κ) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+2}=1$

λ) $\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{x+1}$

μ) $\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+1}=1$

ν) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}=2$

26. ¿Por qué es imprescindible comprobar la validez de las posibles soluciones de una ecuación irracional? Indicar algún ejemplo.

27. Resolver las siguientes **ecuaciones con la x en el denominador**, y comprobar la solución obtenida (NOTA: Con un ***** se señalan aquellos apartados en los que resulta crucial efectuar la comprobación):

a) $\frac{3-x}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=-2$

b) $\frac{x+2}{x}+3x=\frac{5x+6}{2}$

c) $\frac{8}{x+6}+\frac{12-x}{x-6}=1$

d) $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-1}=2$

e) $\frac{3x+1}{x^3}+\frac{x+1}{x}=1+\frac{2x+3}{x^2}$

f) $\frac{x-1}{x^2+2x}-\frac{2}{x^2-2x}=\frac{x}{x^2-4}$

* **g)** $\frac{x-2}{x-1}=\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}+\frac{x-1}{x-2}$

h) $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{2}=\frac{x}{6}-\frac{x+6}{x-6}$

i) $\frac{1}{x}=-x+\frac{5}{2}$

j) $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{x}=\sqrt{2}\,x$

k) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{10}$

l) $\frac{4}{x}+\frac{2(x+1)}{3(x-2)}=4$

m) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{4}$

n) $\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}=3$

o) $\frac{5}{x+2}+\frac{x}{x+3}=\frac{3}{2}$

p) $\frac{x+3}{x-1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{26}{35}$

q) $\frac{4x}{x+1}+\frac{x}{2x-1}=2$

* **r)** $\frac{x-3}{x^2-x}-\frac{x+3}{x^2+x}=\frac{2-3x}{x^2-1}$

s) $\frac{5x+1}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}=\frac{x}{x-2}$

t) $\frac{4x}{x+5}-\frac{x+5}{x-5}=1$

u) $\frac{1-2x}{x+7}=\frac{x}{x-1}$

v) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{12}$

w) $\frac{3-x}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{2}{x^2-4}$

x) $\frac{x}{5}=2+\frac{75}{x}$

28. Resolver los siguientes **sistemas de ecuaciones no lineales**, y comprobar la solución:

a) $\left.\begin{array}{r}2x-y=1\\ x^2-y=4\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}x-3y=-3\\ xy=6\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=1\\ 2x-y=3\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=10\\ x^2-y^2=8\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}x^2-3y=3\\ 2x-3y=-12\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r}\frac{x-2}{3}-\frac{y-4}{2}=1\\ \frac{2}{x-3}=\frac{4}{y-2}\end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r}x-2y=-5\\ x^2+y^2=4x+2y+20\end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{l}x\cdot y=12\\ (x-4)\cdot(y+0{,}1)=12\end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r}x^2-2xy+y^2=16\\ x+y=6\end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=25\\ xy=12\end{array}\right\}$

k) $\left.\begin{array}{r} x^2-y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$

l) $\left.\begin{array}{r} x-y=105 \\ \sqrt{x}+y=27 \end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{r} x^2-4x-y=5 \\ 4x+2y=6 \end{array}\right\}$

n) $\left.\begin{array}{r} x^2-x-y=2 \\ 3x+y=-4 \end{array}\right\}$

o) $\left.\begin{array}{r} x^2-y=1 \\ 4x-y=5 \end{array}\right\}$

p) $\left.\begin{array}{r} x-y=11 \\ y^2=x-5 \end{array}\right\}$

q) $\left.\begin{array}{r} xy=12 \\ 3x-2y=1 \end{array}\right\}$

r) $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ x^2-2x+3y=-1 \end{array}\right\}$

s) $\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ x^2+y^2-2x=31 \end{array}\right\}$

t) $\left.\begin{array}{r} 3x+y^2=7 \\ 2x+y^2=6 \end{array}\right\}$

u) $\left.\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ x^2+3xy=0 \end{array}\right\}$

v) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=5 \\ x-y=-3 \end{array}\right\}$

w) $\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ x\cdot y=10 \end{array}\right\}$

x) $\left.\begin{array}{r} x^2-5x-y=-6 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$

y) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=15 \\ 2x-y=3 \end{array}\right\}$

z) $\left.\begin{array}{l} x^2-y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$

α) $\left.\begin{array}{l} y^2=2ax \\ x^2=ay \end{array}\right\}$

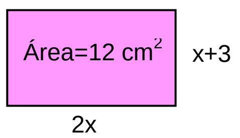
56 PROBLEMAS DE PLANTEAMIENTO:

29. Hallar dos números positivos consecutivos cuyo producto sea 380

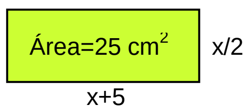
30. Calcular un número positivo sabiendo que su triple más el doble de su cuadrado es 119)

31. Hallar en cada caso el valor de x para que los rectángulos tengan el área que se indica:

a)



b)



32. Juan ha leído ya la quinta parte de un libro. Cuando lea 90 páginas más, todavía le quedará la mitad del libro. ¿Cuántas páginas tiene el libro? ¿Cuántas páginas lleva leídas?

33. Paloma vendió los dos quintos de una colección de cómics que tenía y luego compró 100 más. Tras esto tenía el mismo número que si hubiese comprado desde el principio 40 cómics. ¿Cuántos cómics tenía Paloma al principio?

34. En un texto matemático babilónico que se conserva en una tablilla en el Museo Británico de Londres se lee: Restamos al área de un cuadrado su lado y obtenemos 870». Hallar el lado de dicho cuadrado.

35. Un campo está plantado con un total de 250 árboles, entre olivos y almendros. Si el doble de almendros son 10 menos que el total de los olivos, ¿cuántos almendros habrá? ¿Y cuántos olivos?

36. El perímetro de un solar rectangular mide 40 m. Si su ancho es la tercera parte de su largo, ¿cuánto miden los lados del solar?

37. En una granja viven la mitad de gallinas que de conejos. Si en total podemos contar 110 patas, ¿cuántos conejos y gallinas pueblan la granja?

38. Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcular las dimensiones de la cerca.

39. Un automovilista que se detiene a repostar observa que para llegar a su destino todavía le queda el triple de lo que ya ha recorrido. Además, se da cuenta de que, si recorre 10 km más, estará justo en la mitad del trayecto. ¿Cuántos km ha recorrido y cuál es la longitud del viaje?

40. Hallar las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 34 cm y su diagonal 13 cm.
(

41. Según una noticia publicada en la prensa, una determinada ciudad fue visitada en 2010 por dos millones de turistas, lo cual supuso un 20 % más que en 2008. ¿Cuál fue la afluencia de turistas en este último año?

42. Calcular los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que son tres números consecutivos.

43. Un triángulo rectángulo tiene de perímetro 24 m y la longitud de un cateto es igual a tres cuartos de la del otro. Halla cuánto miden sus catetos. (Ayuda: Llamar ***x*** a un cateto e ***y*** a la hipotenusa, y plantear un sistema).

44. Un padre tiene el doble de edad que su hijo. Hace 17 años, tenía el triple. Hallar la edad de ambos.

45. Un depósito de agua tiene forma de ortoedro cuya altura es 10 m y su capacidad 4000 m^3. Hallar el lado de la base sabiendo que es cuadrada.

46. *Problema del bambú (texto indio del siglo IX):* Un bambú que mide 30 codos y que se eleva sobre un terreno plano se rompe en un punto por la fuerza del viento, de forma que la punta se queda ahora colgando a 16 codos del suelo. ¿A qué altura se ha roto?

47. Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 6 m.

48. Se tiene un lote de baldosas cuadradas. Si se forma con ellas un cuadrado de x baldosas por lado sobran 27, y si se toman x+1 baldosas por lado faltan 40. Hallar las baldosas del lote.

49. Juan pierde los 3/8 de las canicas que tenía, con lo cual le quedan 10. ¿Cuántas canicas tenía al principio?

50. En una clase el 70% son chicos. Además, se sabe que hay 12 chicas menos que chicos. ¿Cuántas chicas y chicos hay?

51. Un padre tiene 49 años y su hijo 11. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triple de la edad del hijo?

52. Un frutero vende en un día las dos quintas partes de una partida de naranjas. Además, se le estropean 8 kg, de forma que al final le quedan la mitad de naranjas que tenía al comenzar la jornada. ¿Cuántos kg tenía al principio?

53. Un grupo de amigos celebra una comida cuyo coste total asciende a 120 €. Uno de ellos hace notar que, si fueran cuatro más, hubieran pagado 5 € menos por persona. ¿Cuántos amigos son y cuánto paga cada uno?

54. Un grupo de personas se encuentra en una sala de multicines. La mitad se dirige a la sala A, la tercera parte opta por la sala B y una pareja decide ir a la cafetería. ¿Cuántas personas componían el grupo?

55. Una persona caritativa ha dado a tres pobres respectivamente un tercio, un cuarto y un quinto de lo que tenía, y aún le queda 26 € ¿Cuánto dinero tenía?

56. Nada se sabe de la vida del matemático griego **Diofanto** (siglo III d.C.), excepto su edad al morir. Ésta se sabe por una cuestión planteada en una colección de problemas del siglo V o VI, que reza así: «La juventud de Diofanto duró 1/6 de su vida… se dejó barba después de 1/12 más. Después de 1/7 de su vida se casó. Cinco años después tuvo un hijo. Éste vivió exactamente la mitad de tiempo que su padre, y Diofanto murió cuatro años después». Hallar la edad de Diofanto.

57. Preguntada una persona por su edad contestó: "Sumad 25 al producto del número de años que tenía hace 5 años por el de los que tendré dentro de 5 años y os resultará un número igual al cuadrado de la edad que tengo hoy". Hallar la edad de la persona en el momento actual.

58. Si el lado de un cuadrado aumenta 2 cm, su área aumenta 28 cm^2 ¿Cuáles son las dimensiones del cuadrado menor?

59. Calcular la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que su área es 56 cm^2 y su perímetro 30 cm.

60. En una papelería venden el paquete de bolígrafos a un precio total de 12 €. Si el precio de un bolígrafo subiera 0,10 €, para mantener ese precio total del paquete cada uno debería tener 4 bolígrafos menos. ¿Cuál es el precio de un bolígrafo y cuántos trae cada paquete?

(Ayuda: llamar ***x*** al nº de bolígrafos que trae el paquete e ***y*** al precio de cada bolígrafo, y plantear un sistema) Comprobar que la solución obtenida verifica las condiciones del enunciado.

61. Javier tiene 27 años más que su hija Nuria. Dentro de ocho años, la edad de Javier doblará la de Nuria. ¿Cuántos años tiene cada uno?

62. Un grupo de estudiantes alquila un piso por el que tienen que pagar 420 € al mes. Uno de ellos hace cuentas y observa que si fueran dos estudiantes más, cada uno tendría que pagar 24 € menos. ¿Cuántos estudiantes han alquilado el piso? ¿Cuánto paga cada uno?

(Ayuda: llamar ***x*** al nº de estudiantes e ***y*** a lo que paga cada uno, y plantear un sistema)

Comprobar que la solución obtenida verifica las condiciones del enunciado.

63. Con dos tipos de barniz, de 3,50 €/kg y de 1,50 €/kg, queremos obtener un barniz de 2,22 €/kg. ¿Cuántos kilogramos tenemos que poner de cada clase para obtener 50 kg de la mezcla? (Ayuda: plantear un sistema de ecuaciones de primer grado)

64. Dos árboles de 15 m y 20 m de altura están a una distancia de 35 m. En la copa de cada uno hay una lechuza al acecho. De repente, aparece entre ellos un ratoncillo, y ambas lechuzas se lanzan a su captura a la misma velocidad, llegando simultáneamente al lugar de la presa. ¿A qué distancia de cada árbol apareció el ratón? (Ayuda: Si se lanzan a la misma velocidad, recorren el mismo espacio, pues llegan a la vez; aplicar el teorema de Pitágoras, y plantear un SS.EE. de 2º grado)

65. Un almacenista de fruta compra un determinado número de cajas de fruta por un total de 100 €. Si hubiera comprado 10 cajas más y cada caja le hubiera salido por 1 € menos, entonces habría pagado 120 €. ¿Cuántas cajas compró y cuánto costó cada caja?

66. Calcular dos números positivos sabiendo que su cociente es 2/3 y su producto 216

67. Un rectángulo tiene 300 cm^2 de área y su diagonal mide 25 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

68. Un frutero ha comprado manzanas por valor de 336 €. Si el kilo de manzanas costara 0,80 € menos, podría comprar 48 kg más. Calcular el precio de las manzanas y la cantidad que compró. (Ayuda: plantear un SS.EE. de 2º grado)

69. Un especulador compra una parcela de terreno por 4800 €. Si el m^2 hubiera costado 2 € menos, por el mismo dinero habría podido comprar una parcela 200 m^2 mayor. ¿Cuál es la superficie de la parcela que ha comprado? ¿Cuánto cuesta el m^2?

70. El área de un **triángulo** rectángulo es 30 m^2 y la hipotenusa mide 13 m. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos?

71. Calcular dos números naturales impares consecutivos cuyo producto sea 195

72. Si multiplicamos la tercera parte de cierto número por sus tres quintas partes, obtenemos 405. ¿Cuál es ese número?

73. Varios amigos alquilan un local por 800 €. Si hubieran sido tres más, habría pagado cada uno 60 € menos. ¿Cuántos amigos son? (Ayuda: llamar x al nº de amigos e y a lo que paga cada uno) *(Soluc: 5 amigos)*

74. Uno de los lados de un rectángulo es doble que el otro y el área mide 50 m^2. Calcular las dimensiones del rectángulo.

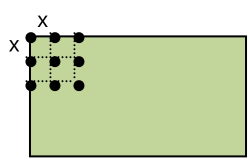
75. Un campo rectangular de 4 ha de superficie tiene un perímetro de 10 hm. Calcular, en metros, su longitud y su anchura. (1 ha=100 a; 1 a=100 m^2)

76. Las diagonales de un rombo están en la relación de 2 a 3. El área es de 108 cm^2. Calcular la longitud de las diagonales y el lado del rombo.

77. El diámetro de la base de un cilindro es igual a su altura. El área total es 169,56 m^2. Calcular sus dimensiones.

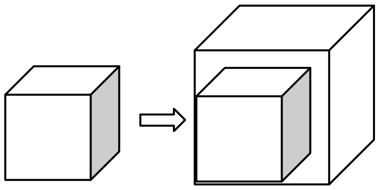
78. Calcular la velocidad y el tiempo que ha invertido un ciclista en recorrer una etapa de 120 km sabiendo que, si hubiera ido 10 km/h más deprisa, habría tardado una hora menos.

79. En un terreno rectangular de lados 64 m y 80 m se quieren plantar 357 árboles formando una cuadrícula regular. ¿Cuál será el lado de esa cuadrícula? (Ayuda: En el lado menor, por ejemplo, hay 64/x cuadrículas, y un árbol más que el número de cuadrículas)



80. Un padre tiene 30 años más que su hijo. Dentro de 15 años duplicará su edad. Hallar la edad de ambos.

81. Al aumentar en 1 cm la arista de un cubo su volumen aumenta en 271 cm^3. ¿Cuánto mide la arista? (Ayuda: plantear una ecuación de 3^er^ grado)



82. Dos tinajas tienen la misma cantidad de vino. Si se pasan 37 litros de una a otra, ésta contiene ahora el triple que la primera ¿Cuántos litros de vino había en cada tinaja al principio?

83. Un padre, preocupado por motivar a su hijo en Matemáticas, se compromete a darle 1 € por problema bien hecho, mientras que, si está mal, el hijo le devolverá 0,5 €. Después de realizar 60 problemas, el hijo ganó 30 €. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente? *(Ayuda: Plantear un SS.EE. de 1^er^ grado)*

84. Juan compra cierto número de botes de conserva por 24 €. Observa que, si cada bote costara 2 € menos, podría haber comprado un bote más con la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos botes compró y a qué precio?

85. Un ranchero decide repartir una manada de 456 caballos entre sus hijos e hijas. Antes del reparto se enfada con los dos únicos varones, que se quedan sin caballos. Así, cada hija recibe 19 cabezas más. ¿Cuántas hijas tiene el ranchero?

EJERCICIOS DE INECUACIONES

REPASO DE DESIGUALDADES:

1. Dadas las siguientes desigualdades, indicar si son V o F utilizando la recta real. Caso de ser inecuaciones, indicar además la solución mediante la recta IR y mediante intervalos:

a) $4>-3$
b) $5<-6$
c) $4\geq 6$
d) $3<3$
e) $3\leq 3$
f) $x>0$
g) $x\leq -3$
h) $2x<8$

2. Razonar, operando, que la desigualdad $\frac{1}{9}-\frac{5}{12}\geq -\frac{1}{4}$ es falsa. Comprobarlo con la calculadora.

3. Dada la inecuación $2x>5$, estudiar si los siguientes números pueden ser solución: $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5/2$. Indicar, a continuación, su solución general.

INECUACIONES DE 1er GRADO:

4. Dada la inecuación $3x+1>x+5$ se pide, por este orden:

a) Comprobar si son posibles las soluciones $x=5$, $x=0$, $x=-1$

b) Resolverla y dibujar en la recta real la solución.

5. Resolver las siguientes inecuaciones simples:

a) $7x\leq 14$
b) $-2x>6$
c) $3x\leq -9$
d) $-5x\geq -15$
e) $10\leq 5x$
f) $-14\geq 7x$
g) $20\leq -20x$
h) $-11<-11x$
i) $-5x\geq 5$
j) $3x<-3$
k) $-2<-2x$
l) $-7x\leq -7$

6. Resolver las siguientes inecuaciones y representar la solución en la recta real:

a) $2x+6\leq 14$
b) $3x-4\geq 8$
c) $4x+7\leq 35$
d) $3x+5<x+13$
e) $5-3x\geq -3$
f) $4-2x\geq x-5$
$5+3x<4-x$
$2x-3>4-2x$
$6x-3<4x+7$
$3x-1<-2x+4$
$2x+9>3x+5$
l) $2(x-3)+5(x-1)\geq -4$
m) $12(x+2)+5<3(4x+1)+3$
$5(x-2)-4(2x+1)<-3x+3$
$x(x-1)>x^2+3x+1$
$(x+2)(x+3)<(x-1)(x+5)$
$2(x+3)+3(x-1)>2(x+2)$

7. Resolver las siguientes inecuaciones, quitando previamente los denominadores:

a) $\frac{x-1}{2}-\frac{x-4}{3}<1$

b) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}>5-\frac{x}{6}$

c) $\frac{2x-4}{3}+\frac{3x+1}{3}<\frac{2x-5}{12}$

d) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}>x-2$

e) $\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}>\frac{x+14}{2}-2$

f) $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}>2+\frac{3x-1}{15}$

g) $\frac{3x-3}{5}-\frac{4x+8}{2}<\frac{x}{4}-3x$

h) $\frac{x-1}{2}-x<\frac{1-x}{4}-3$

i) $\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{8}-\frac{8-10x}{45}>0$

j) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}-x+2<0$

k) $4x-\frac{3-2x}{4}<\frac{3x-1}{3}+\frac{37}{12}$

l) $\frac{2x+3}{4}>\frac{x+1}{2}+3$

m) $\frac{x-2}{3}-\frac{12-x}{2}>\frac{5x-36}{4}-1$

n) $\frac{x}{18}-\frac{2x+1}{12}\geq\frac{2-4x}{24}$

o) $1-\frac{3x-7}{5}>\frac{5x+4}{15}-\frac{x-1}{3}$

INECUACIONES DE 2º GRADO:

8. Resolver las siguientes inecuaciones y representar la solución en la recta real:

a) $x^2-6x+8\geq0$

b) $x^2-2x-3<0$

c) $x^2-5x+6>0$

d) $x^2-3x-10\leq0$

e) $3x^2-10x+7\geq0$

f) $2x^2-16x+24<0$

g) $x^2-4x+21\geq0$

h) $x^2-3x>0$

i) $x^2-4\geq0$

j) $x^2-4x+4>0$

k) $x^2+6x+9\geq0$

l) $x^2-2x+1<0$

m) $x^2-4x+4\leq0$

n) $6x^2-5x-6<0$

o) $x^2-9x+18<0$

p) $x^2-4x+7<0$

q) $x^2-2x+6\leq0$

r) $2x^2+8x+6<0$

s) $2x^2+10x+12\leq0$

t) $-x^2+5x-4\geq0$

u) $x^2\geq4$

v) $(x+2)(x-5)>0$

w) $(x-3)(x-1)<0$

x) $(4x-8)(x+1)>0$

y) $(2x-4)3x>0$

z) $x^2<9$

α) $9x^2-16>0$

β) $3x^2+15x+21<0$

γ) $2x^2-5x+2<0$

δ) $-2x^2+5x+3>0$

ε) $x^2-9x+20\leq0$

ζ) $-2x^2+2x+15<0$

η) $x^2-5x+4>0$

θ) $3x^2-4x<0$

ι) $x^2+16\geq0$

κ) $2x^2-8>0$

λ) $x^2+x+1\geq0$

μ) $-4x^2+12x-9\leq0$

9. Resolver las siguientes inecuaciones de 2º grado reduciéndolas previamente a la forma general:

a) $x(x+3)-2x>4x+4$

b) $(x-1)^2-(x+2)^2+3x^2\leq-7x+1$

c) $x(x^2+x)-(x+1)(x^2-2)>-4$

d) $(2x-3)^2\leq 1$

e) $4x(x+39)+9<0$

f) $-x(x+2)+3\geq 0$

g) $(3x-2)^2+5x^2\geq(3x+2)(3x-2)$

h) $4x\,(x+3)+(x+2)(x-2)>(2x+3)^2+x-1$

i) $(2x+3)(2x-3)+5x>2(x+1)-1$

j) $(2x+2)(2x-2)\leq(x+1)^2+2(x+1)(x-1)$

k) $(2x+3)(2x-3)\leq(2x-3)^2+30x$

l) $(2x-3)^2+x^2>(3x+1)(3x-1)-6$

m) $(x+3)(x-3)-(x-2)^2<6+x(x-5)$

n) $(2x+1)(x+1)\leq(x+2)(x-2)+3$

o) $\frac{(2x+1)(2x-1)}{6}-\frac{(x+1)^2}{9}\leq\frac{x(7x-8)-1}{18}$

p) $\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(x+1)(x-1)}{3}<\frac{4x^2-19x+31}{6}$

q) $\frac{(x+2)(x-2)}{12}+\frac{2x+1}{18}-\frac{6-5(x-2)}{6}\leq\frac{3(x-1)^2+11}{36}$

r) $\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{(x-3)^2}{3}\geq\frac{x(11-x)}{6}$

s) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{5x+6}{6}<\frac{(x+3)(x-3)}{3}+6$

t) $\frac{(x-2)(x+4)}{2}-\frac{(x-2)^2}{6}\geq x-2$

u) $\frac{(x+1)(x-1)+3}{3}-\frac{(x-1)^2+2x}{4}\leq 1-\frac{x+7}{12}$

v) $\frac{(3x+1)(3x-1)}{6}+4x-5\geq\frac{(x+2)(x-2)}{2}+\frac{11}{6}$

w) $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{2x+1}{6}\geq 1-\frac{(x+1)(x-1)}{2}$

x) $\frac{(x+1)(x-1)}{2}-\frac{(x^2+3)(x^2-3)}{6}=\frac{1}{3}$

10. ¿Por qué no se puede hacer lo siguiente: $x^2\geq 4\Rightarrow x\geq 2$? ¿Cuál sería la forma correcta de proceder?

INECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO >2:

11. Resolver las siguientes inecuaciones aplicando el método más apropiado en cada caso:

a) $x^3-5x^2+2x+8\geq 0$]

b) $x^3-x^2-6x<0$

c) $x^3-2x^2-5x+6\geq 0$

d) $x^4-1>0$

e) $\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{x^2}{2}<\frac{(x^2-2x)(x^2+2x)}{4}-2$

f) $x^3-6x^2+32\leq 0$

g) $x^3-7x-6\geq 0$

INECUACIONES FACTORIZADAS:

12. Resolver las siguientes inecuaciones aplicando el método más apropiado en cada caso:

a) $(x^2-x-2)\,(x^2+9)>0$

b) $(x^2+2x-15)\,(x+1)<0$

c) $(2x+8)\,(x^3-4x)\,(x^2-4x+4)\leq 0$

d) $x^2\,(x-2)\leq 0$

e) $x^2\,(x-2)\leq 0$

f) $(x+1)^2\,(x-3)<0$

g) $x^2\,(2x-5)\,(x+2)\geq 0$

h) $(x-3)\,(x+5)\,(x^2+1)>0$

i) $(x+2)^2\,(x-3)^2>0$

j) $(x-5)\,(x^2+4)\leq 0$

SISTEMAS DE INECUACIONES DE 1^{er} GRADO:

13. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones de $1^{\underline{er}}$ grado con una incógnita, indicando la solución de dos formas distintas: mediante intervalos, y representando en la recta real:

a) $\left.\begin{array}{r}-2x-6\leq 0\\ 3x+3\leq 0\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}1-x<2-3x\\ 3+x<2+5x\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}2x+6\leq 0\\ -x+1\leq 0\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l}3x<9\\ x\geq \frac{1}{2}\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}2x+5<3x\\ -x+8<4\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r}2x>8\\ 2x\leq 4\end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r}2x\geq 4x-2\\ 5x-4<6x-1\end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r}3x-5\geq 2x-6\\ 4x+1<2x+7\end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r}7x+2>4x+5\\ 5x-1\leq 3x+3\end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{r}3x-1<5x-5\\ x\geq 2x+1\end{array}\right\}$

k) $\left.\begin{array}{l}2x+1\leq x+3\\ 2x+3\leq 3x+1\end{array}\right\}$

l) $\left.\begin{array}{l}5x+2\geq 4x+5\\ 3x-7<x+3\end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{l}3x+2\geq x-4\\ 5-x\geq -2\end{array}\right\}$

n) $\left.\begin{array}{r}2(x-3)+6\geq 2x\\ x+5\leq 3x+2-2x+7\end{array}\right\}$

o) $\left.\begin{array}{r}2(x-3)+6>2x\\ x+5\leq 3x+2-2x+7\end{array}\right\}$

p) $\left.\begin{array}{r}4x+1<2x+9\\ x+8<5-2x\end{array}\right\}$

q) $\left.\begin{array}{l}5-x\leq 4x-4\\ 1-2x\geq -3\end{array}\right\}$

r) $\left.\begin{array}{r}3(2x-1)-(5+2x)\geq -3\\ 2[3(x-5)-x+1]<1\end{array}\right\}$

s) $\left.\begin{array}{l}(2x-3)^2-(x+1)(x-1)\le 3x^2\\ (x+2)^2-(x-2)^2>2x+1\end{array}\right\}$

t) $\left.\begin{array}{l}2x-10>-x+2\\ 12-4x>-3x+2\\ 3(x+2)\ge 2(x+6)\end{array}\right\}$

u) $\left.\begin{array}{l}2x+\frac{x}{4}\le\frac{9}{4}-\frac{x-1}{2}\\ 2x-1-2(2x+1)<1\end{array}\right\}$

v) $\left.\begin{array}{l}2(3x-1)-(2+4x)>x\\ 2-\frac{3x+1}{2}\le x-\frac{x+2}{3}\end{array}\right\}$

w) $\left.\begin{array}{l}\frac{2x-3}{2}-\frac{x-1}{3}>6\\ \frac{x-5}{4}+\frac{x}{8}\le 2\end{array}\right\}$

x) $\left.\begin{array}{l}\frac{2(3x-5)}{3}-\frac{3(x-2)}{2}>1\\ \frac{2x+3(x-1)}{2}\ge x-1\end{array}\right\}$

y) $\left.\begin{array}{l}2(x+1)+2x\ge 3x+1-(x+3)\\ 2(2x+1)-2<3(x+1)-x\end{array}\right\}$

z) $\left.\begin{array}{l}5x+\frac{4x}{3}+2>\frac{10x}{3}+5\\ 2-\frac{x-3}{4}\le 1-\frac{x}{2}\end{array}\right\}$

α) $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{2}-\frac{6-x}{4}<x+1\\ 3-\frac{5x-1}{10}\ge\frac{x-1}{5}-\frac{x-3}{2}\end{array}\right\}$

β) $\left.\begin{array}{l}\frac{x-1}{2}+\frac{2(x+1)}{5}\ge -1\\ \frac{3x+1}{4}-\frac{x}{6}<2\end{array}\right\}$

(*) γ) $\left.\begin{array}{l}x(x-1)\le 6\\ x^2+(x+2)(x-2)>(x+2)(x-1)\end{array}\right\}$

(*) δ) $\left.\begin{array}{l}x(x-1)<2\\ 5(x+1)\ge 4(x+2)-2\end{array}\right\}$

14. Considerar el sistema $\left.\begin{array}{l}-6-x<-3x+2\\ 2x+8<5-x\end{array}\right\}$ ¿Cómo podemos saber, sin resolverlo, si x=-2 y x=3 son solución?

15. Resolver las siguientes **inecuaciones con cocientes**:

a) $\frac{x-1}{x-4}>0$

b) $\frac{2x-3}{x+1}\ge 1$

c) $\frac{5x-8}{x-3}\le 4$

d) $\frac{3}{2x-6}\ge 2$

e) $2<\frac{x+6}{x-2}$

f) $\frac{5}{x+3}<0$

g) $\frac{-3}{2x-6}\ge 0$

h) $\frac{x+3}{2x-1}>-\frac{1}{2}$

i) $\frac{x+3}{x-7}\le 2$

j) $\frac{x+3}{x-7}\le\frac{1}{2}$

k) $\frac{x}{x+5}>x$

l) $1\le\frac{2x+3}{x-1}$

16. ¿Por qué no se puede hacer $\frac{x-1}{x-4}>0\Rightarrow x-1>0$? ¿Cómo se resuelve correctamente?

<u>NOTA</u>: Las inecuaciones de 1^er^ grado con dos incógnitas y los sistemas de inecuaciones de 1^er^ grado con dos incógnitas los resolveremos gráficamente al final del curso, cuando veamos el tema de rectas.

IGUALDADES NOTABLES	EJERCICIOS

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

■ Desarrollar las siguientes expresiones utilizando la identidad notable correspondiente, y simplificar. Obsérvense los primeros ejemplos:

1. $(x+5)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = \boxed{x^2 + 10x + 25}$

2. $(x-6)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6 + 6^2 = \boxed{x^2 - 12x + 36}$

3. $(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = \boxed{x^2 - 4}$

4. $(x+2)^2 =$

5. $(x-3)^2 =$

6. $(x+4)(x-4) =$

7. $(x+3)^2 =$

8. $(x-4)^2 =$

9. $(x+5)(x-5) =$

10. $(a+4)^2 =$

11. $(a-2)^2 =$

12. $(a+3)(a-3) =$

13. $(2x+3)^2 =$

14. $(3x-2)^2 =$

15. $(2x+1)(2x-1) =$

16. $(3x+2)^2 =$

17. $(2x-5)^2 =$

18. $(3x+2)(3x-2) =$

19. $(4b+2)^2 =$

20. $(5b-3)^2 =$

21. $(b+1)(b-1) =$

22. $(4a+5)^2 =$

23. $(5a-2)^2 =$

24. $(5a+2)(5a-2) =$

25. $(4y+1)^2 =$

26. $(2y-3)^2 =$

27. $(2y+3)(2y-3) =$

28. $(3x+4)^2 =$

29. $(3x-1)^2 =$

30. $(3x+4)(3x-4) =$

31. $(5b+1)^2 =$

32. $(2x-4)^2 =$

33. $(4x+3)(4x-3) =$

34. Carlos, un alumno de 3º de ESO, indica lo siguiente en un examen:

$$(x+2)^2 = x^2 + 4$$

Razonar que se trata de un grave error. ¿Cuál sería la expresión correcta?

EJERCICIOS de POLINOMIOS

1. Calcular el **valor numérico del polinomio** P(x) para el valor de x indicado:

a) $P(x)=x^2+1$, para $x=1$

b) $P(x)=x^3+1$, para $x=-1$

c) $P(x)=x^2+x+2$, para $x=2$

d) $P(x)= -x^2-x-2$, para $x= -2$

2. En cada caso, hallar k para el valor numérico indicado:

a) $P(x)=2x^2-6x-k$, siendo $P(1)=7$

b) $P(x)= -2x^4-6x^3+5x-k$, siendo $P(-2)=35$

c) $P(x)=-\frac{1}{2}x^6-5x^4+5x^2-k$, siendo $P(-4)=58$

d) $P(x)=-8x^4-\frac{1}{4}x^2-12x+k$, siendo $P(1/2)=125$

3. **Sumar** convenientemente **monomios semejantes**:

a) $2x-5x+7x+x=$

b) $3x^2-7x^2+x^2-2x^2=$

c) $2x^2y-3x^2y+5x^2y=$

d) $-3xy^2+xy^2-6xy^2+8xy^2=$

e) $3x^2y^2-xy^2+5x^2y-x^2y^2+2xy^2-x^2y=$

f) $-2x^3yz+3x^3yz+5x^3yz-x^3yz=$

g) $2ab^2-5a^2b-\frac{2}{3}ab^2-ab^2+\frac{1}{2}a^2b=$

h) $-2xy^3+3x^3y+5xy^3-xy^3=$

*(Soluc: **a)** 5x; **b)** -5x²; **c)** 4x²y; **d)** 0; **e)** 2x²y²+4x²y+xy²; **f)** 5x³yz; **g)** $\frac{1}{3}ab^2-\frac{9}{2}a^2b$; **h)** 2xy³+3x³y)*

4. Dados $P(x)=2x^5-3x^4+3x^2-5$ y $Q(x)=x^5+6x^4-4x^3-x+7$, hallar $P(x)+Q(x)$ y $P(x)-Q(x)$

5. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

6. Efectuar los siguientes **productos** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a) $(-2x^3)\cdot\left(\frac{4}{5}x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)=$

b) $\left(-\frac{5}{7}x^7\right)\cdot\left(\frac{3}{5}x^2\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}x\right)=$

c) $5x^3\cdot 3x^2y\cdot(-4xz^3)=$

d) $-3ab^2\cdot 2ab\cdot(-\frac{2}{3}a^2b)=$

e) $(3x^4-2x^3+2x^2+5)\cdot 2x^2=$

f) $\left(-2x^5+3x^3-2x^2-7x+1\right)\cdot\left(-3x^3\right)=$

g) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{5}x-\frac{5}{4}\right)\cdot 12x^2=$

h) $\left(\frac{1}{2}ab^3-a^2+\frac{4}{3}a^2b+2ab\right)\cdot 6a^2b=$

7. **Extraer** el <u>máximo</u> **factor común** posible:

a) $4x^2-6x+2x^3$

b) $12x^4y^2+6x^2y^4-15x^3y$

c) $-3xy-2xy^2-10x^2yz$

d) $-3x+6x^2+12x^3$

e) $2ab^2-4a^3b+8a^4b^3$

f) $2x^3+4x^2-8x$

g) $6x^3y^2-3x^2yz+9xy^3z^2$

h) $-2x(x-3)^2+4x^2(x-3)$

8. Efectuar los siguientes **productos**:

a) $(3x^2+5x-6)\ (8x^2-3x+4) =$

b) $(5x^3-4x^2+x-2)\ (x^3-7x^2+3) =$

c) $(2x^4-3x^2+5x)\ (3x^5-2x^3+x-2) =$

d) $(ab^2+a^2b+ab)\ (ab-ab^2) =$

e) $(-x^6+x^5-2x^3+7)\ (x^2-x+1) =$

f) $(x^2y^2-2xy)\ (2xy+4) =$

g) $10\ (x-5+y-5) + (10-x)\ (10-y) =$

h) $(x^2-4x+3/2)\ (x+2) =$

i) $(x^2+5x/2+35/3)\ (x-6) =$

j) $(2x^2+4x+2)\ (x-1/2) =$

9. Efectuar las siguientes **operaciones combinadas**:

a) $(2x^2+x+3/2)\ (2x^2-3) + 8x+7/2=$

b) $(3x^3+5x^2/2-3x+13)\ (2x^2+2) - (-6x+24)=$

c) $(3x^2-6x+1)\ (x^3-2x/3+2) + 14x/3=$

d) $-x/3+1/3 + (2x^2-x/3-2/3)\ (3x^2+2) =$

10. Dados los polinomios del ejercicio 5, hallar:

a) $[R(x)]^2$ **b)** $P(x)-Q(x)\cdot R(x)$ **c)** $P(x)\cdot[Q(x)+R(x)]$ **d)** $P(x)\cdot Q(x)\cdot R(x)$

11. Desarrollar, aplicando las **igualdades notables**:

a) $(x+2)^2=$

b) $(x-3)^2=$

c) $(x+2)\ (x-2)=$

d) $(3x+2)^2=$

e) $(2x-3)^2=$

f) $(5x+4)\ (5x-4)=$

g) $(x^2+5)^2=$

h) $(x^3-2)^2=$

i) $(x^2-1)\ (x^2+1)=$

j) $(2x^2+3x)^2=$

k) $(2x^2-3)^2=$

l) $(-x-3)^2=$

m) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=$

n) $\left(2a-\frac{3}{2}\right)^2=$

o) $\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)=$

p) $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2=$

q) $\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{4}\right)^2=$

r) $\left(2+\frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3}+2\right)=$

s) $\left(\frac{3x}{2}-\frac{1}{x}\right)^2=$

t) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)=$

u) $\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2=$

12. Operar y simplificar:

a) $(x+1)^2+(x-2)(x+2)=$

b) $(3x-1)^2-(2x+5)(2x-5)=$

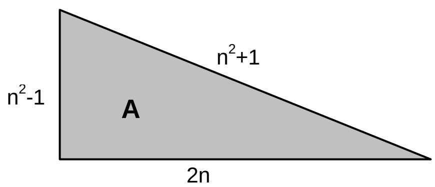
c) $(2x+3)(-3+2x)-(x+1)^2=$

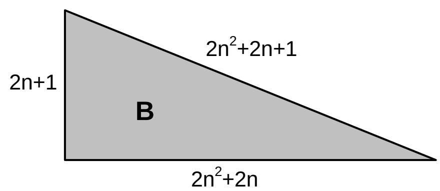
d) $(-x+2)^2-(2x+1)^2-(x+1)(x-1)=$

e) $-3x+x(2x-5)(2x+5)-(1-x^2)^2=$

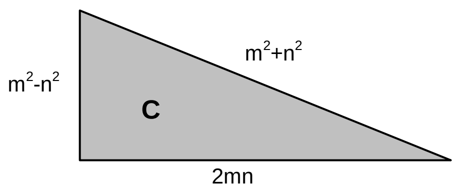
f) $(3x-1)^2-(-5x^2-3x)^2-(-x+2x^2)(2x^2+x)=$

13. El matemático griego Pitágoras conocía las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud entera, llamadas **ternas pitagóricas**, sin más que dar valores a $n\in IN$:



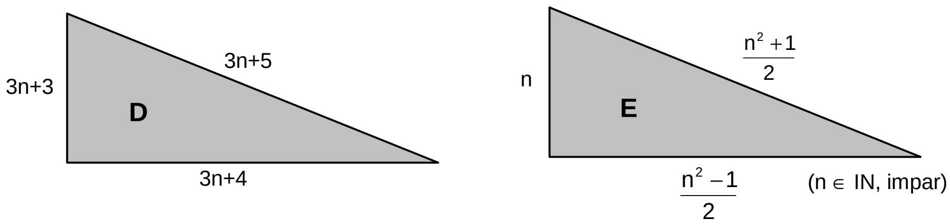


Por su parte, Euclides conocía la siguiente fórmula general, que engloba a las dos anteriores:



$(m,n\in IN,\ m>n)$

Finalmente, he aquí otras dos ternas pitagóricas de autor desconocido:



Demostrar la veracidad de estas fórmulas. Generar algunos casos concretos.

14. Demostrar que $(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

15. Desarrollar, aplicando el **triángulo de Tartaglia**:

a) $(x+2)^4$

b) $(x^2+3)^6$

c) $(2x^2+3y)^6$

d) $(2x^3+5)^5$

e) $(2x^4+5x)^5$

f) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$

g) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^5$

h) $(a-b)^5$

i) $(x-3)^3$

j) $(3x-2)^4$

k) $(x^2-3x)^5$

l) $(3x-2y)^6$

m) $(2x^2-4)^4$

n) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^5$

o) $(2-3x^2)^5$

p) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^4$

q) $(2x-3)^6$

r) $\left(\frac{x}{2}-3\right)^6$

s) $(-x-1)^4$

t) $(2x-1)^5$

16. Efectuar los siguientes **cocientes** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a) $\frac{4x^3}{2x^2}=$

b) $\frac{8x^4}{-2x^2}=$

c) $\frac{7x^5}{2x^3}=$

d) $\frac{-8x^3}{2x^2}=$

e) $\frac{-3x^7}{-9x^4}=$

f) $\frac{6x^3y^4}{2x^2y}=$

g) $\frac{-9a^4b^3c^2}{3ab^2c}=$

h) $\frac{6x^5-9x^2+3x}{3x}=$

i) $\frac{-12x^4+6x^3-4x^2}{-2x^2}=$

j) $\frac{-6x^8-7x^4-\frac{3}{4}x^3}{-\frac{5}{3}x^3}=$

k) $\frac{-8x^9+\frac{3}{2}x^5-x^4}{-\frac{3}{7}x^4}=$

l) $(-18x^3yz^3):(6xyz^3)=$

m) $\frac{-3a(a^3b)+5a^4b}{-a^2b}=$

n) $\frac{-3xy^2(-2x^3y)}{4x^2y}=$

17. Efectuar los siguientes **cocientes**, indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar el resultado mediante la regla D=d·C+R:

a) $x^4-x^3+7x^2+x+15 \;\lfloor\; x^2+2$

b) $2x^5-x^3+2x^2-3x-3 \;\lfloor\; 2x^2-3$

c) $6x^4-10x^3+x^2+11x-6 \;\lfloor\; 2x^2-4x+3$

d) $x^3+2x^2+x-1 \;\lfloor\; x^2-1$

e) $8x^5-16x^4+20x^3-11x^2+3x+2 \;\lfloor\; 2x^2-3x+2$

f) $x^4+3x^3-2x+5 \;\lfloor\; x^3+2$

g) $x^5-2x^4+3x^2-6 \;\lfloor\; x^4+1$

h) $x^2 \;\lfloor\; x^2+1$

i) $3x^6+2x^4-3x^2+5 \;\lfloor\; x^3-2x+4$

j) $x^8 \;\lfloor\; x^2+1$

k) $x^3-4x^2+5x-8 \;\lfloor\; x-2$

l) $2x^5+3x^2-6 \;\lfloor\; x+3$

m) $x^4-7x^3+8x^2-2 \;\lfloor\; x-1$

n) $3x^5-x^4+8x^2-5x-2 \;\lfloor\; x^2-x+1$

o) $5x^4-2x^3+x-7 \;\lfloor\; x^2-1$

p) $4x^5-3x^3+5x^2-7 \;\lfloor\; 2x^2-3x+5$

q) $9x^3+3x^2-7x+2 \;\lfloor\; 3x^2+5$

r) $4x^4-3x^2+5x-7 \;\lfloor\; 2x^2+x-3$

s) $4x^5+3x^3-2x^2+5 \;\lfloor\; 2x^2-x+3$

t) $6x^4+5x^2-3x+8 \;\lfloor\; 3x^3-2x-3$

u) $4x^4+2x^3-3x^2+5x-1 \;\lfloor\; 2x^2-3$

v) $8x^4+3x^3+2x-2 \;\lfloor\; 4x^2+x-3$

w) $2x^5-x^3+3x-9 \;\lfloor\; 2x^2-x+2$

x) $6x^3-3x^2+2x-5 \;\lfloor\; 3x-2$

y) $4x^4-x^3+x+5 \;\lfloor\; 2x^2-x+3$

z) $6x^4+3x^3-5x^2+x-8 \;\lfloor\; 3x^2-5x+2$

α) $8x^4-3x^2+7x-5 \;\lfloor\; 4x^2-3x+2$

β) $6x^5+5x^4+31x^2+2 \;\lfloor\; 2x^2+2$

γ) $3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2 \;\lfloor\; 3x^2-6x+1$

δ) $6x^4-x^3+2x^2-x-1 \;\lfloor\; 3x^2+2$

ε) $4x^4 \;\lfloor\; 2x^2-1$

ζ) $4x^4+x^3-x+1 \;\lfloor\; 2x^2-1$

18. Inventar una división de polinomios cuyo cociente sea $C(x)=x^2-3x+1$, el resto sea $R(x)=x-1$ y el dividendo un polinomio de 4º grado.

19. Efectuar las siguientes divisiones mediante la **regla de Ruffini**, indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar el resultado:

a) $x^4-7x^3+8x^2-2 \;\underline{|\; x-1}$

b) $x^3-4x^2+5x-8 \;\underline{|\; x-2}$

c) $2x^4+3x^3-4x^2+x-18 \;\underline{|\; x-2}$

d) $2x^5+3x^2-6 \;\underline{|\; x+3}$

e) $3x^4-10x^3-x^2-20x+5 \;\underline{|\; x-4}$

f) $2x^4-10x+8 \;\underline{|\; x+2}$

g) $10x^3-15 \;\underline{|\; x+5}$

h) $x^3-2x^2-13x/2+3 \;\underline{|\; x+2}$

i) $x^3-7x^2/2-10x/3-70 \;\underline{|\; x-6}$

j) $x^4-2x^3/3+x^2/2+3x+1 \;\underline{|\; x+3}$

k) $x^3+2x^2+3x+1 \;\underline{|\; x-1}$

l) $x^4-2x^3+x^2+3x+1 \;\underline{|\; x-2}$

m) $x^3+x^2+x+1 \;\underline{|\; x+1}$

n) $2x^4+x^3-2x^2-1 \;\underline{|\; x+2}$

o) $2x^4-7x^3+4x^2-5x+6 \;\underline{|\; x-3}$

p) $x^5+1 \;\underline{|\; x-1}$

q) $2x^3+3x^2-1 \;\underline{|\; x-1/2}$

r) $3x^3+2x^2+2x-1 \;\underline{|\; x-1/3}$

s) $x^4+x^3-x^2+x-1 \;\underline{|\; x+2}$

t) $2x^3-x^2-x-3 \;\underline{|\; 2x-3}$

(Ayuda: Dividir entre 2 ambos términos)

u) $ax^3-3a^2x^2+2a^3x+1 \;\underline{|\; x-a}$

RECORDAR:

TEOREMA DEL RESTO: "El resto de la división de P(x) por x-a coincide con el valor numérico P(a)"

Ejemplo: Al efectuar la división de $P(x)=x^2+x-2$ entre x-1 se obtiene resto cero, como cabía esperar, puesto que P(1)=0

Utilidad: El th. del resto permite predecir, <u>sin necesidad de efectuar la división</u>, si se trata de una división exacta.

20. Comprobar el **teorema del resto** mediante las divisiones anteriores.

21. Dado $P(x)=2x^2-x-3$, comprobar si es divisible por x+1 o por x-2 mediante el teorema del resto. Comprobar a continuación efectuando la división ¿Cuál es el otro factor por el que es divisible?

22. Determinar, aplicando el teorema del resto, el valor de **a** para que el resto de la división $-x^5+3x^4+ax^3+9x^2+2x-7 \,\lfloor\, x-3$ sea -1; comprobar, a continuación, el resultado obtenido haciendo la división.

23. Averiguar, sin efectuar la división, cuáles de las siguientes divisiones son exactas:

a) $x^3-3x^2+2x-10 \,\lfloor\, x-4$

b) $x^3-x^2+x+14 \,\lfloor\, x+2$

c) $x^6-1 \,\lfloor\, x-1$

d) $x^5-3x^3+2x \,\lfloor\, x-4$

24. Hallar, de dos formas distintas, el valor de **m** en cada caso para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $x^3+8x^2+4x+m \,\lfloor\, x+4$

b) $2x^3-10x^2+mx+25 \,\lfloor\, x-5$

c) $2x^4+mx^3-4x^2+40 \,\lfloor\, x-2$

d) $mx^2-3x-744 \,\lfloor\, x-8$

e) $x^2+4x-m \,\lfloor\, x+3$

f) $x^3-5x^2+m \,\lfloor\, x-1$

g) $5x^4+2x^2+mx+1 \,\lfloor\, x-3$

h) $x^5-4x^3+mx^2-10 \,\lfloor\, x+1$

RECORDAR:

TEOREMA DEL FACTOR: "P(x) es divisible por x-a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x-a) si se cumple que P(a)=0"

Ejemplo: Dado $P(x)=x^2+x-2$, como P(1)=0, podemos asegurar que P(x) es divisible por x-1

De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

(Nótese que el th. del factor es a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica)

25. Comprobar, sin efectuar la división, que $x^{99}+1 \,\lfloor\, x+1$ es exacta.

26. Comprobar que x^2-2x-3 es divisible por x-3 sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible?

27. Estudiar si $P(x)=x^2+x-2$ es divisible por x+2 y/o por x-3, sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible?

28. Estudiar si $P(x)=x^5-32$ es divisible por x-2 sin efectuar la división (Comprobar el resultado obtenido haciendo la división).

29. Sin necesidad de efectuar la división, ¿podemos asegurar que el polinomio $P(x)=x^{50}+x^{25}-x-1$ es divisible por x-1? ¿Por qué?

30. TEORÍA: Razonar, mediante ejemplos, que el teorema del factor viene a ser a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS:

31. Dados los siguientes polinomios cuadráticos se pide:

i) Obtener sus raíces y comprobarlas.

ii) A partir de las raíces anteriores, factorizarlos.

iii) Comprobar dicha factorización.

a) x^2-5x+6 **b)** x^2-2x-8 **c)** x^2-6x+9 **d)** $4x^2+23x-6$ **e)** x^2+x+1 **f)** $6x^2-7x+2$

32. Dados los siguientes polinomios se pide**:** **i)** Obtener sus raíces por Ruffini. **ii)** Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en P(x) **iii)** Factorizar P(x) a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización:

a) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$

b) $P(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24$

c) $P(x)=x^3+x^2-5x+3$

d) $P(x)=x^4-2x^2+1$

e) $P(x)=6x^4+x^3-25x^2-4x+4$

33. Sabiendo que una de sus raíces es $x=1/2$, factorizar $P(x)=2x^4-3x^3+3x^2-3x+1$

34. Dadas las siguientes ecuaciones polinómicas se pide:

i) Resolverlas por Ruffini.

ii) Comprobar las soluciones obtenidas sustituyéndolas en la ecuación.

iii) A partir de sus raíces, factorizar el polinomio y comprobar dicha factorización.

a) $x^3-6x^2+11x-6=0$

b) $x^3+x^2-9x-9=0$

c) $x^4-2x^3-17x^2+18x+72=0$

d) $x^4-x^3-13x^2+25x-12=0$

e) $x^4-x^3+2x^2+4x-8=0$

f) $3x^3+x^2-8x+4=0$

g) $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$

h) $x^4-5x^2+4=0$

i) $x^4+2x^3-5x^2-6x=0$

j) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$

k) $x^3-5x^2-5x-6=0$

l) $x^5-2x^4-x+2=0$

m) $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$

n) $6x^4+11x^3-28x^2-15x+18=0$

o) $x^3+3x^2-10x-24=0$

p) $x^3+2x^2-15x-36=0$

q) $x^3-3x^2+3x-1=0$

35. Dados los siguientes polinomios, se pide:

i) Obtener sus raíces por Ruffini.

ii) Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en P(x)

iii) Factorizar P(x) a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización.

a) $P(x)=x^4+4x^3+7x^2+8x+4$

b) $P(x)=6x^3+7x^2-9x+2$

c) $P(x)=x^4-x^3+2x^2-4x-8$

d) $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$

e) $P(x)=x^4-3x^3+5x^2-9x+6$

f) $P(x)=x^4-5x^2+4$

g) $P(x)=x^4-5x^2-36$

h) $P(x)=x^4-2x^3-2x^2-2x-3$

i) $P(x)=x^4-6x^2+7x-6$

j) $P(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$

k) $P(x)=12x^4-25x^3+25x-12$

l) $P(x)=2x^4-x^3+6x^2-7x$

m) $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$

n) $P(x)=x^5-x^3-x^2+1$

o) $P(x)=x^4-2x^3-7x^2+5x-6$

p) $P(x)=3x^4-9x^3-6x^2+36x-24$

q) $P(x)=6x^4+11x^3-13x^2-16x+12$

r) $P(x)=x^6+6x^5+9x^4-x^2-6x-9$

CONSECUENCIA:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: "Un polinomio de grado *n* tiene <u>a lo sumo</u> *n* raíces reales"

36. Resolver la ecuación $2x^3-3x^2=-\frac{1}{2}$, sabiendo que una de sus raíces es 1/2 *(Soluc: x=±1/2, 3/2)*

37. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x-2}=x$

38. ¿Serías capaz de resolver la ecuación $\sqrt[3]{x}=2\sqrt{x}-1$? Aunque es un poco complicada para este curso, puedes resolverla con los conocimientos ya adquiridos: tendrás que aplicar binomio de Newton y Ruffini… *(Sol: x=1)*

39. Resolver: **a)** $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\\ y-x^2=1\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l}y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\\ y=\sqrt{x^3}\end{array}\right\}$

40. Inventar una ecuación polinómica que tenga únicamente por soluciones x=-2, x=1 y x=3

41. Inventar, de dos formas distintas, una ecuación polinómica que tenga únicamente como raíces 1 y 2

42. Determinar el polinomio de grado 3 que verifica: P(-1)=P(2)=P(-3)=0 y P(-2)=18

43. Un polinomio de grado 3, ¿cuántas raíces puede tener como mínimo? Razonar la respuesta.

FRACCIONES ALGEBRAICAS EJERCICIOS

1. Utilizando identidades notables, desarrollar las siguientes expresiones:

a) $(x+2)^2$
b) $(x-2)^2$
c) $(x+2)(x-2)$
d) $(2x+3)^2$
e) $(3x-5)^2$
f) $(3x+2)(3x-2)$
g) $(ax+1)^2$
h) $(ax-b)^2$
i) $(3x-2)^2$
j) $(2x+5)(2x-5)$
k) $(-1+2x)^2$
l) $(-2-x)^2$
m) $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$
n) $\left(x+\sqrt{2}\right)^2$
o) $(x^2+x+2)^2$

2. **a)** Razonar por qué $(A-B)^2$ y $(B-A)^2$ dan el mismo resultado. **b)** Ídem con $(A+B)^2$ y $(-A-B)^2$

3. Averiguar de qué expresiones notables proceden los siguientes polinomios (Fíjate en el 1$^{\underline{er}}$ ejemplo):

a) $x^2+2x+1=(x+1)^2$
b) x^2-4x+4
c) x^2-1
d) x^2+6x+9
e) $x^2-8x+16$
f) x^2-4
g) $9-x^2$
h) $x^2+2ax+a^2$
i) $3x^2+6x+3$
j) x^2-a^2
k) $a^2x^2-b^2$
l) x^2-16
m) $x^2+10x+25$
n) x^2-2
o) $4x^2-9$
p) $a^2x^2-2ax+1$
q) x^4-16
r) $4x^2+4x+1$
s) x^2-6x+9
t) x^2-25
u) $25x^2-16$

4. Utilizar **identidades notables** para simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$

c) $\dfrac{2x+4}{2x-4}$

d) $\dfrac{2x^2-2}{3x^2+6x+3}$

e) $\dfrac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$

f) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy}$

g) $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

h) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

i) $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-a^2}$

j) $\dfrac{a^2x^2-1}{a^2x^2+2ax+1}$

RECORDAR:

TEOREMA DEL FACTOR: "P(x) es divisible por x-a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x-a) si se cumple que P(a)=0"

Ejemplo: Dado $P(x)=x^2+x-2$, como $P(1)=0$, podemos asegurar que P(x) es divisible por x-1

De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

5. Utilizar el **teorema del factor** para simplificar, siempre que sea posible, las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$

b) $\dfrac{x-1}{2x^2-3x+1}$

c) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

d) $\dfrac{x^2-1}{5x^2+4x-9}$

e) $\dfrac{x+2}{x^2-1}$

f) $\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$

g) $\dfrac{2x-2}{x^2+x-2}$

h) $\dfrac{x-3}{x^2+5x+6}$

i) $\dfrac{x-1}{5x^2+4x-9}$

j) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

k) $\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4}$

l) $\dfrac{x^2-a^2-a}{x^2-a^2}$

6. Averiguar, **factorizando** previamente numerador y denominador, si es posible simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

b) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$

c) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$

d) $\dfrac{2x^2-3x+1}{2x^2-x-1}$

e) $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-2x^2-x+2}$

f) $\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+1}$

g) $\dfrac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3-4x^2+x+6}$

h) $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$

i) $\dfrac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$

j) $\dfrac{x^3-x^2-10x-8}{x^2+3x-4}$

k) $\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3+4x^2+x-6}$

l) $\dfrac{4x^3+7x^2+2x-1}{x^3+3x^2+3x+1}$

m) $\dfrac{2x^3-x^2-8x+4}{x^3+8}$

n) $\dfrac{4x^3-2x^2-4x+2}{2x^3-5x^2+4x-1}$

o) $\dfrac{2x^3-x^2-2x+1}{2x^3-5x^2+4x-1}$

p) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-3x^2+4x-12}$

q) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}$

r) $\dfrac{4x^3-8x^2-x+2}{2x^3-x^2-8x+4}$

s) $\dfrac{x^2-4}{x^3-7x-6}$

7. Efectuar las siguientes sumas y restas reduciendo previamente a común denominador y dando el <u>resultado simplificado</u> (NOTA: Con un ***** se indican aquellos casos en los que, al final del proceso de sumas y restas de F.A., se obtiene una expresión que se puede simplificar):

a) $\dfrac{3}{2x+4}+\dfrac{2x}{x^2-4}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x^3}-\dfrac{2x}{x^2+7}$

c) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-x-2}$

d) $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}$

e) $\frac{2x}{x^2-4}+\frac{x+1}{4x-8}$

f) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}$

*** g)** $\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$

h) $1-\frac{x}{y}$

i) $x-\frac{x^2-1}{x}$

j) $\frac{3x-2}{x^2-1}+\frac{x+2}{x-1}$

k) $\frac{7x}{6x+12}-\frac{x+5}{2x^2-8}$

l) $\frac{x+3}{x^2+1}+\frac{2x}{x-3}$

m) $\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+2}{x+1}$

n) $\frac{3}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x^2-1}$

o) $\frac{x+2y}{x^2-y^2}+\frac{2x-5y}{x-y}$

p) $\frac{x-y}{xy}+\frac{y-z}{yz}$

q) $x+\frac{1}{x}$

r) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$

*** s)** $\frac{1}{x-2}-\frac{x^2+4x+8}{(x+2)^2(x-2)}+\frac{1}{x^2-4}$

*** t)** $\frac{x-2}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{6x-x^2}{x^2-4}$

*** u)** $\frac{1}{x-1}-\frac{3x+3}{x^2+x-2}+\frac{1}{x+2}$

v) $\frac{x-1}{x^2-4}-\frac{x-2}{x^2+2x}+\frac{1}{x-2}$

*** w)** $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}-\frac{12}{x^2-4}$

x) $\frac{x-2}{x^2+x-2}-\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{x+3}{x^2-3x+2}$

y) $\frac{x^2-x+9}{x^3-9x}+\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x}$

z) $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-1}-\frac{1-x}{x^2-1}$

α) $\frac{4}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{x+1}{x-1}$

β) $\frac{3}{2x-4}+\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2x^2-8}$

γ) $\frac{x-x^2}{1-x^2}+\frac{1+x}{x^2+2x+1}-\frac{1-2x}{1+x}$

δ) $\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2x+1}{x^2-1}+\frac{x}{(x+1)^2}$

ε) $\frac{1}{x^2-9x+20}-\frac{1}{x^2-11x+30}+\frac{1}{x^2-10x+24}$

8. Efectuar los siguientes productos y cocientes, dando el <u>resultado simplificado</u>:

a) $\frac{3x-1}{x^2-9}\cdot\frac{x+3}{2x}$

b) $\frac{x+1}{x^2-2}:\frac{x^2+2}{x-1}$

c) $\dfrac{\frac{x+1}{x+2}}{\frac{x+1}{x+3}}=$

d) $\dfrac{\frac{3x+1}{x^2-4}}{\frac{x}{x^2-4x+4}}=$

e) $\frac{3x-1}{x^2}\cdot\frac{x+1}{x^5}$

f) $\dfrac{\frac{x+1}{x^2-2}}{\frac{x-1}{x^2+2}}=$

g) $\dfrac{\frac{x-1}{x^2-1}}{\frac{x+1}{x^2+2x+1}}=$

h) $\dfrac{\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}}{\frac{x-a}{x+a}}=$

i) $\dfrac{9\,\frac{x+2y}{3}+6z}{3}=$

j) $\dfrac{\frac{x}{3}}{x-\frac{x}{3}}=$

k) $\frac{A}{B}(1-B)+A=$

l) $\dfrac{\dfrac{x^3-x}{2x^2+6x}}{\dfrac{5x^2-5x}{2x+6}}=$

m) $\dfrac{\dfrac{2}{a}-1}{\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{2}}=$

9. Efectuar las siguientes operaciones combinadas con F.A. y simplificar:

a) $\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}\right)=$

b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{x+2}{x-2}\;\frac{x-1}{x+1}=$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{a-b}\right)\frac{a+b}{ab}=$

d) $\frac{xy}{x^2-y^2}:\frac{x-y}{y}+\frac{y}{x-y}=$

10. Demostrar que: **a)** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$ **b)** $\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}=a\cdot b$

EJERCICIOS de TRIGONOMETRÍA

GRADOS Y RADIANES:

1. Pasar los siguientes ángulos a radianes:

a) 30º **b)** 45º **c)** 60º **d)** 90º **e)** 180º **f)** 270º **g)** 360º
h) 135º **i)** 235º **j)** 75º

2. Pasar los siguientes ángulos, expresados en radianes, a grados sexagesimales:

a) $2\pi/3$ rad **b)** $\pi/5$ rad **c)** $4\pi/3$ rad **d)** $3\pi/4$ rad **e)** $5\pi/6$ rad **f)** $\pi/10$ rad **g)** 0,2 rad
h) 1 rad

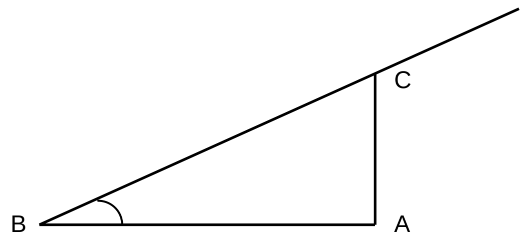
3. Completar en el cuaderno la siguiente tabla:

Grados	105º		320º		305º		35º
Radianes		$4\pi/9$ rad		$7\pi/15$ rad		$16\pi/3$ rad	

DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS:

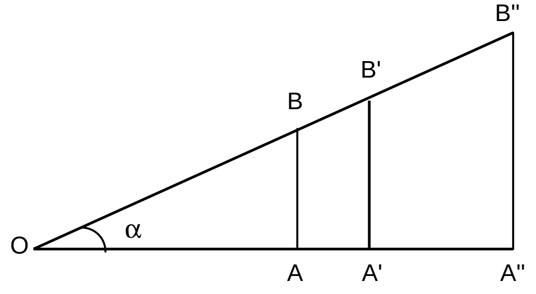
NOTA: Los ejercicios 4, 5 y 6 se realizarán en casa, con transportador de ángulos, regla y papel milimetrado.

4.



En el triángulo rectángulo de la figura medir sus lados, en mm, y hallar sen B, cos B y tg B. Medir a continuación B con el transportador de ángulos y comprobar con la calculadora lo obtenido antes (usar 4 decimales).

5.



Comprobar en la figura adjunta que el sen α sólo depende del ángulo y no del triángulo (usar 4 decimales).

6. Utilizando el transportador de ángulos, dibujar sobre papel milimetrado un triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 30º, y medir a continuación sus lados para obtener sen 30º, cos 30º y tg 30º; comparar finalmente los valores obtenidos con los que proporciona la calculadora (usar 4 decimales).

7. Utilizar la calculadora para obtener, con cuatro decimales bien aproximados, las siguientes razones trigonométricas:

a) sen 75º **b)** cos 40º **c)** tg 75º 23' **d)** sen 23º 5' 24'' **e)** cos 18º 32' 37''

f) sec 27º **g)** cosec 36º **h)** tg 35º 30' **i)** ctg 32º 25'13'' **j)** tg 90º

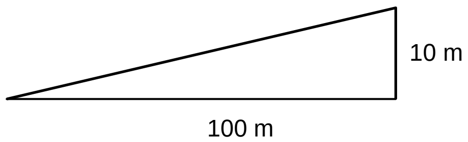
8. Hallar α en los siguientes casos, utilizando la calculadora solamente cuando sea estrictamente necesario:

a) sen α=0,8 **b)** tg $\alpha=\sqrt{3}$ **c)** cos $\alpha=\sqrt{3}/2$ **d)** sen α=1/2 **e)** cos α=1,5

f) tg α=1,5 **g)** sen α=1 **h)** cos α=1 **i)** sen α=0 **j)** cos α=0

k) ctg $\alpha=\sqrt{3}/3$ **l)** sec α=2 **m)** cosec $\alpha=2\sqrt{3}/3$

9. Cuando una señal de tráfico indica que la pendiente de una carretera es p. ej. del 10 %, quiere decir que por cada 100 m de trayecto horizontal la carretera asciende 10 m. Comprobar que la pendiente de una carretera coincide entonces con la tangente del ángulo de inclinación α. ¿Cuánto vale tg α en ese ejemplo? *(Soluc: tg α=0,1)*



10. Supongamos que ascendemos por una carretera de montaña cuya pendiente media es del 7 % durante 10 km. ¿Cuánto hemos ganado en altitud?

11. **TEORÍA**: ¿Puede ser el seno o el coseno de un ángulo mayor que 1? ¿Y la tangente? ¿Hay alguna restricción para la secante o cosecante?

12. **TEORÍA**: ¿Puede existir un ángulo tal que su tangente y su coseno sean iguales? Razonar la respuesta.

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS:

13. a) Comprobar la relación fundamental con 30º, 45º y 60º (sin utilizar decimales ni calculadora)

b) Comprobar, mediante calculadora, la relación fundamental para 17º

14. Comprobar la relación $1+\text{tg}^2\, a = 1/\cos^2 a$ con 30º, 45º y 60º (sin utilizar decimales ni calculadora)

15. De un ángulo agudo se sabe que su seno es 3/5. Mediante identidades trigonométricas, hallar sus restantes razones.

16. Sabiendo que cos α = 0,2, hallar sus restantes razones: **a)** mediante identidades trigonométricas; **b)** mediante calculadora.

17. De un ángulo agudo se sabe que su tangente vale 2. Mediante identidades trigonométricas, hallar sus restantes razones.

18. Dado un ángulo agudo α, encontrar, aplicando identidades trigonométricas, las restantes razones, sabiendo que:

a) sen α=5/6 **b)** cos α=5/12 **c)** tg α=5/12 **d)** ctg α= $\sqrt{6}$ /2 **e)** sec α= $\sqrt{5}$

f) sen α=2/3 **g)** cos α=1/3 **h)** tg α=4/3

19. Dado un ángulo agudo a tal que $\cot a = \sqrt{11}$, se pide:

a) Hallar, aplicando identidades trigonométricas, sen a, cos a y tg a (resultados racionalizados)

b) Obtener, mediante calculadora, de qué ángulo se trata.

20. Dado un ángulo ¯ tal que $\text{cosec}\,¯ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, se pide:

a) Hallar, aplicando identidades trigonométricas, sen ¯, cos ¯ y tg ¯ (resultados racionalizados)

b) Obtener, <u>sin calculadora</u>, de qué ¯ se trata.

21. a) Dado $\cos ¯ = \sqrt{6}/3$, obtener, mediante las correspondientes fórmulas trigonométricas, sen ¯ y tg ¯, dando los resultados simplificados y racionalizados (no se puede utilizar decimales).

b) Averiguar, mediante calculadora, de qué ángulo ¯ se trata, explicando el resultado.

22. a) Dada $\text{tg}\,¯ = \sqrt{3}/2$, obtener, mediante las correspondientes fórmulas trigonométricas, sen a, cos a y ctg ¯ (Dar los resultados simplificados y racionalizados; no se puede utilizar decimales)

b) Averiguar razonadamente, mediante calculadora,

23. Dado un ángulo agudo a tal que $\sec a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, se pide:

a) Hallar, aplicando identidades trigonométricas, sen ¯, cos ¯ y tg ¯ (resultados racionalizados)

b) Obtener, mediante calculadora, de qué ¯ se trata.

24. Dada ctg a =2, hallar sen a, cos a y tg a mediante identidades trigonométricas y sin utilizar decimales. ¿Cuánto vale α?

25. a) Dada $\sec ¯ = \sqrt{2}$, hallar, mediante identidades trigonométricas, sen ¯, cos ¯ y tg ¯ (No vale utilizar decimales)

b) ¿De qué ángulo ¯ se trata?

26. a) ¿Puede existir un ángulo tal que sen ¯ =1/5 y cos ¯ =3/5? (no vale calculadora)

b) Ídem para tg ¯=4/3 y cos ¯=3/5

27. a) Dado un ángulo ¯ tal que $ctg¯ = \sqrt{3}$, obtener, mediante fórmulas trigonométricas, sen ¯, cos ¯ y tg ¯

b) Obtener, sin calculadora, ¯

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS:

28. Resolver los siguientes triángulos, rectángulos en A, aplicando, siempre que sea posible relaciones trigonométricas (¡no el teorema de Pitágoras!); hallar también su área:

a) a=320 m, B=47º

b) b=32,8 cm, B=22º

c) a=42,5 m, b=35,8 m

d) b=8 mm, c=6 mm

e) c=42,7 dam, C=31º

f) a=8 km, b=6 km

g) a=13 m, c=5 m

h) c=124 dm, B=67º 21'

i) a=12,65 cm, C=48º 10'

j) a=75 m, C=35º

k) b=36, C=35º

l) a=15 mm, b=12 mm

m) b=24 m, c=8 m

n) b=12 cm, c=4 cm

o) b=212 m, c=165 m

p) B=35º, a=4 cm

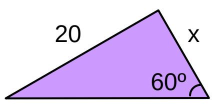
q) b=5 cm, B=80º

r) a=28 cm, C=4º

29. Resolver, sin calculadora, un triángulo de datos: A=90º, b= $\sqrt{3}$, c=1

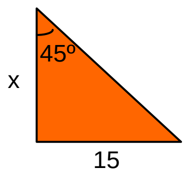
30. Hallar el valor del lado x en los siguientes triángulos rectángulos:

a)



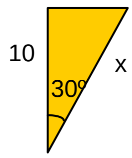
(Soluc: x≅11,55)

b)



(Soluc: x=15)

c)



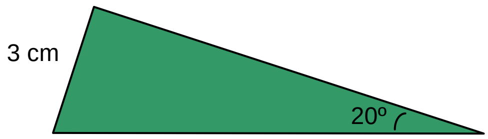
(Soluc: x≅11,55)

31. Resolver un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3 cm y uno de sus catetos 1 cm. Hallar su área.

32. Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son 5 y 12 cm. Hallar sus restantes elementos y calcular su área.

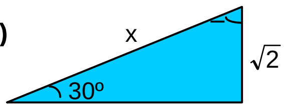
33. CUESTIÓN TEÓRICA: Probar que si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 60º, entonces la hipotenusa es igual al doble del cateto menor.

34. En el triángulo rectángulo de la figura, calcular los elementos desconocidos y obtener su área:

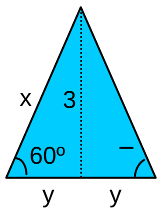


35. Hallar las incógnitas en los siguientes triángulos (no utilizar calculadora sino raíces, dando además el resultado racionalizado):

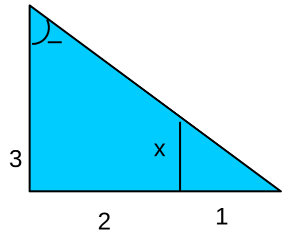
a)



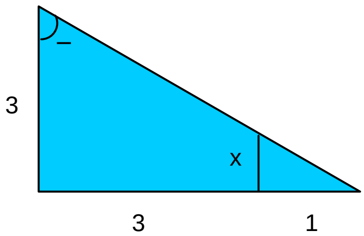
b)



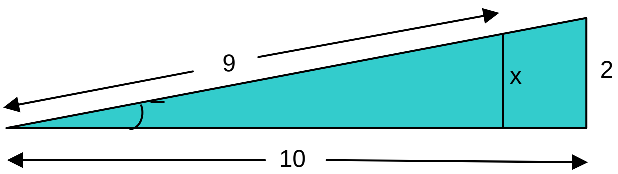
c)



d)

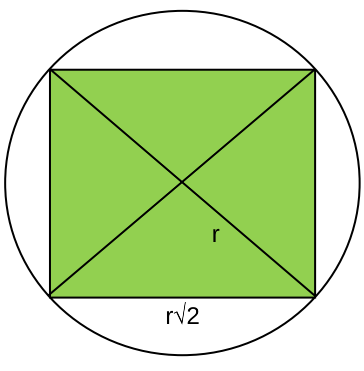


36. Ídem, pero con calculadora:



☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 168 y ss.:*** *26, 27,* ***34, 35, 36 y 37***

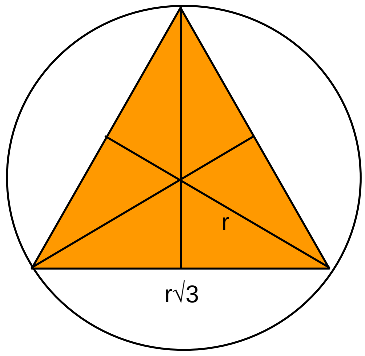
37. CUESTIÓN TEÓRICA: Cuando el gran sabio griego Tales de Mileto viajó a Egipto, le fue preguntado cuál podría ser la altura de la pirámide de Keops, por supuesto desconocida y jamás medida. Tales reflexionó unos segundos y contestó así: «Me echaré sobre la arena y determinaré la longitud de mi cuerpo. Después, me pondré en un extremo de esta línea que mide mi longitud y esperaré hasta que mi sombra sea igual de larga. En ese instante, la sombra de la pirámide ha de medir tantos pasos como su altura». Justificar la genial respuesta del gran sabio.



38. CUESTIÓN TEÓRICA:

a) Demostrar que el lado del cuadrado inscrito (ver figura) en una circunferencia de radio r mide rK2.

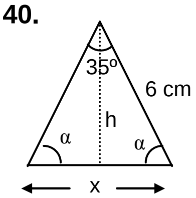
b) Demostrar que el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia (ver figura) de *radio r mide r√3.*



39. CUESTIÓN TEÓRICA: Si un rectángulo tiene mayor perímetro que otro, ¿necesariamente tendrá mayor área? Indicar ejemplos*.* *(Soluc: no necesariamente)*

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS:

40.

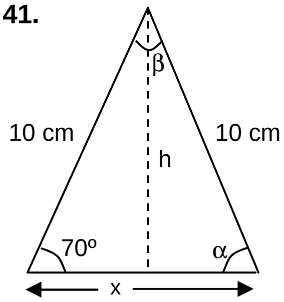


En el triángulo de la figura hallar:

a) ¯ y x *(Soluc: $\alpha \cong 72º\ 30'$; $x \cong 3{,}61$ cm)*

b) h y área *(Soluc: $h \cong 5{,}72$ cm; $S \cong 10{,}32$ cm^2)*

41.



En el triángulo isósceles de la figura, hallar razonadamente:

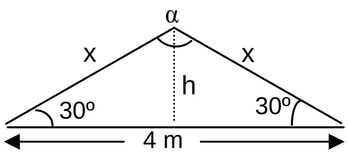
a) α y β

b) altura h

c) base x

d) área

42. Dado el triángulo isósceles de la figura, hallar:



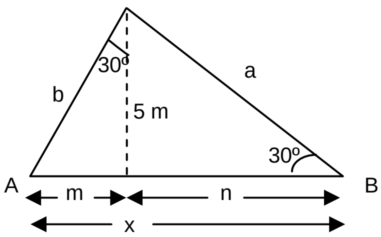
a) El ángulo desigual ¯

b) Los lados iguales x

c) La altura h

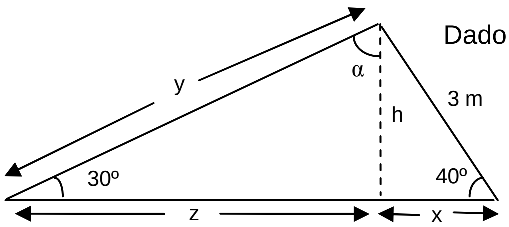
d) El área del triángulo.

43.



En el triángulo de la figura, calcular: **A**, **b**, **m**, **n**, **a** y **x**. Hallar su área. *(Soluc: A=60º, $b \cong 5{,}77$ m, $m \cong 2{,}89$ m, $n \cong 8{,}66$ m, a=10 m, $x \cong 11{,}55$ m; $S \cong 28{,}87$ m^2)*

44.



Dado el triángulo de la figura se pide:

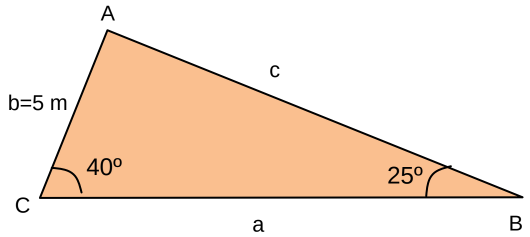
a) Hallar α, h, x, y, z

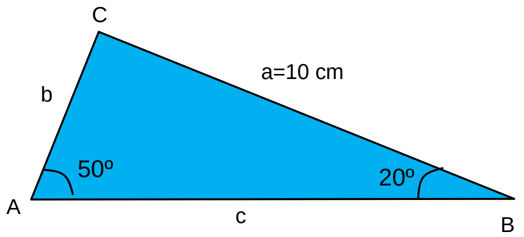
b) Calcular su área.

45. TEORÍA: ¿Cuántas alturas tiene un triángulo? Dibujar un triángulo acutángulo, y trazar sus tres alturas. ¿Qué ocurre si el triángulo es obtusángulo?

46. a) Resolver el triángulo de la figura derecha –es decir, hallar A, a y c–, trazando para ello previamente la altura correspondiente al lado a.

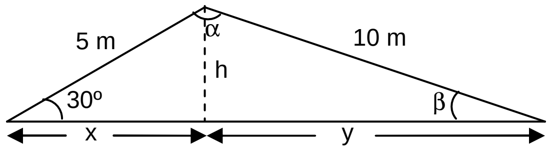
b) Hallar su área.





47. En el triángulo de la figura izquierda hallar C, b y c, trazando para ello previamente una altura. Hallar también su área.

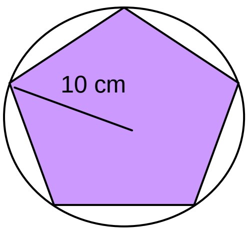
48. En el triángulo de la figura, se pide: **a)** Hallar h, x, y, α y β **b)** Calcular su área.



PROBLEMAS DE PLANTEAMIENTO:

49. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 20 cm y cada uno de los ángulos iguales mide 25º. Resolver el triángulo y calcular su área. *(Soluc: α=130º, x≅36,25 cm; S≅153,21 cm^2)*

50.



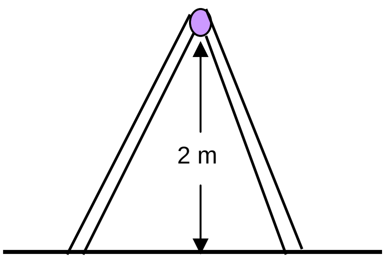
Si el radio de un pentágono regular mide 10 cm, ¿cuánto mide el lado? ¿Cuál es su área?

51. Calcular el valor de la apotema de un decágono regular de lado 20 cm. ¿Cuál es su área? Comprobar que se verifica la fórmula ***S=p·a/2***, donde ***p*** es el perímetro y ***a*** la apotema.

52. Calcular el área de un decágono regular y de un octógono regular, ambos de 6 cm de lado. ¿Cuál es mayor?

53. Determinar la superficie de un hexágono regular inscrito en un círculo de 9 cm de radio.

54.



Un carpintero quiere construir una escalera de tijera cuyos brazos, una vez abiertos, formen un ángulo de 60º. Si la altura de la escalera, estando abierta, es de 2 metros, ¿qué longitud deberá tener cada brazo?

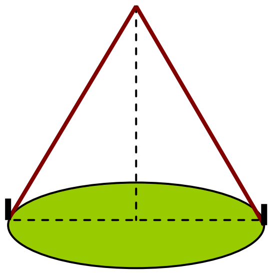
55. Un niño está haciendo volar su cometa. Ha soltado ya la totalidad del hilo, 47 m, y observa que el ángulo que forma la cuerda con el suelo es aproximadamente 45º. ¿A qué altura se encuentra la cometa?

56. Calcular la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del sol forman 50º con el suelo.

57. Desde lo alto de un faro colocado a 40 m sobre el nivel del mar se ve un barco formando un ángulo de 55º con la horizontal. ¿A qué distancia de la costa se halla el barco?

58. Un avión vuela a 350 m de altura, observando el piloto que el ángulo de depresión del aeropuerto próximo es de 15º. ¿Qué distancia respecto a la vertical le separa del mismo en ese instante?

59.



Una tienda de campaña tiene forma cónica. La parte central tiene una altura de 4 m y está sujeta en el suelo con dos cables de 12 m de longitud. Calcular:

a) El ángulo que forman los cables con el suelo.

b) La distancia entre los dos puntos de anclaje (Sin aplicar el teorema de Pitágoras).

60. En un tramo de carretera la pendiente es del 6%. ¿Cuánto asciende un ciclista que recorra un kilómetro?

61. Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45º y si se apoya sobre la otra forma un ángulo de 30º. Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza sobre cada fachada? *(Soluc: anchura≅15,73 m; 7,07 y 5 m respectivamente)*

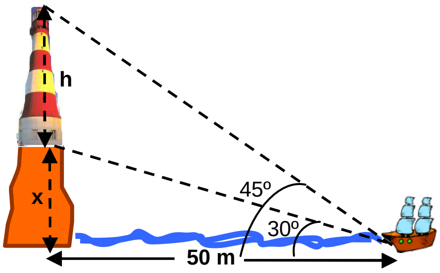
62. Si las puntas de un compás, abierto, distan 6,25 cm y cada rama mide 11,5 cm, ¿qué ángulo forman?

63. Una escalera de 4 metros está apoyada contra la pared. ¿Cuál será su inclinación si su base dista 2 metros de la pared?

64. De un triángulo rectángulo se sabe que un ángulo agudo mide 45º y uno de sus catetos 5 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto, la hipotenusa y el otro ángulo agudo?

65. Calcular los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 8 cm.

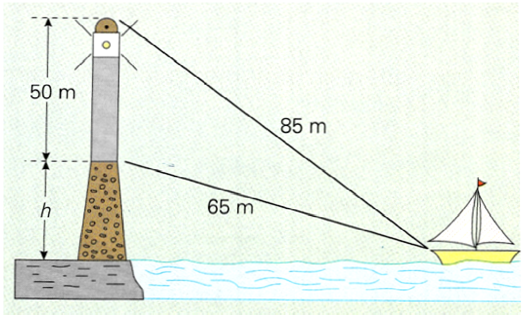
66. La base de un triángulo isósceles mide 54 cm y los ángulos en la base 42º. Calcular los lados iguales, la altura y el área.

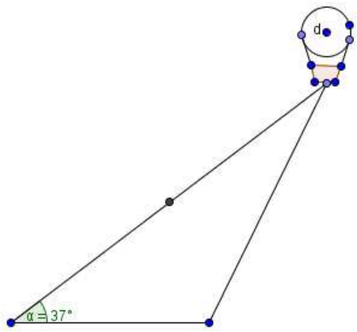


67. Si la sombra de un poste es la mitad de su altura, ¿qué ángulo forman los rayos del sol con el suelo?

68. En la figura de la izquierda, hallar la altura del acantilado, x, y la del faro, h.

69. En la figura adjunta aparecee un faro situado bajo un promontorio. Hallar la altura, h h, de éste último. (Ayuda: Aplicar el teorema de Pitágorass dos veces)

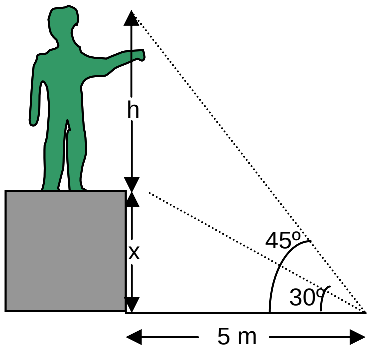




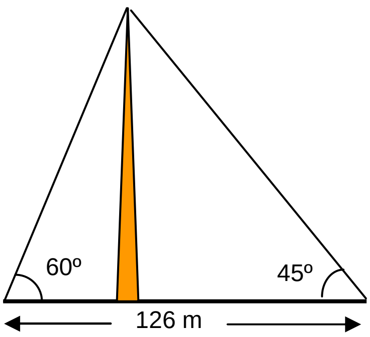
70. Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 6600m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cablee con el suelo es de 37º. Hallar la altura del globo y la longitud del cab bllee más extenso. (*Ayuda: Trazar la altura correspondiente al lado deel cable más extenso).*

Método de doble observación:

71. Desde un punto del suelo situado a 5 m de la base de un pedestal se ve la parte superior de éste bajo un ángulo de 30º, mientras que la parte superior de la estatua que descansa sobre él se ve bajo un ángulo de 45º (ver figura). Hallar la altura del pedestal y de la estatua.



72. Queremos conocer el ancho dee un río y la altura de un árbol inaccesible que eestá en la orilla opuesta. Para ello nos situamos en laa orilla del río y vemos la copa del árbol bajjoo un ángulo de 41º. A continuación retrocedemos 25 mm y vemos ahora el árbol bajo un ángulo de 23º.. H Hallar el ancho del río y la altura del árbol.



73. Considerar el triángulo de datos: a=10 m, B=30º, C=45º. Resolverlo, trazando previamente la altura correspondiente al lado a, y hallar su área. (Ayuda: Plantear un sistema de ecuaciones)

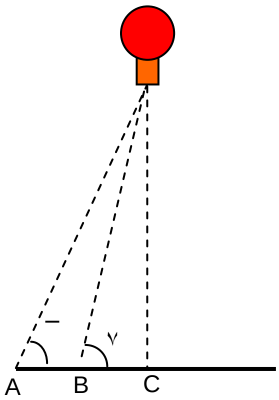
74. Una antena está sujeta al suelo por dos cables de acero, como indica la figura. Calcular la altura de la antena y la longitud dee los dos cables

75. Desde cierto punto del suelo ssee ve el punto más alto de una torre formando uun ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 7 755 m hacia el pie de la torre, este ángulo se hacee de 60º. Hallar la altura de la torre.

76. Desde un barco se ve la cimaa de un acantilado bajo un ángulo de 70º resppecto a la horizontal. Al alejarse 100 m, el ángulo disminnuye a 30º. Hallar la altura del acantilado.

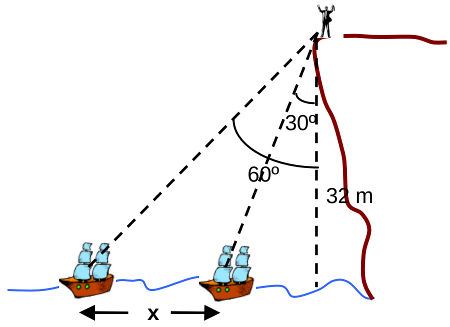
77. Dos edificios gemelos distan 1550 m. Desde un punto que está entre los dos v veemos que las visuales a los puntos más altos forman coonn la horizontal ángulos de 35º y 20º respectivammente. Hallar la altura de ambos edificios. ¿A qué distaanncia estamos de cada edificio

78. Calcular la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas: 1º) El ángulo que forma la visual hacia la luz con el horizonte es de 25º 2º) Nos alejamos 200 m y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10º



79. Para hallar la altura a la que está situado un globo, Rosa se coloca en un punto B y Carlos en un punto A, a 5 m de ella, de tal forma que los puntos A, B y C están alineados. Si los ángulos ¯ y ˠ miden 45º y 50º respectivamente, ¿a qué altura se encuentra el globo?

80. Sobre un acantilado de 32 m de altura un observador divisa dos embarcaciones, bajo ángulos de 30º y 60º respecto a la vertical. Hallar la distancia que las separa.



DIFERENCIA ENTRE ÁREA Y SUPERFICIE:

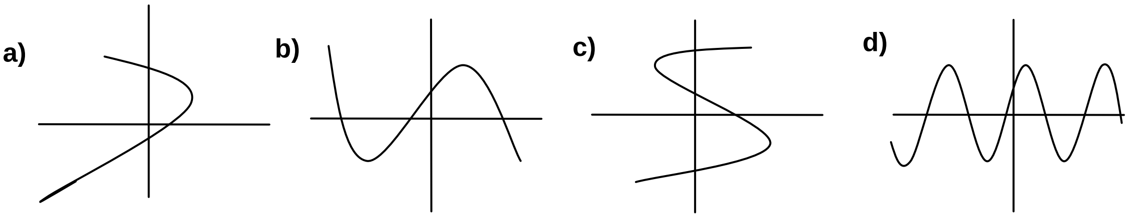
- La ***superficie*** es el conjunto de infinitos puntos contenidos dentro de una línea cerrada; el ***área*** es la medida de esa superficie: “La superficie de un cubo tiene 6,45 cm^2 de área”.
- La palabra ***superficie*** describe también el borde de un objeto tridimensional, es decir, algo que se puede tocar: “La superficie de una esfera”.

EJERCICIOS DE FUNCIONES

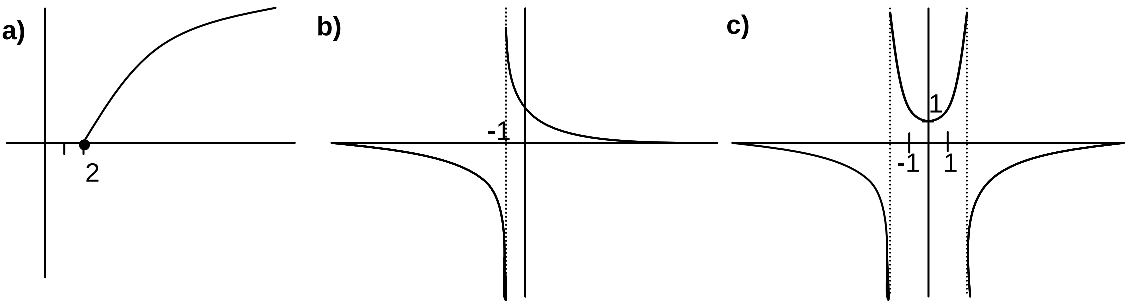
1. Dada $f(x)=\sqrt{x}$, se pide: **a)** Razonar que se trata de una función.
b) Calcular f(4), f(1), f(0), f(-9), f(1/4), f(2) y f(√2)
c) Hallar la antiimagen de 3, de 25 y de -4
d) Razonar cuál es su Dom(f) e Im(f)

2. Ídem para f(x)=2x+1

3. ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):



4. ¿Cuál es el Dom(f) e Im(f) de cada una de estas funciones?:



5. Dada $f(x)=\sqrt{x}$, se pide: **a)** Representarla gráficamente.
b) Razonar, a la vista de la gráfica, cuál es su Dom(f) e Im(f)

6. Para cada una de las funciones que figuran a continuación se pide:

i) Tabla de valores apropiada y representación gráfica.
ii) Dom(f) e Im(f) a la vista de la gráfica.

a) $f(x)=3x+6$
b) $f(x)=x^2-4x+3$ ¿vértice?
c) $f(x)=x^3$
d) $f(x)=x^4$
e) $f(x)=2$
f) $f(x)=\sqrt{x-9}$

g) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$
h) $f(x)=\frac{1}{x}$
i) $f(x) \quad \frac{x+2}{x-2} \quad =$ ¿

7. Sin necesidad de representarlas, hallar <u>analíticamente</u> el Dom(f) de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{8x}{x+5}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$

c) $f(x)=\dfrac{2}{4x-x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-16}$

e) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+16}$

f) $f(x)=\sqrt{x+5}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$

h) $f(x)=\sqrt{2x-5}$

i) $f(x)=\sqrt{4-x}$

j) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

k) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-8}$

l) $f(x)=\sqrt{x^2+5x+4}$

*** m)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-16}}$

n) $f(x)=\dfrac{x+1}{(2x-3)^2}$

o) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-x-6}$

p) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-12}}$

q) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+4}$

r) $f(x)=\dfrac{14}{x^2+2x+1}$

s) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+5x+4}$

t) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$

8. A la vista de sus gráficas, indicar la continuidad, posible simetría, intervalos de crecimiento y posibles M y m de las funciones del ejercicio 6

9. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones; con esa única información, hacer además la gráfica de las señaladas con **(G)**:

(G) a) $y=2x-6$

(G) b) $f(x)=x^2+2x-3$

c) $f(x)=x^2+x+1$

d) $f(x)=x^3-x^2$

e) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

f) $f(x)=\sqrt{2x+4}$

g) $f(x)=\sqrt{2x}+4$

h) $y=\dfrac{x+4}{2x+2}$

i) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$

j) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

k) $y=\sqrt{x^2+9}$

(G) l) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

m) $y=\dfrac{x^2+4}{x+2}$

n) $f(x)=\dfrac{4}{x-4}$

o) $f(x)=x^4-1$

10. Dada $f(x)=2x^3-3x^2$ se pide: **i)** Razonar cuál es su Dom(f) **ii)** Posibles cortes con los ejes. **iii)** Tabla de valores apropiada y representación gráfica. **iv)** ¿Es continua? **v)** A la vista de la gráfica, indicar su Im(f) **vi)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m **vii)** Indicar su posible simetría.

11. Ídem: **a)** $f(x)=x^3-3x$ **b)** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ **c)** $y=x^4-2x^2$ **d)** $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ **e)** $f(x)=x^3-3x^2$

f) $y=2x^3-9x^2$ **g)** $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ **h)** $f(x)=x^3-6x^2+9x$ **i)** $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ **j)** $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$

k) $y=x^4-4x$ **l)** $y=2x^3-3x^2$ **m)** $y=x^3-12x$ **n)** $y=\sqrt{x^2-9}$ **o)** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

p) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

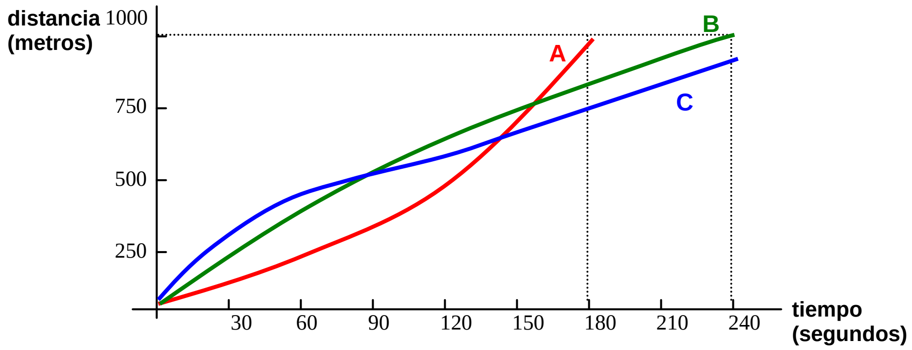
12. Representar, utilizando la calculadora: **a)** y=sen x **b)** y=cos x **c)** y= tg x

13. Un estudio de un ginecólogo muestra cómo crece un bebé antes de nacer según el mes de gestación en que se encuentre su madre, de acuerdo con la siguiente tabla:

Edad (meses)	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud (cm)	4	8	15	24	29	34	38	42

Representar la función "longitud" en función de la edad del bebé. Comentar dicha gráfica.

14. Tres alumnos, que nombraremos **A**, **B** y **C**, participan en una carrera de 1000 m. La presente gráfica muestra de forma aproximada su comportamiento en la prueba. ¿Cómo describirías dicha carrera?



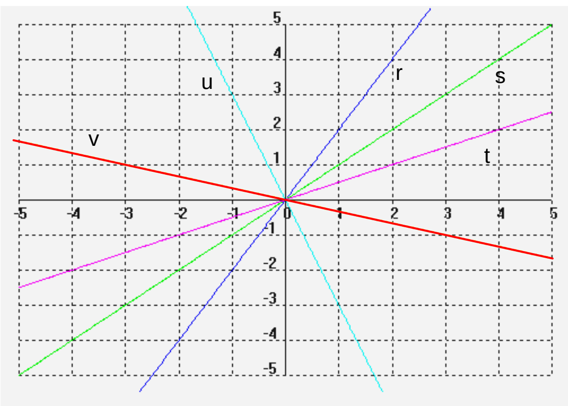
FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA *(y=mx)*:

15. a) Hallar la ecuación de una función de proporcionalidad directa sabiendo que pasa por el punto P(1,7)
b) Ídem para P(-1,3)
c) Ídem para P(2,5)

A continuación, dibujarlas y comprobar su pendiente.

16. Si se sabe que una función lineal pasa por el punto P(1,2), calcular su ecuación, y, a partir de ésta, hallar el valor de dicha función para x=3, x=5 y x=-8. Comprobar gráficamente todo lo anterior.

17. Calcular la pendiente y la ecuación de las funciones de proporcionalidad directa que aparecen en el siguiente gráfico:



18. Un kg de patatas cuesta 55 céntimos. Obtener y a continuación representar la función que define el coste de las patatas (**y**) en función de los kg comprados (**x**). ¿Cuál es su Dom(f)? ¿Cuánto costarán 3,5 kg? ¿Qué cantidad podremos comprar si sólo disponemos de un billete de 5 €?

19. Un grifo vierte agua a un depósito dejando caer cada minuto 25 litros. Formar una tabla de valores apropiada para representar la función "capacidad" en función del tiempo. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar una piscina de 50 m^3?

20. Los paquetes de folios que compra un determinado instituto constan de 500 folios y cuestan 3 €.

a) Formar una tabla que nos indique el precio de 1, 2, ..., 10 folios.

b) Dibujar la gráfica correspondiente ¿Qué tipo de función se obtiene? ¿Cuál es la ecuación?

c) ¿Cuál es su Dom(f)?

21. Pasada la Navidad, unos grandes almacenes hacen en todos los artículos un 20% de descuento.

a) ¿Cuál será el precio rebajado de unas zapatillas de deporte que costaban 45 €? ¿Y de un chándal que costaba 60 €?

b) Si llamamos **x** al antiguo precio del artículo e **y** al precio rebajado, ¿qué función se obtiene?

22. El IVA es un impuesto que en muchos productos supone un recargo del 16%. Si un fontanero hace una reparación de 240 €, ¿a cuánto ascenderá con el IVA? ¿Y si la reparación costara 50 €? Obtener la expresión algebraica general correspondiente al precio del trabajo del fontanero y la cantidad que se paga.

23. Se quiere abrir un pozo de forma cilíndrica de diámetro 2 m. Expresar el volumen de agua que cabe en él en función de la profundidad *h*. ¿Qué tipo de función se obtiene?

FUNCIÓN AFÍN *(y=mx+n)*:

24. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1,3) y B(3,7). Representarla gráficamente, y comprobar gráficamente su pendiente y su ordenada en el origen. Hallar también, analítica y gráficamente, un tercer punto de ella.

25. Ídem para: **a)** A(1,-1) y B(4,8) **b)** A(-2,4) y B(1,1) **c)** A(-4,-1) y B(2,-4) **d)** A(-1,-1) y B(2,-7) **e)** A(3,1) y B(-6,-2) **f)** A(1,1) y (3,7) *(Sol: a) y=3x-4; b) y=-x+2; c) y=-x/2-3; d) y=-2x-3; e) y=x/3; f) y=3x-2)*

26. Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente 5 y pasa por el punto P(-1,-2)

27. Hallar la ecuación de la recta paralela a y=2x+5 que pasa por el punto P(2,1). ¿Cuál es su pendiente?

28. **a)** Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,-2) y (3,4). **b)** Hallar también una recta paralela a la anterior y que pase por el punto (-2,3)

29. En cada apartado, representar las siguientes rectas sobre los mismos ejes:

a) y=3x
y=3x+2
y=3x-7

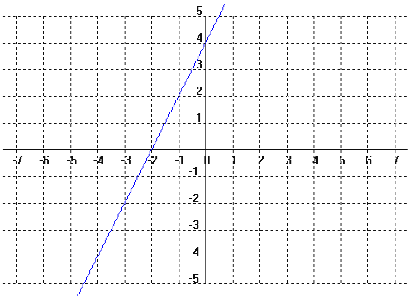
b) y=-3x
y=-3x+2
y=-3x-7

c) $y=\frac{1}{3}x$
$y=\frac{1}{3}x+2$
$y=\frac{1}{3}x-7$

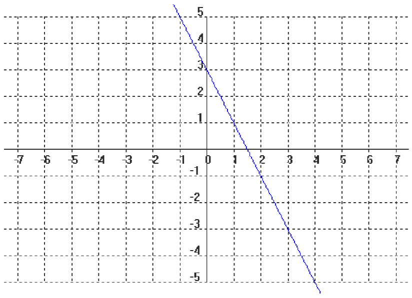
d) y=0
y=x
y=-x

30. Hallar, razonadamente, la ecuación de las siguientes rectas:

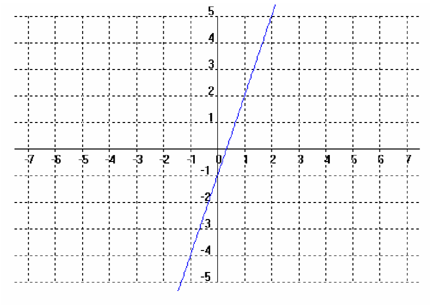
a)



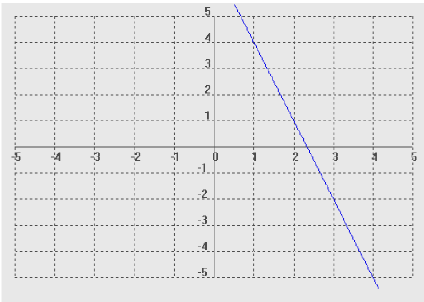
b)



c)

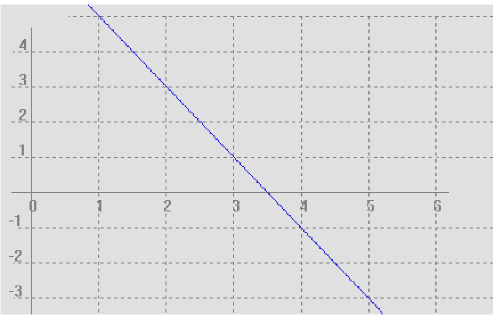


d)



31. Comprobar analíticamente si los siguientes puntos están alineados (¡no vale gráficamente!):
a) A(-1,-5), B(2,1) y C(6,9) **b)** A(-1,2), B(4,-3) y C(10,-8)

32.



Dada la recta de la figura, se pide:

a) Hallar su expresión analítica.

b) Comprobar gráficamente el valor de la pendiente obtenido en el apartado anterior.

c) Deducir, analíticamente, dónde corta a los ejes.

33. Colgado de una alcayata tenemos un muelle de 5 cm de largo; en él hemos colgado diferentes pesos y hemos medido la longitud que alcanza el muelle en cada caso, obteniendo los siguientes resultados:

Pesos (kg)	0	1	2	3	4
Longitud (cm)	5	7	9	11	13

Obtener la gráfica y contestar: **a)** ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

b) ¿Se trata de una función afín? ¿Por qué?

c) Hallar su pendiente. ¿Cuál es su expresión algebraica?

d) ¿Qué significa en este caso la ordenada en el origen?

34. La siguiente tabla corresponde a una función afín:

x	0	10	20	30	40	50
f(x)	-3					97

Completar la tabla y obtener f(x) <u>algebraicamente</u>.

35. Midiendo la temperatura a diferentes alturas se han obtenido los datos de la tabla:

Altura (m)	0	360	720	990
Temperatura (ºC)	10	8	6	4,5

a) Representar la temperatura en función de la altura.
b) Obtener su expresión algebraica. *)*
c) ¿A partir de qué altura la temperatura será menor de 0ºC?

36. La tarifa de una empresa de mensajería con entrega domiciliaria es de 12 € por tasa fija más 5 € por cada kg.
a) Hallar la expresión analítica de la función "Precio del envío" en función de su peso en kg.

b) Representarla gráficamente.
c) ¿Cuánto costará enviar un paquete de 750 gr?
d) Si disponemos sólo de un billete de 50 €, ¿cuál es el peso máximo que podremos enviar?

37. Los beneficios de una empresa desde el momento de su creación son los que figuran en la siguiente tabla:

MESES TRANSCURRIDOS	0	3	6	9
BENEFICIOS (millones de €)	4	3		1

a) Representar el beneficio en función del tiempo transcurrido. ¿Qué tipo de función se obtiene?
b) Obtener gráficamente la pendiente y la ordenada en el origen, e indicar a continuación su expresión algebraica.
c) Hallar <u>analíticamente</u> el dato que falta en la tabla.
d) Hallar <u>analíticamente</u> a partir de qué mes la empresa no tendrá beneficios.

38. Una empresa de fotografía cobra, por el revelado de un carrete, un precio fijo de 1,5 €, y por cada foto, 50 céntimos.
a) Representar la función "Coste del revelado" en función del nº de fotos. Indicar su expresión algebraica.
b) ¿Cuánto costará revelar un carrete de 36 fotografías?
c) ¿Cuántas fotos podremos revelar con 100 €?

<u>Resolución gráfica de inecuaciones y sistemas de inecuaciones</u>:

39. Determinar la representación gráfica de la solución de cada una de las siguientes inecuaciones de 1er grado con dos incógnitas:

a) x+2y¯3
b) x+2y<3
c) 2x-yK4-x
d) 3x+2y>7-3y
e) y<x+2
f) x+y¯5
g) 2x-y<6
h) 6x+5yK30

40. Representar gráficamente la solución de cada uno de estos sistemas de inecuaciones de 1^er^ grado con dos incógnitas:

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y>-3 \\ 3x+y\le 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-y\ge 6 \\ 3x+5y<10 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} y<2-x \\ y\ge x+2 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x-y>6 \\ 3x+5y<10 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y\le 6 \\ -6x-4y\le -12 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} x+y\le 5 \\ -2x+3y\ge 6 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} x+y\le 5 \\ 2x+2y<10 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} x\le 6 \\ y>4 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r} 2x-y\le 6 \\ 2x-y>10 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{r} 2x-y>6 \\ 2x-y<10 \end{array}\right\}$

k) $\left.\begin{array}{r} x-y>-5 \\ x+y>-3 \\ x+y\le 10 \end{array}\right\}$

l) $\left.\begin{array}{r} y<3x \\ y>-x \end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{r} y>-x+2 \\ y\le \frac{x}{2}+\frac{5}{2} \end{array}\right\}$

EJERCICIOS DE PARÁBOLAS:

41. Representar sobre los mismos ejes las siguientes parábolas. ¿Qué conclusiones podemos extraer?: **a)** $y=x^2$ **b)** $y=2x^2$ **c)** $y=x^2/2$ **d)** $y=-x^2$ **e)** $y=-4x^2$

42. Dadas las siguientes parábolas, hallar: i) Vértice
ii) Puntos de corte con los ejes
iii) Representación gráfica

a) $y=x^2-6x+8$
b) $y=x^2-2x-3$
c) $y=-x^2-4x-3$
d) $y=x^2-4x+7$
e) $y=x^2-6x$
f) $y=x^2+x+1$
g) $y=-x^2+5x-6$
h) $y=3x^2+15x+18$
i) $y=-x^2-2x-2$
j) $y=x^2+2x-1$
k) $y=x^2-4$
l) $y=x^2+4$
m) $y=x^2+4x+5$
n) $y=x^2+4x+3$
o) $y=-x^2-8x-4$
p) $y=2x^2+4x+6$
q) $y=-x^2-1$
r) $y=(x+5)^2-8$
s) $y=2(x-1)^2-8$
t) $y=(x-5)^2+8$
u) $y=-2(x-1)^2+8$
v) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-5$
w) $y=x^2-2x+1$
x) $y=x^2-4x+2$
y) $y=2x^2-8x+6$
z) $y=-3x^2-6x+12$
α) $y=x^2-2x+3$
β) $y=x^2-6x+5$
γ) $y=\frac{1}{4}x^2+x-2$
δ) $y=2x^2-10x+8$
ε) $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$
ζ) $y=x^2-8x+7$

43. A partir de las gráficas obtenidas en el ejercicio anterior, indicar la solución de las siguientes inecuaciones de 2º grado:

a) $x^2-6x+8\ge 0$
b) $x^2-2x-3<0$
c) $-x^2-4x-3\ge 0$
d) $x^2-4x+7>0$
e) $x^2-6x\le 0$
f) $x^2+x+1\le 0$
g) $3x^2+15x+18>0$
h) $-x^2-2x-2>0$
i) $x^2+2x-1\ge 0$
j) $x^2-4<0$
k) $x^2+4\ge 0$
l) $x^2+4x+5<0$
m) $x^2+4x+3<0$
n) $-x^2-8x-4\ge 0$
o) $2x^2+4x+6\le 0$
p) $-x^2-1<0$

44. Resolver gráficamente las siguientes inecuaciones de 2º grado:
a) $x^2-3x-4>0$ **b)** $2x^2+x-3\le 0$ **c)** $-x^2+x+6\ge 0$ **d)** $x^2+x+5<0$ **e)** $2x^2+x+1$¯0
f) $-x^2+6x-5<0$

45. a) Se sabe que la función $y=ax^2+bx+c$ pasa por los puntos (1,1), (0,0) y (-1,1). Calcular **a**, **b** y **c**.

b) Ídem para los puntos (1,4), (0,-1) y (2,15)

46. Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y=ax^2+ax+a$ y pasa por el punto P(1,9). Calcular el valor de **a**. ¿Cuál sería su vértice?

47. Calcular **b** para que la parábola $y=x^2+bx+3$ pase por el punto P(2,-1). ¿Cuál sería su vértice?

48. Calcular **m** para que la parábola $y=x^2+mx+10$ tenga el vértice en el punto V(3,1). ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

49. ¿Cuánto debe valer **k** para que la parábola $y=4x^2-20x+k$ tenga un solo punto de corte con el eje de abscisas? ¿Para qué valores de **k** no cortará al eje x?

50. La parábola $y=ax^2+bx+c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá **c**? Si además sabemos que pasa por los puntos (1,3) y (4,6), ¿cómo calcularíamos **a** y **b**? Hallar a y b y representar la parábola.

51. Una parábola corta al eje de abscisas en los puntos x=1 y x=5. La ordenada del vértice es y=-2. ¿Cuál es su ecuación?

52. Calcular la expresión de una función cuadrática cuya intersección con el eje x son los puntos (2,0) y (3,0)

53. **a)** Una parábola tiene su vértice en el punto V(1,1) y pasa por P(0,2). Hallar su ecuación.

b) Ídem para la parábola de vértice V(-2,3) que pasa por P(1,-3)

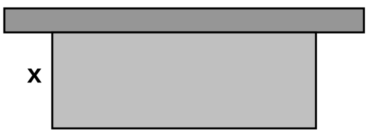
54. En cada apartado, representar las parábolas sobre los mismos ejes:

a) $\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=(x-4)^2 \\ y=(x+5)^2 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x^2+4 \\ y=x^2-5 \end{array}\right\}$ **c)** A la vista de lo anterior, ¿cómo sería la parábola $y=(x-4)^2+5$? ¿Cuál es su vértice?

55. La longitud de la circunferencia y el área del círculo se expresan en función del radio. ¿Qué tipo de funciones son? Dibujar las gráficas sobre unos mismos ejes cartesianos. ¿Para qué valor del radio coinciden numéricamente la longitud y el área?

56. Con un listón de madera de 4 m de largo queremos fabricar un marco para un cuadro.
a) Indicar la expresión analítica de la función "Superficie" en función de la longitud *x* de la base.
b) Representar gráficamente la función anterior. ¿Cuál es su Dom(f)?
c) A la vista de la gráfica, ¿para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima? ¿Cuánto vale dicha superficie? Interpretar el resultado.

57.



Con 100 metros de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared de 60 metros de largo, como indica la figura.

a) Llamando **x** a uno de los lados contiguos al muro (ver fig.), expresar los otros dos lados en función de **x**
b) Obtener la función que expresa el área del recinto en función de x.
c) Representar la función anterior. ¿Cuál es su Dom(f)?
d) ¿Cuándo se hace máxima el área del recinto? ¿Cuánto vale dicha área?

58. Un labrador tiene 72 m de valla para hacer un corral de gallinas de forma rectangular. ¿Cómo cambiará el área del corral al variar la longitud *x* de uno de los lados? Representar gráficamente la función anterior.

FUNCIONES DEFINIDAS POR RAMAS:

59. Representar las siguientes **funciones definidas a trozos** e indicar: Dom(f) e Im(f), continuidad, intervalos de crecimiento, posibles M y m, y ecuación de las posibles asíntotas:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x & \text{si } x\in[2,\infty) \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<-1 \\ 1-2x & \text{si } -1\leq x<1 \\ 3x-1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x-2 & \text{si } x\in[2,4] \\ 5 & \text{si } x\in(4,\infty) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 5x-2 & \text{si } x\leq 1 \\ -2 & \text{si } x=2 \\ x/2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si } -5\leq x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\leq x<2 \\ x+2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} x/2 & \text{si } x\in(-\infty,1] \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\in(1,\infty) \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x<0 \\ -2 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si } x\in(-\infty,2] \\ x^2-4x & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{x-5} & \text{si } x\leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0<x\leq 3 \\ \dfrac{10}{x+2} & \text{si } x>3 \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 3x-x^2 & \text{si } 0\leq x<3 \\ x-4 & \text{si } 3\leq x<6 \\ 0 & \text{si } x>6 \end{cases}$

PROBABILIDAD	EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios se recomienda:

- *Considerar previamente el espacio muestral.*
- *Utilizar convenientemente el lenguaje de sucesos.*
- *Dar los resultados en forma de fracción (no es necesario pasarlos a forma decimal).*

1. Considerar el experimento aleatorio consistente en extraer una bola de una urna que contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20.

a) Indicar los sucesos elementales que componen el suceso A=”extraer nº impar”. Hallar la probabilidad de dicho suceso.

b) Ídem para el suceso B=”extraer nº primo”. (NOTA: Considerar el 1 primo)

c) Ídem para el suceso “extraer nº impar y primo”. ¿Cómo es este suceso respecto a A y B?

d) Sea el suceso “extraer nº impar o primo”. Utilizando la fórmula adecuada y lo obtenido en los apartados anteriores (¡no mediante la regla de Laplace!), calcular la probabilidad de dicho suceso, razonando el porqué de la fórmula utilizada.

2. En el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda 4 veces, se pide:

a) Formar el espacio muestral E (se recomienda utilizar un árbol). ¿De cuántos elementos consta?

b) Hallar la probabilidad de obtener exactamente una cara. Hallar también la probabilidad de obtener justo dos caras. Con los dos resultados anteriores, y utilizando la fórmula adecuada (¡no mediante la regla de Laplace!), hallar la probabilidad de obtener una o dos caras. Razonar qué fórmula se ha utilizado.

c) Hallar la probabilidad de obtener siempre cruz.

d) Hallar, utilizando la fórmula de la probabilidad del suceso contrario (¡no mediante la regla de Laplace!), la probabilidad de obtener al menos una cara.

3. Considerar el experimento aleatorio consistente en extraer una carta de una baraja española.

a) Describir su espacio muestral E. ¿Cuántos sucesos elementales lo componen?

b) Sea el suceso A=”extraer un oro”. Definirlo y hallar su probabilidad.

c) Ídem para el suceso B=”extraer una figura”.

d) Utilizando el resultado anterior y la fórmula adecuada (¡no mediante la regla de Laplace!), calcular la probabilidad de no extraer una figura.

e) Definir el suceso “extraer una figura y que sea además oro”; hallar su probabilidad. ¿Cómo es este suceso respecto a A y B?

f) Sea el suceso “extraer figura u oro”. Utilizando la fórmula adecuada y lo obtenido en los apartados anteriores (¡no mediante la regla de Laplace!), calcular la probabilidad de dicho suceso, razonando el procedimiento utilizado.

4. Se lanzan dos dados y se suma la puntuación obtenida. Se pide:

a) Indicar el espacio muestral. ¿Cuántos casos posibles hay?

b) Hallar la probabilidad de obtener exactamente un 4

c) Hallar la probabilidad de obtener puntuación ≤ 4

d) Hallar la probabilidad de no sacar un 12

e) Hallar la probabilidad de sacar un 4 o un 12

f) ¿Cuál es el número más probable de obtener? ¿Y el menos?