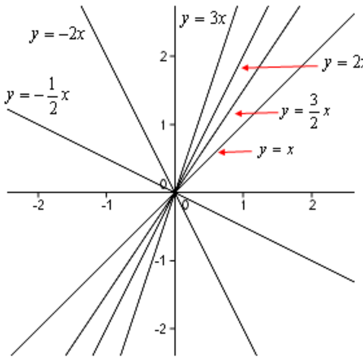
Tema 13. Funciones de proporcionalidad directa e inversa Resumen

El concepto de proporcionalidad es fundamental en matemáticas (y en todo). Recuérdese:

- Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número. Por tanto, la razón (el cociente) entre las magnitudes correspondientes es una constante, que se llama razón de proporcionalidad, *k*. Si se designan por *x* e *y* las cantidades correspondientes, se cumple $\frac{y}{x} = k \Leftrightarrow y = kx$.



- Esta relación da lugar a la función de proporcionalidad directa: $f(x) = kx$ o $f(x) = mx$.

La gráfica de cada una de estas funciones es una recta que pasa por el origen.

Ejemplo: Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son directamente proporcionales. Por tanto, todas las razones que se forman son iguales;

esto es: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15} = \frac{1}{k} = \frac{x}{y} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{3}{2}x$

Tabla 1. Directamente proporcionales						
Magnitud A	**2**	4	10	**1**	***x***	***x***
Magnitud B	**3**	6	15	***k***	***y***	***y = kx***

- Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número; o cuando al dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada por ese mismo número; en consecuencia, el producto de las magnitudes correspondientes es constante.

Por tanto, si a *x* le corresponde *y*: $x \to y$, entonces, a $kx \to \frac{y}{k} \Leftrightarrow xy = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}$.

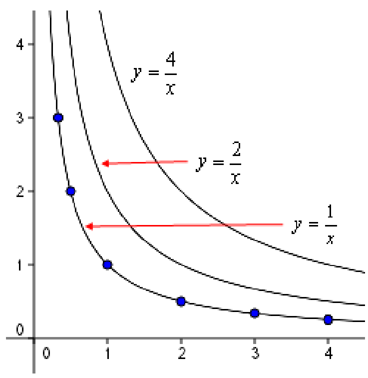
Ejemplo: Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son inversamente proporcionales. Como puede observarse, al multiplicar la magnitud A (cuyo valor inicial es 2), por 2, por 4, …, la magnitud B (de valor inicial 50) se divide por 2, por 4, …

Tabla 2. Inversamente proporcionales						
Magnitud A	**2**	4	8	**1**	***x***	***x***
Magnitud B	**50**	25	12,5	***k***	***y***	***k/x***

Por tanto, los productos $2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 8 \cdot 12{,}5 = 100 \Rightarrow 1 \cdot k = 100 \Rightarrow x \cdot y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}$.

- Esta relación da lugar a la función de proporcionalidad inversa, cuya expresión es de la forma $f(x) = \frac{k}{x}$, o bien $y = \frac{k}{x}$.

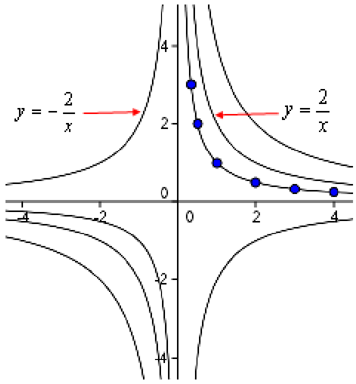
La gráfica de cada una de estas funciones es una hipérbola.



Ejemplo: En la figura adjunta se ha trazado parte de las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ e $y = \frac{4}{x}$. Para representarlas basta con construir una tabla de valores, representarlos en el plano cartesiano y unirlos mediante una línea curva. Los puntos marcados en la gráfica corresponden a la función $y = \frac{1}{x}$, y son: (1,1), (2, 1/2), (3, 1/3), (4, 1/4), (1/2, 2), (1/3, 3).

Si se dan valores negativos a *x* se obtiene otra rama hiperbólica.

- La gráfica "completa" de las funciones del tipo $f(x)=\dfrac{a}{x}$ es



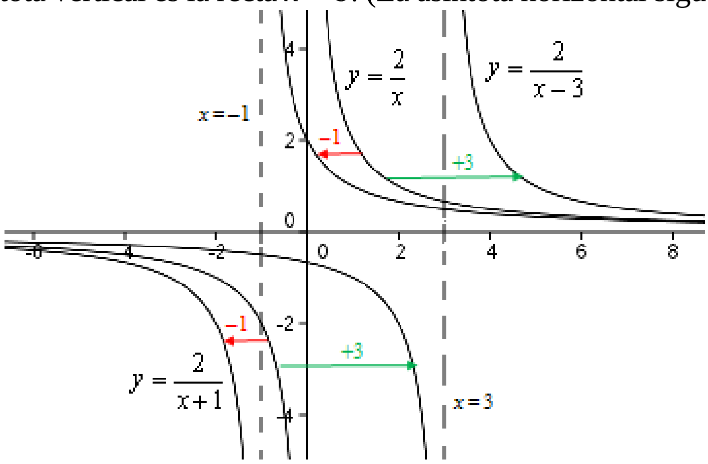
como se observa en esta otra figura, cuyas características son:
Su dominio es **R** – {0}.
Nunca toma el valor 0.
Tiene dos ramas, que están: en el primer y tercer cuadrante si $k > 0$; en el segundo y cuarto cuadrante cuando $k < 0$.
Tiene dos asíntotas: una horizontal, la recta $y = 0$; y otra vertical, la recta $x = 0$.
Es simétrica respecto del origen.

- Otras funciones relacionadas con la de proporcionalidad inversa son:

$$f(x)=\frac{a}{x-b},\quad f(x)=\frac{a}{x}+c,\quad f(x)=\frac{a}{x-b}+c\,.$$

Sus gráficas son también hipérbolas, y se obtienen trasladando la de la función $f(x)=\dfrac{a}{x}$.

Añadir, restando, un número b en el denominador traslada la hipérbola a derecha, si b es positivo; o a izquierda, si b es negativo.
En este caso, la asíntota vertical es la recta $x = b$. (La asíntota horizontal sigue siendo $y = 0$.)



Si se suma un número c la hipérbola se traslada hacía arriba, si c es positivo, o hacia abajo, si c es negativo.
En este caso, la asíntota horizontal es la recta $y = c$. (La asíntota vertical sigue siendo $x = 0$.)