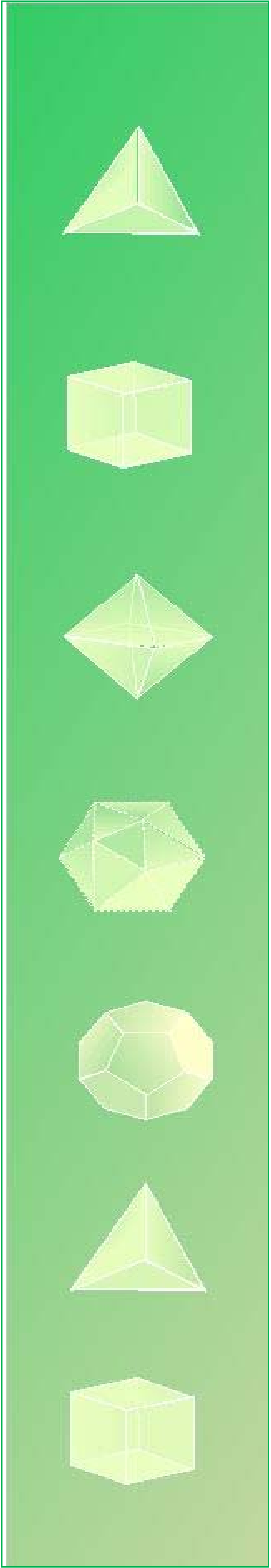


Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

4ºB de ESO

Capítulo 10:

Funciones y gráficas

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Andrés García y Javier Sánchez

Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos

Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Índice

Resumen

Uno de los conceptos más importantes que aparecen en las Matemáticas es la idea de *función*. Intuitivamente, una función es cualquier proceso por el que se transforma un número en otro. Más formalmente, una función *f* es una correspondencia que a un número *x* le asigna un único número *y*, tal que $y = f(x)$.

No es difícil encontrar ejemplos de funciones. El espacio recorrido en función del tiempo, el peso de una persona en función de su altura, lo que pagamos de teléfono en función de los minutos que hablamos.

En este capítulo aprenderemos cómo tratar de manera rigurosa la idea intuitiva de función y cómo estudiar las funciones. Veremos cómo describir sus características y estudiaremos la manera de hacer un modelo matemático de algunas situaciones de la vida real que nos ayude a tomar mejores decisiones. Prácticamente cualquier situación real puede ser estudiada con ayuda de funciones. Tenemos pues mucho campo…

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

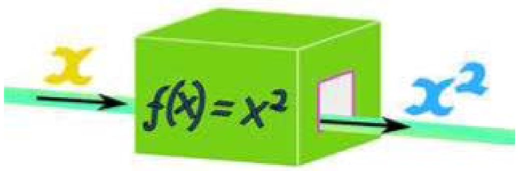
1. FUNCIONES REALES

1.1. Concepto de función

Una ***función*** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, tales que a cada valor de la variable independiente, *x*, le corresponde ***un solo*** valor de la dependiente, *y*.

Para indicar que la variable (*y*) depende o es función de otra, (*x*), se usa la notación ***y* = *f*(*x*),** que se lee *"y es función de x"*.

Las funciones son como máquinas a las que se les mete un elemento, *x*, y devuelve otro valor, $y = f(x)$. Por ejemplo, en la función $f(x) = x^2$, se introduce valores de *x*, y nos devuelve sus cuadrados.



Es MUY IMPORTANTE que tengamos un solo valor de *y* (variable dependiente) para cada valor de *x* (variable independiente). En caso contrario no tenemos una función.
Las funciones se introdujeron para estudiar procesos. Si haciendo lo mismo nos pueden salir cosas distintas, no se puede estudiar del mismo modo.

Ejemplos:

- *Pensemos en la factura de teléfono. Si sabemos cuántos minutos hemos hablado (suponiendo, claro, que cuesten lo mismo todos) también sabemos cuánto nos toca pagar. El dinero que pagamos es función del tiempo.*

- *Vamos al casino y apostamos a rojo o negro. Si apostamos un euro, podemos ganar dos o no ganar nada. Si decimos cuánto apostamos no sabemos cuánto vamos a ganar. Por tanto, las ganancias en un casino NO son una función de la apuesta.*

Actividades resueltas

- Indica si las siguientes situaciones representan una función o no
    a. El espacio recorrido por un coche y el tiempo.
    b. Las ganancias en la Bolsa en función de lo invertido.
    c. El cuadrado de un número.

Solución:

Son funciones la a) y la c). La b) no lo es porque no sabemos cuánto ganamos.

1.2. Gráfica de una función

En muchas ocasiones, la manera más sencilla de ver cómo se comporta una función es dibujarla en el plano cartesiano. Vamos a recordar muy brevemente qué era el plano cartesiano (cartesiano, viene de *Cartesio*, que era el nombre con el que firmaba su inventor, *Renè Descartes*).

Un **sistema de referencia cartesiano** consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas **ejes**. El punto en el que se cortan los ejes es el origen del sistema, también llamado **origen de coordenadas.**

Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal lo denominamos **eje de abscisas** o también eje X y al vertical **eje de ordenadas** o eje Y.

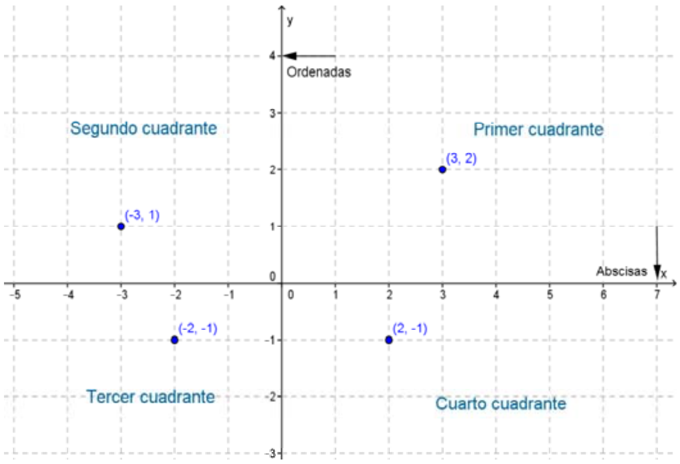
Al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como **cuadrantes**:

- Primer cuadrante: Zona superior derecha

- Segundo cuadrante: Zona superior izquierda

- Tercer cuadrante: Zona inferior izquierda

- Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha.



Sistema de referencia cartesiano

Para representar puntos, sólo hay que recordar que la primera componente (o abscisa) es x, por lo que debe ir al eje X (eje de abscisas). La segunda componente (u ordenada) es y, por tanto va al eje Y (eje de ordenadas).

El sentido positivo es a la derecha y arriba. Si alguna de las componentes es negativa, entonces se coloca en sentido contrario.

Para representar una gráfica, lo que debemos hacer es simplemente tomar valores (x, y) o, lo que es lo mismo (x, $f(x)$) puesto que $y = f(x)$. Luego los unimos, bien con líneas rectas, bien ajustando "a ojo" una línea curva. Naturalmente, ahora nos aparecen dos cuestiones:

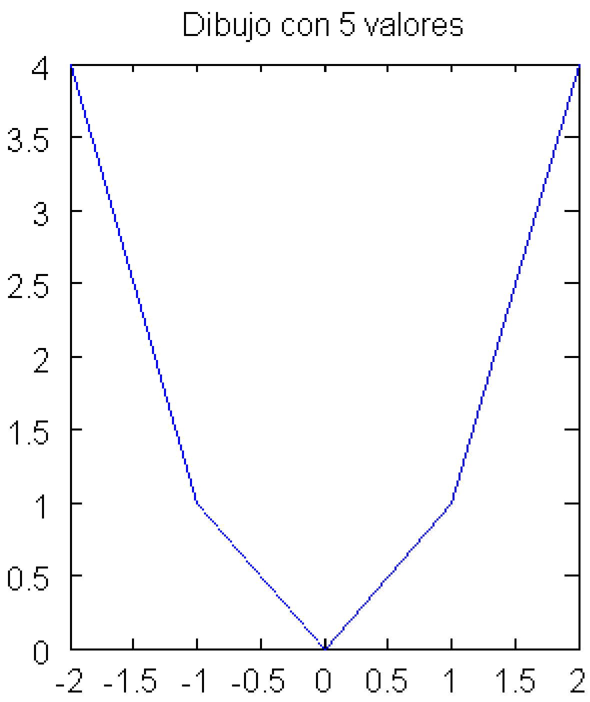
- ¿Cuántos valores hay que dar?
- ¿Qué valores le damos?

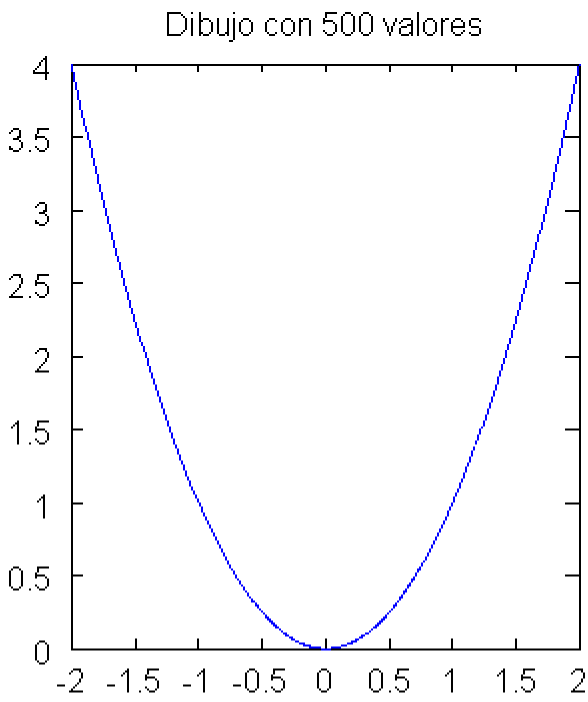
En general, no hay una respuesta clara a esas preguntas, aparte de la obvia "cuánto más, mejor". Si una gráfica se dibuja con ordenador, normalmente se le da un intervalo y el número de valores que queremos que represente. Típicamente, un ordenador da MUCHOS valores: 500, 1000, ….

Ejemplo:

- *Dibujamos la función* $y = x^2$ en el intervalo [–2, 2] con un ordenador (este dibujo está hecho con el programa *Octave*, que es código abierto y puedes descargar libremente).

Hacemos dos gráficas, una dando 5 valores y la otra 500. Observa la diferencia entre los dos dibujos. Observa también que el ordenador une los puntos con segmentos de rectas.



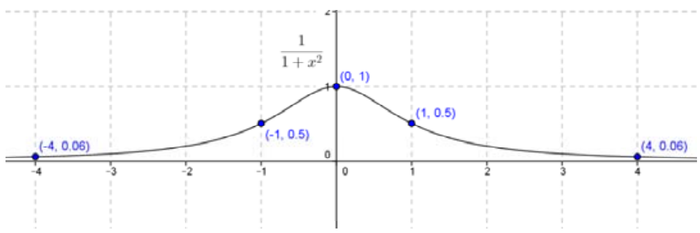


Actividad resuelta

- *Dibujar la función* $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Más tarde indicaremos los valores que es recomendable tomar. De momento, nos limitaremos a dar unos pocos y unir puntos. Por ninguna razón en especial, tomamos –4, –1, 0, 1 y 4. Recordemos que al sustituir se usan SIEMPRE paréntesis. Así $\dfrac{1}{(-4)^2+1}=\dfrac{1}{16+1}=\dfrac{1}{17}=0'06$. Obtenemos entonces la tabla de valores y basta unir los puntos (dándoles “a ojo” un poco de curva).

x	f (x)
–4	0’06
–1	0’5
0	1
1	0’5
4	0’06

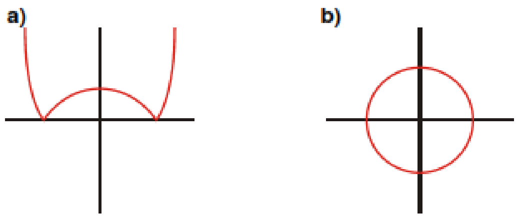


Una cuestión a reseñar de las gráficas es el hecho de que, directamente a partir de un dibujo podemos ver si corresponde a una función o no. Para verlo, basta fijarse en si hay algún valor de *x* que corresponda a más de un valor de *y*. Si NO lo hay, es una función. Observamos que el ejemplo anterior es una función.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Actividad resuelta

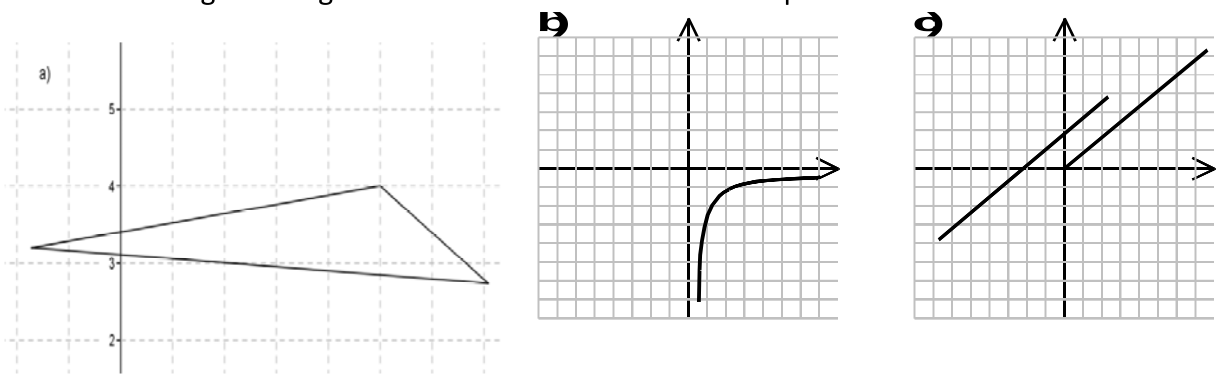
- *Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función:*



La gráfica a) es una función. La gráfica b) NO lo es porque, por ejemplo el punto x = 0 tiene dos valores de y.

Actividad propuesta

1. De las siguientes gráficas indica cuáles de ellas corresponden a funciones.



1.3. Diferentes maneras de expresar una función

Recordemos, una vez más, que una función es la descripción de cómo se relacionan dos magnitudes. Así pues, esta descripción la podemos saber de varias maneras.

Funciones dadas por tablas

Probablemente, la manera más sencilla en la que se puede dar una función es con una tabla de valores. Es además la manera más experimental: observamos un proceso y medimos las cantidades que nos salen. Así tenemos una idea de cómo se relacionan.

Dibujar su gráfica no puede ser más sencillo. Basta poner los puntos y, en su caso, unirlos.

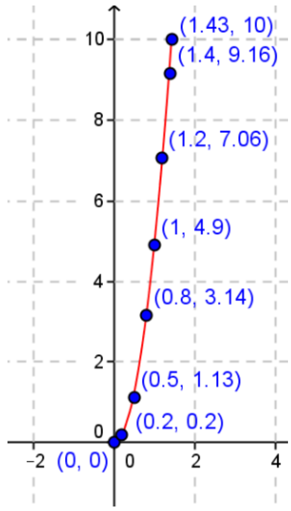
Ejemplo:

- *Soltamos una pelota desde 10 m de altura y medimos el espacio recorrido (en segundos). Obtenemos entonces la tabla siguiente:*

Espacio (m)	0	0,2	0,5	0,8	1	1,2	1,4	1,43
Tiempo (s)	0	0,2	1,13	3,14	4,9	7,06	9,16	10,00

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Es muy sencillo dibujar su gráfica. Basta representar los puntos y unirlos (esta gráfica está hecha con el programa *Geogebra*, también de código abierto):



Date cuenta que tiene sentido "*rellenar*" el espacio entre puntos. Aunque no lo hayamos medido, la pelota no puede teletransportarse, por lo que seguro se puede hablar de dónde está en el instante 0'7, por ejemplo. Y obviamente, el espacio recorrido estará entre 1'13 (que corresponde a 0'5 segundos) y 3'14 (que corresponde a 0'8 segundos).

La cuestión que nos planteamos es la siguiente: ¿es siempre así? ¿Puede haber funciones donde NO TENGA SENTIDO poner valores intermedios?

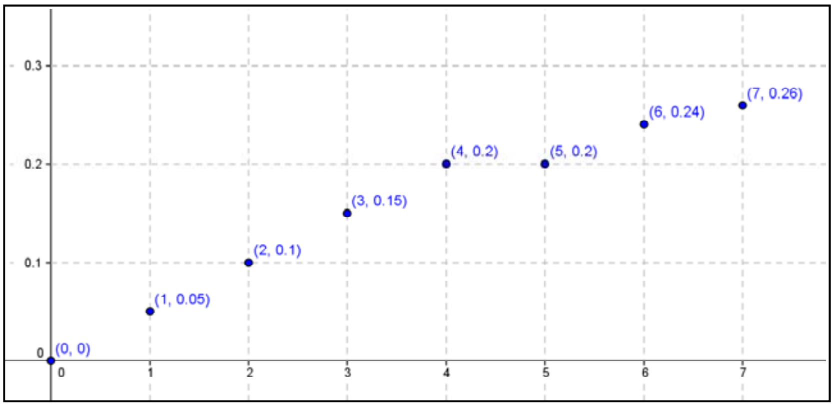
A poco que pienses, te darás cuenta de que sí las hay. Veamos un ejemplo:

Ejemplo:

- *En una librería, han puesto la siguiente tabla con el precio de las fotocopias, dependiendo del número de copias:*

Nº de copias	0	1	2	3	4	5	6	7
Precio (euros)	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,2	0,24	0,28

Se puede construir la representación gráfica dibujando estos puntos.



La cuestión de si podemos dibujar puntos intermedios entre los anteriores se responde por sí sola.

No se pueden hacer 1'5 copias. Solamente puedes hacer un número entero de copias.

Por tanto, no tiene sentido plantearse siquiera dar valores intermedios ni dibujarlos.

Funciones dadas por una expresión

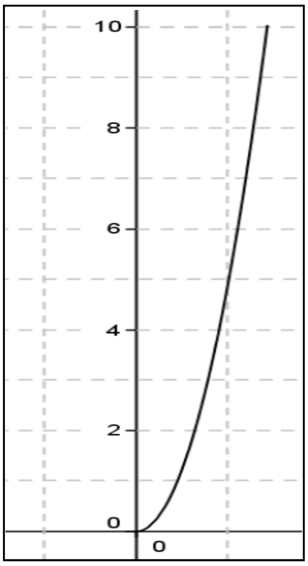
En muchísimas ocasiones, sabemos suficiente de la relación entre dos magnitudes como para conocer exactamente una expresión que las relaciona. Vamos a empezar con un ejemplo.

Ejemplo:

- *Volvamos al caso que vimos antes, donde soltábamos una pelota.*

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

No necesitamos medir los tiempos y los espacios. Es un cuerpo en caída libre y por tanto lo que en Física se llama movimiento uniformemente acelerado. En este caso $e = \frac{1}{2}at^2$ donde *e* es el espacio, *t* es el tiempo y *a* es la aceleración. Además, *a* es conocida pues es la gravedad, es decir 9'8 m/s^2.



Por tanto, las dos magnitudes, espacio y tiempo, están relacionadas por la ecuación $e = \frac{1}{2}9'8\,t^2$. En Matemáticas es más usual poner *x* e *y*, por lo que sería $y = \frac{1}{2}9'8x^2$ pero es exactamente lo mismo.

Y, como tenemos todos los puntos que queramos, podemos dibujar la función sin ningún problema con sus puntos intermedios. O indicarle a un ordenador que la dibuje.

El resultado, naturalmente, es el mismo.

Actividades propuestas

2. Un ciclista bebe 1/2 litro de agua cada 10 km de recorrido. Si en el coche de equipo llevan un bidón de 40 litros, haz una tabla que indique su variación y escribe la función que la representa.
3. Un ciclista participa en una carrera recorriendo 3 km cada minuto. Teniendo en cuenta que no partió del origen sino 2 km por detrás representa en una tabla el recorrido durante los tres primeros minutos. Escribe la función que expresa los kilómetros en función del tiempo en minutos y dibújala.

Funciones definidas a trozos

- *Piensa en la siguiente situación para la tarifa de un teléfono móvil. Se paga un fijo de 10 € al mes y con eso son gratis los 500 primeros minutos. A partir de allí, se paga a 5 céntimos por minuto.*

Es evidente que es diferente el comportamiento antes de 500 minutos y después.

Una **función definida a trozos** es aquella que viene dada por una expresión distinta para diferentes intervalos.

En el ejemplo anterior, es fácil ver que $f(x) = \begin{cases} 10 + 0'05(x-500) & x > 500 \\ 10, & x \le 500 \end{cases}$.

Veamos brevemente por qué. Para valores menores que 500, el gasto es siempre 10 €. Para valores mayores, los minutos que gastamos POR ENCIMA DE 500 son (*x* – 500) y por tanto lo que pagamos por los minutos es 0'05(*x* – 500) pues lo medimos en euros. Hay que sumarle los 10 € que pagamos de fijo.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Actividades propuestas

4. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los puntos que tienes que calcular.

a. $f(x)=\begin{cases} x-1, & si\ \ x<-3 \\ -x+1, & si\ \ -3\le x<0 \\ 3, & si\ \ 0\le x<\infty \end{cases}$ Puntos: –5, –3'1, –3, –1, –0'1, 0, 1.

b. $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & si\ \ x<-2 \\ 3, & si\ \ -2\le x<1 \\ \sqrt{x}, & si\ \ 1\le x \end{cases}$ Puntos: –3, –2'1, –2, 0, 0'9, 1, 4, 9.

1.4. Dominio y recorrido de una función

Hasta ahora, no nos hemos preocupado de qué valores pueden tener la *x* y la *y*. Pero es evidente que no siempre pueden tomar todos los valores de la recta real. Por ejemplo, si una función nos da la altura con respecto del peso no vamos a poder tener valores negativos. Para ello existen los conceptos de dominio y recorrido.

El **dominio** de una función es el conjunto de valores que la variable independiente (*x*) puede tomar. Se escribe *Dom f* o *Dom*(*f*).

El **recorrido** o **rango** de una función es el conjunto de valores que la variable dependiente (*y*) puede tomar. Se escribe *Rgf* o *Rg*(*f*).

Normalmente, el recorrido es más directo de calcular. Simplemente, miramos la gráfica y vemos qué valores puede tomar la variable dependiente (*y*).

El dominio suele ser un asunto bastante más complicado. En general, existen dos razones por las que un valor de *x* NO pertenezca al dominio.

1. La función no tiene sentido para esos valores. Por ejemplo, si tenemos una función que represente el consumo de electricidad a cada hora del día, es evidente que *x* debe estar entre 0 y 24. ¡¡Un día tiene 24 horas!! De ninguna manera podemos hablar siquiera de lo que hemos gastado la hora 25.

2. La operación que nos da *f*(*x*) no puede hacerse. Por ejemplo, no se puede dividir entre 0, por lo que la función $f(x)=\frac{1}{x}$ tiene como dominio el conjunto $\{x\in\Re; x\neq 0\}$, es decir $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

El primer caso viene dado por la aplicación práctica y nuestro sentido común. El segundo es el que tiene más dificultad y por eso vamos a dedicarle un poco más de tiempo.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Cálculo de dominios

Existen dos operaciones que NO están permitidas.

a. Dividir entre 0.

b. Hacer raíces cuadradas o de índice par de números negativos. Ten en cuenta que la raíz cuadrada de 0 SÍ está definida (vale 0).

En capítulos futuros veremos alguna operación más, pero por ahora, sólo esas dos operaciones. Vamos a ver un método sistemático para calcular el dominio.

Método para calcular el dominio

1. Recuadra TODAS las operaciones problemáticas.
2. Para TODAS esas operaciones, plantea una ecuación igualándola a 0. Resuelve dicha ecuación.
3. Representa en una recta todas las soluciones de todas las ecuaciones.
4. Da valores a la función. Un valor en cada intervalo y los valores límite. Si la operación se puede hacer, es que el punto o el intervalo pertenece al dominio. Si no, pues no. Puedes ver si una operación vale, o no, haciéndola con la calculadora. Si sale error, es que no se puede. Marca con un X los valores que no valen y con un tick (V) si se pueden hacer.
5. Representa la solución con intervalos. Si el punto del extremo está, es un corchete como [] y si no, un paréntesis.

Así visto, puede parecer un poco complicado. Vamos a ver un par de ejemplos.

Actividades resueltas

- *Calcula el dominio de las siguientes funciones:*

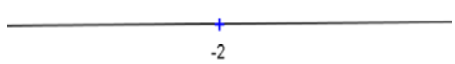
  a. $x+\sqrt{2x+4}$

  b. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}$

Apartado a

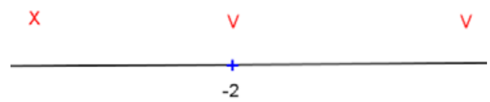
Vamos a seguir el procedimiento punto por punto.

1. El único posible problema es la raíz cuadrada de $2x+4$
2. Igualamos a 0 y resolvemos: $2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$
3. Representamos en la recta los valores.



4. Tenemos que dar un valor a la izquierda de –2, el valor –2 y un valor a la derecha. Por ejemplo, el –3, el –2 y el 0. Los marcamos en la recta

X	–3	–2	0
¿Es válido?	NO	SÍ	SÍ



5. El dominio es $[-2,+\infty)$ (el infinito SIEMPRE es abierto, nunca llegamos).

Apartado b

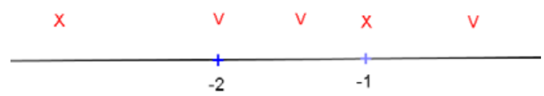
1. Tenemos dos posibles problemas. La raíz cuadrada de $x+2$ y el denominador $\sqrt{x+2}-1$.
2. Tenemos que igualar LOS DOS a cero. $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

Por otra parte $\sqrt{x+2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}=1$. Elevando al cuadrado $x+2=1^2 \Rightarrow x=-1$.

3. Representamos en la recta los valores.

4. Tenemos que dar un valor a la izquierda de –2, el valor –2, un valor entre –2 y –1, el valor –1 y un valor a la derecha de –1. Por ejemplo, el –3, el –2, el –1'5, el –1 y el 0. Los marcamos en la recta

X	–3	–2	–1'5	–1	0
¿Es válido?	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ



5. El dominio es $[-2,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Actividades propuestas

5. Indica el dominio de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ **b)** $\sqrt{x+\dfrac{1}{x+2}}$

6. Indica el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $y = 14x + 2$ **b)** $y=\dfrac{1}{x-1}$ **c)** $y=\sqrt{2+x}$

7. Representa las siguientes funciones e indica su dominio y recorrido:

a) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ si } x\in[-3,0) \\ 2, \text{ si } x\in[0,2] \end{cases}$ **b)** $g(x)=\begin{cases} -x, \text{ si } x\in[-2,1] \\ x, \text{ si } x\in(1,2] \end{cases}$

2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

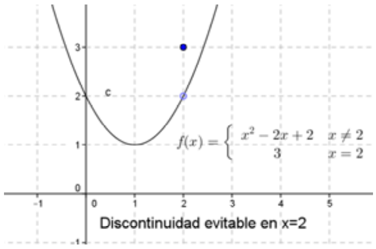
Recuerda que: En tercero ya estudiaste las características de una función. Es muy importante. Por eso vamos a insistir en ello.

2.1. Continuidad

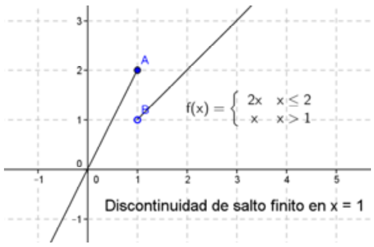
Intuitivamente, una función es continua si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. En caso contrario, se producen "saltos" en determinados valores de la variable independiente que reciben el nombre de discontinuidades.

Una discontinuidad puede ser de tres tipos:

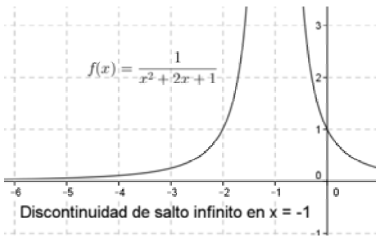
1. **Evitable**: En la función sólo "falla" un punto, que "no está donde debería estar". Más formalmente, si nos aproximamos al punto por la derecha y por la izquierda, nos aproximamos a un valor que no es el de la función. En este caso, la función sería continua sin más que cambiar la definición de la función en el punto que nos da problemas.



2. **De salto finito:** En un punto, la función tiene dos ramas diferentes a derecha e izquierda del punto. Estas ramas se aproximan a valores distintos (pero finitos) para cada lado. El punto de discontinuidad puede estar en una cualquiera de las ramas o incluso fuera de ellas. Da lo mismo, la discontinuidad sigue siendo de salto finito.

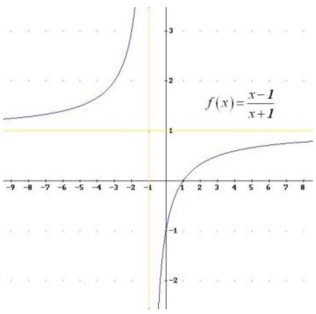


3. **De salto infinito:** Como en salto finito, en un punto la función tiene dos ramas diferentes. Pero en este caso, al menos una de las dos ramas (posiblemente las dos) se hace inmensamente grande o inmensamente negativa (en términos más informales "se va a infinito").

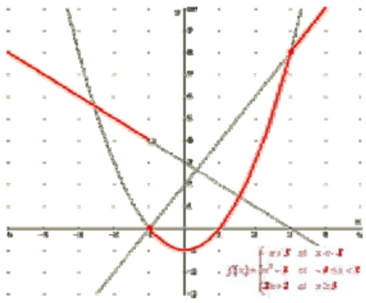


Actividades resueltas

- *Indica en estas funciones el/los valor/es de la variable independiente donde se produce la discontinuidad e indica el tipo de discontinuidad.*



Salto infinito en x = –1



Salto finito en x = –1

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

2.2. Monotonía: Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos

Las siguientes definiciones quizás te resulten conocidas de 3º de ESO.

Una función es **constante** en un intervalo cuando tome el valor que tome la variable independiente, la dependiente toma siempre el mismo valor. En símbolos, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el de la dependiente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **creciente (en sentido amplio)** en un intervalo si es estrictamente creciente o constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, para todo x_1 y x_2. Puede también decirse que, al aumentar el valor de la variable independiente, el valor de la dependiente NO disminuye.

Una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente disminuye también el de la dependiente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **decreciente (en sentido amplio)** en un intervalo si es estrictamente decreciente o constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$, para todo x_1 y x_2. Puede también decirse que, al aumentar el valor de la variable independiente, el valor de la dependiente NO aumenta.

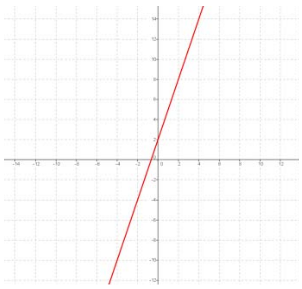
Una función es **estrictamente monótona** en un intervalo cuando es estrictamente creciente o decreciente en dicho intervalo.

Una función es **monótona (en sentido amplio)** en un intervalo cuando es creciente o decreciente (en sentido amplio) en dicho intervalo.

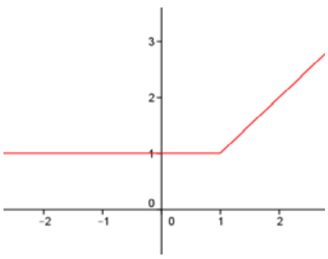
Como indican las definiciones, la monotonía o no de una función se da en un intervalo, es decir, para un conjunto de números reales. Por tanto, una función puede ser creciente para una serie de valores, para otros ser decreciente o constante, luego puede volver a ser creciente o decreciente o constante…

Ejemplos:

- *En las funciones siguientes estudia el crecimiento y el decrecimiento.*



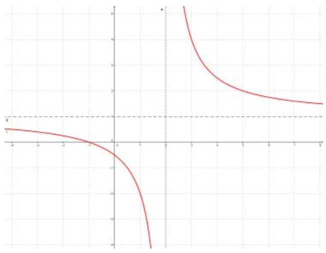
CRECIENTE siempre



CONSTANTE hasta x = 1

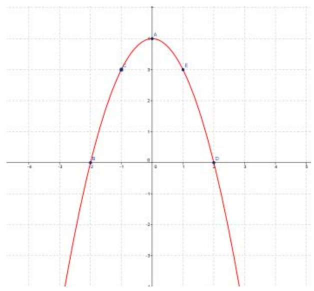
CRECIENTE desde x = 1

CRECIENTE(EN SENTIDO AMPLIO) siempre



DECRECIENTE hasta x = 2

DECRECIENTE desde x = 2



CRECIENTE hasta x=0

DECRECIENTE desde x = 0

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

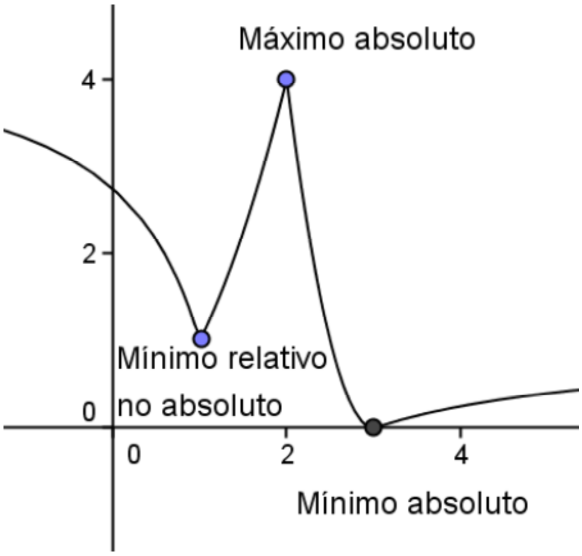
Extremos: máximos y mínimos

Una función presenta un **máximo relativo** en un punto cuando la imagen de la función en dicho punto es mayor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*). Si, además, la imagen es mayor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **máximo absoluto** en él.

Una función presenta un **mínimo relativo** en un punto cuando la imagen de la función en dicho punto es menor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*). Si, además, la imagen es menor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **mínimo absoluto** en él.

Si una función presenta un máximo o un mínimo en un punto, se dice que tiene un **extremo** en dicho punto, que podrá ser relativo o absoluto.

Ejemplo:

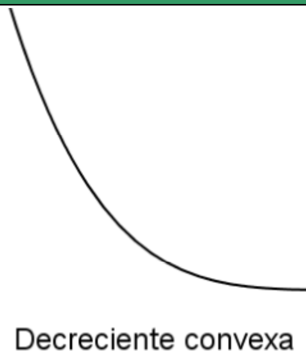
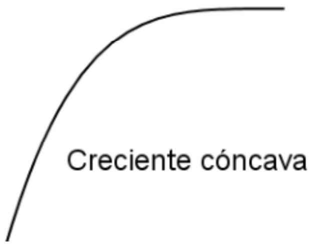
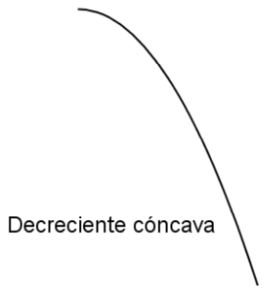


Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

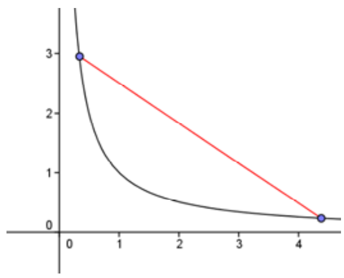
2.3. Curvatura: concavidad, convexidad y puntos de inflexión

Una función es **convexa** si al unir dos puntos de su gráfica el segmento queda por encima de dicha gráfica. Se dice **cóncava** si al hacer la misma operación queda por debajo. Un punto donde se cambia de cóncava a convexa o viceversa se llama **punto de inflexión**.

Una imagen vale más que mil palabras. Así que vamos a dibujar los cuatro tipos de funciones que tenemos:

	Creciente	**Decreciente**
Convexa		
Cóncava		

Puedes comprobar fácilmente que se cumple la definición. Si unes dos puntos, el segmento que forman está por encima o por debajo de la gráfica, según corresponde. Aquí a la derecha puedes ver un ejemplo con un tramo decreciente y convexo. Observa cómo el segmento queda por encima de la gráfica de la función.



Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

2.4. Simetrías.

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número y su opuesto:

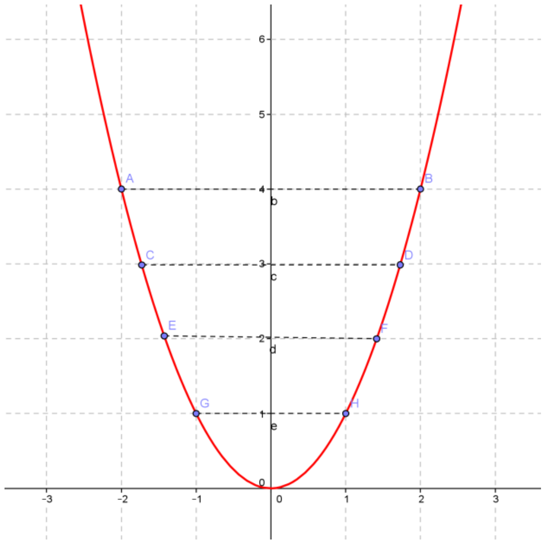
$$f(-x) = f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es simétrica respecto al eje de ordenadas, es decir, si doblamos el papel por dicho eje, la gráfica de la función coincide en ambos lados.

Ejemplo:

- *La función cuadrática* $f(x) = x^2$ *es par:*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número y su opuesto:

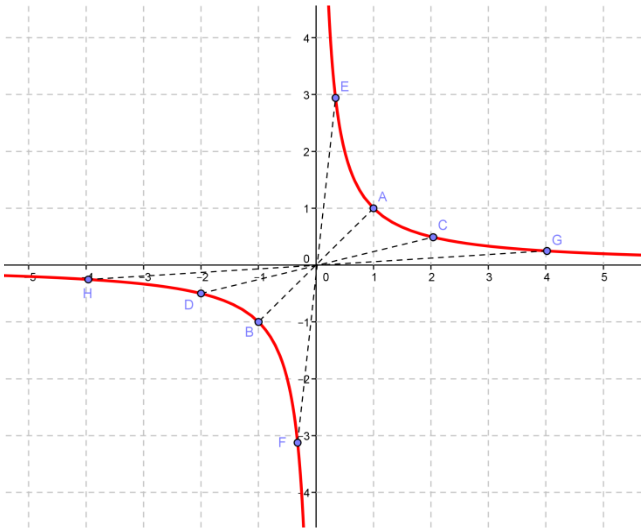
$$f(-x) = -f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es simétrica respecto al origen de coordenadas, es decir, si trazamos un segmento que parte de cualquier punto de la gráfica y pasa por el origen de coordenadas, al prolongarlo hacia el otro lado encontraremos otro punto de la gráfica a la misma distancia.

Ejemplo:

La función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{1}{x}$ es impar porque:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$



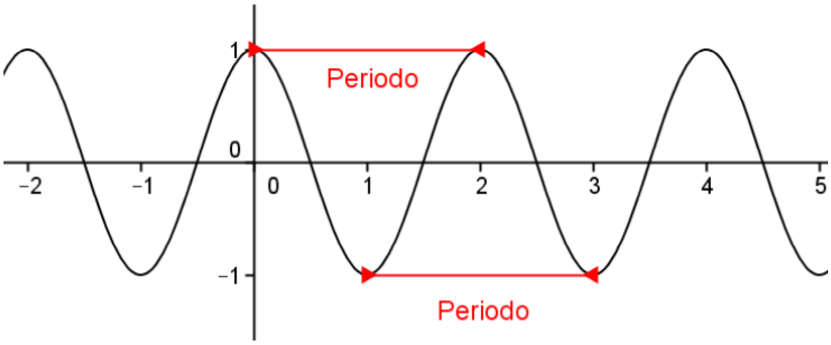
Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

2.5. Periodicidad

Una **función periódica** es aquella en la que las imágenes de la función se repiten conforme se le añade a la variable independiente una cantidad fija, llamada *periodo.*

Ejemplo:

Es muy claro que la siguiente función es periódica de periodo 2. Observa que el periodo se puede medir entre dos "picos" o entre dos "valles". De hecho se puede medir entre dos puntos equivalentes cualesquiera.



2.6. Comportamiento en el infinito

El infinito es, por propia definición, inalcanzable. Pero nos dice mucho de una función saber cómo es para valores muy grandes. Por eso, se recomienda, al dibujar una gráfica, dar un valor (o varios) positivo muy grande y un valor (o varios) muy negativo.

En algunas funciones simplemente ocurre que obtenemos valores muy grandes y "nos salimos de la tabla". Esto simplemente nos da una idea de hacia dónde va la función.

Pero en otras, y esto es lo interesante, nos aproximamos a un número finito. Eso significa que, para valores muy grandes de *x*, la función es aproximadamente una recta horizontal. Esta recta se llama **asíntota**.

Actividad resuelta

- *Dibuja la función* $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ *dando valores muy grandes y muy negativos.*

Damos valores muy grandes y vemos que nos aproximamos a 1:

$$f(10)=\frac{10^2+2}{10^2+1}=1'0099\,,\ f(100)=\frac{100^2+2}{100^2+1}=1'0001\,,\ f(1000)=\frac{1000^2+2}{1000^2+1}=1'000001$$

Si damos valores muy negativos, pasa lo mismo:

$$f(-10)=\frac{(-10)^2+2}{(-10)^2+1}=1'0099,\ f(-100)=\frac{(-100)^2+2}{(-100)^2+1}=1'0001,$$

$$f(-1000)=\frac{(-1000)^2+2}{(-1000)^2+1}=1'000001$$

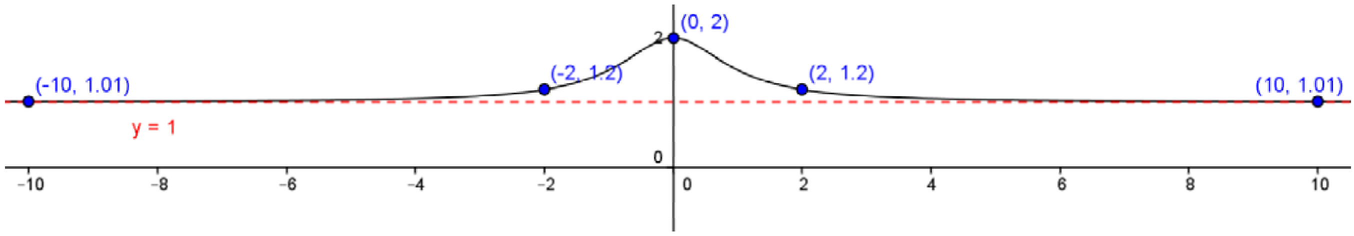
Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Podríamos haber visto directamente que los valores iban a ser los mismos porque la función es claramente par $f(-x)=f(x)$ y por tanto $f(-10)=f(10)$, $f(-100)=f(100)$ etc.

Eso nos da una idea de que la recta a la que nos aproximamos (asíntota) es la recta horizontal *y* = 1.

Vamos a dar unos valores más y dibujamos la función. Los valores negativos son iguales que los positivos. Hemos redondeado 1’0099 a 1’01

x	–10	–2	0	2	10
y	1’01	1’2	2	1’2	1’01



Observa la línea horizontal que es la asíntota dibujada en rojo a trazos.

2.7. Recopilatorio

Vamos a repasar lo que hemos visto hasta ahora y cómo utilizarlo para las dos cuestiones más importantes de este capítulo.

Cómo dibujar una función

Dibujar una función es esencialmente unir puntos. Vamos, de todas maneras, a repasar los diferentes casos.

1. Lo primero, miramos si la función está definida por una tabla o por una expresión. Si es una tabla no hay nada que hacer más que dibujar y (si tienen sentido los valores intermedios) unir los puntos que nos den y hemos terminado. Pasamos en ese caso al paso 2.
2. Si está definida a trozos, damos el punto o puntos donde cambia la definición y algunos puntos próximos. Típicamente el punto crítico +0’1 y —0’1. Por ejemplo, si cambia en 1, daríamos 1, 0’9 y 1’1.
3. En general, intentamos dar un valor muy grande y otro negativo, muy grande en valor absoluto. Si vemos que se estabiliza, los ponemos, es una asíntota.
4. Damos dos o tres puntos más cualesquiera.
5. Unimos los puntos (si tienen sentido los valores intermedios).

Actividades propuestas

8. Indica el dominio y recorrido de las siguientes funciones y dibújalas:

a. $\dfrac{1}{2x+6}$ b. $x+\dfrac{1}{3x-6}$ c. x^3-3x

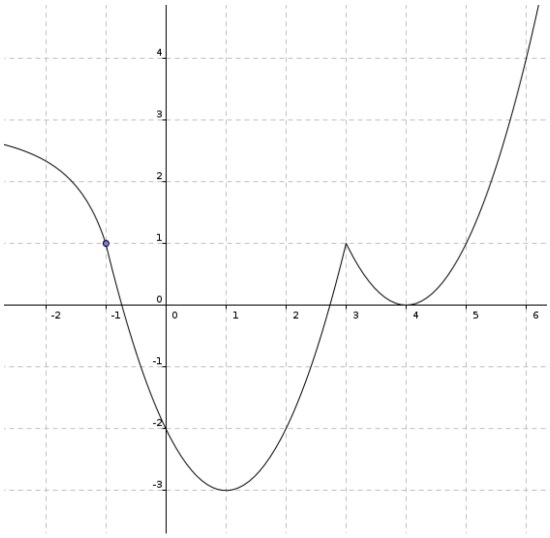
Cómo describir una función

Si nos dan la gráfica de una función y nos piden describirla, es sencillo:

1. Miramos los valores de *x* donde cambia el comportamiento.
2. Describimos cada uno de los tramos
3. Describimos los máximos y mínimos indicando si son relativos o absolutos.

Actividad resuelta

- *Describir la función*



Lo primero, la función es continua. Los puntos donde "pasa algo" son *x* = –1, *x* = 1, *x* = 3 y *x* = 4. Pasamos a describir los tramos:

En (–∞, –1) decreciente cóncavo. En (–1, 1) decreciente convexo. En (1, 3) creciente convexo. En el intervalo (3, 4) decreciente convexo. En (4, +∞) creciente convexo.

A veces se pone separado el crecimiento y la curvatura:

Creciente en (1, 3) ∪ (4, +∞)

Decreciente en (–∞, 1) ∪ (3, 4)

Cóncava en $(-\infty,-1)$. Convexa en (–1, 3) ∪ (3, +∞)

Finalmente hay un máximo relativo en *x* = 3. Hay mínimos relativos en *x* = 1 y *x* = 4. No hay máximo absoluto y en *x* = 1 hay un mínimo absoluto.

No hay asíntotas. Cuando *x* se hace muy grande la *y* tiende a +∞, y cuando la *x* se acerca a –∞ la *y* tiende también a +∞.

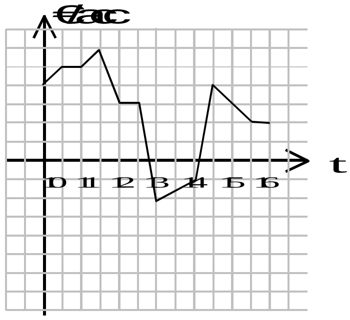
Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Actividades propuestas

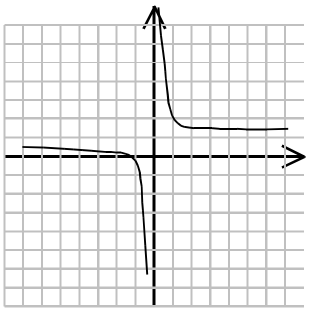
9. Dibuja las siguientes funciones e indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $y = x^3$ **b)** $y = x^5$ **c)** $y = \frac{1}{x^2}$

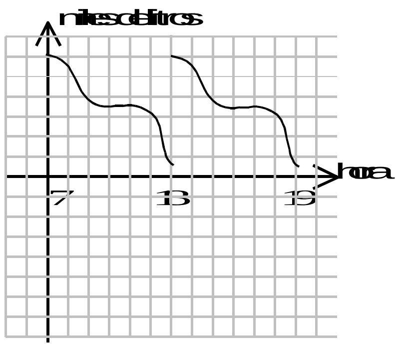
10. La gráfica que se da a continuación indica la evolución de un valor de la bolsa (en el eje vertical en miles de euros por acción) durante una jornada. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



11. Estudia la siguiente gráfica, indicando: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



12. La gráfica que se da a continuación representa el volumen de combustible en el depósito de una gasolinera al cabo de un día. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

2.8. Ampliación: Traslaciones

Con lo que hemos visto anteriormente, ya podemos dibujar cualquier función. Lo que vamos a describir ahora es una manera de ahorrarnos trabajo en algunas ocasiones.

A veces, hemos dibujado una función y nos piden dibujar otra similar. Por ejemplo, si estudiamos un cuerpo en caída libre, el espacio recorrido es $y = \frac{1}{2}9'8x^2$. Pero, si el cuerpo ya había recorrido un espacio de 10 m, sería $y = 10 + \frac{1}{2}9'8x^2$. Si la quisiéramos dibujar, en principio deberíamos volver a dar todos los valores. Pero, ¿no podremos evitarnos esfuerzos y aprovechar la gráfica que YA tenemos?

Sí, podemos. Vamos a verlo ahora.

Traslaciones verticales.

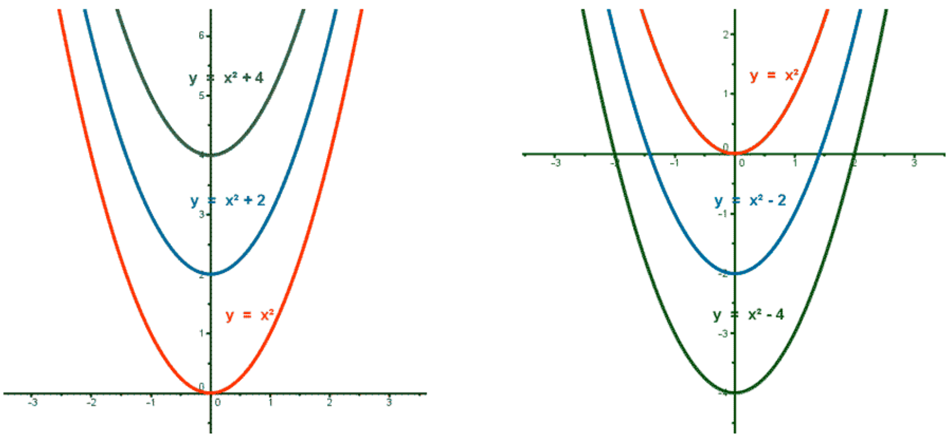
Trasladar verticalmente K unidades una función *f*(*x*) es sumarle a la variable dependiente *y* = *f*(*x*) la constante K. En otras palabras, movemos la función hacia arriba o abajo.

Se obtiene la función: ***y* = *f*(*x*) + K**

- Si K > 0 la función se traslada **hacia arriba**.
- Si K < 0 la función se traslada **hacia abajo**.

Ejemplo:

Representa, mediante la realización previa de una tabla de valores, la función $f(x) = x^2$. A continuación, mediante traslación, la de las funciones $f(x) = x^2 + 2$, $f(x) = x^2 + 4$, $f(x) = x^2 - 2$ y $f(x) = x^2 - 4$.



Traslaciones horizontales.

Trasladar horizontalmente K unidades una función *f*(*x*) es sumarle a la variable independiente *x* la constante K.

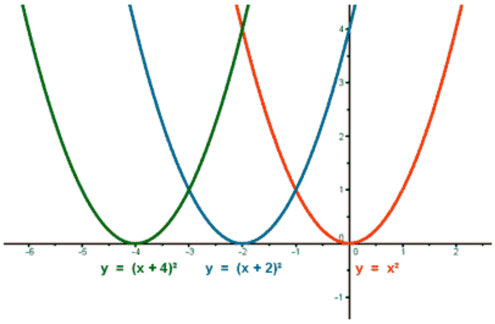
Se obtiene la función *y* = *f*(*x* + K)

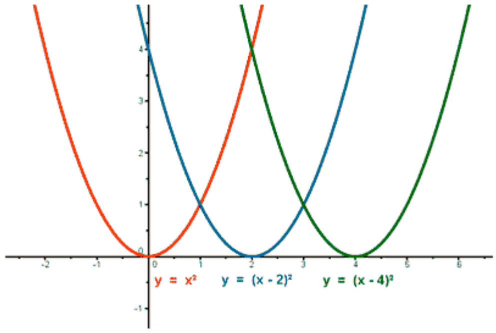
- Si K > 0 la función se traslada **hacia la izquierda**.
- Si K < 0 la función se traslada **hacia la derecha.**

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Ejemplo:

- *Representa las funciones* $f(x) = x^2$, $f(x) = (x+2)^2$, $f(x) = (x+4)^2$, $f(x) = (x-2)^2$ *y* $f(x) = (x-4)^2$.





Actividades propuestas

13. Representa la función $y = 10 + \frac{1}{2}9'8x^2$ que poníamos como ejemplo e interpreta su sentido físico.

14. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 2$ b. $y = 2 - x^2$ c. $y = 2x^2$ d. $y = -2x^2$

15. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{x} + 5$ b. $y = \frac{5}{x}$ c. $y = \frac{1}{x} - 2$ d. $y = \frac{2}{x} + 3$

16. Representa la función $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, dibuja las gráficas de las funciones:

a. $y = f(x) - 3$ b. $y = f(x) + 3$ c. $y = f(x - 3)$ d. $y = f(x + 3)$

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

3. VALORES ASOCIADOS A LAS FUNCIONES

Muchas veces, nos interesa el comportamiento de una función en un valor concreto y alguna medida sobre ella. Por ejemplo, si consideramos el espacio que recorre un coche, lo que nos puede interesar no es todo el recorrido, sino sólo la velocidad al pasar junto a un radar. Las medidas más importantes vamos a describirlas ahora.

3.1. Tasa de variación y tasa de variación media (velocidad)

La **tasa de variación** de una función entre dos puntos *a* y *b* es la diferencia entre el valor de la función para *x* = *a* y el valor para *x* = *b*. En símbolos:

$$TV[a,b] = f(b) - f(a)$$

La **tasa de variación media** (**velocidad media**) de una función entre dos puntos *a* y *b* es el cociente entre la tasa de variación entre los mismos y la diferencia *a* y *b*. En símbolos:

$$TVM[a,b] = \frac{TV[a,b]}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Estos conceptos pueden parecerte raros al principio. Pero realmente son cosas que se aplican mucho en la vida diaria. Pensemos en un coche que se mueve. El espacio que recorre entre dos momentos de tiempo es la tasa de variación. La velocidad media a lo que los ha recorrido es la tasa de variación media.

Actividad resuelta

- *El coche en que circulamos recorre 100 Km a 50 Km/h y luego otros 100 Km a 100 Km/h. En consecuencia, el espacio recorrido viene dado por la función* $f(t) = \begin{cases} 50t, & t \le 2 \\ 100 + 100(t-2), & t > 2 \end{cases}$. *Se pide:*

1. Justificar la función que da el espacio recorrido.
2. Calcular e interpretar las tasas de variación TV[0, 3], TV[1, 2], TV[2’5, 3]
3. Calcular e interpretar las tasas de variación medias TVM[0, 3], TVM[1, 2], TVM[2’5, 3]
4. ¿Por qué la velocidad media NO han sido 75 Km/h, que es la media de las velocidades?

Apartado 1.

Para justificar la función, sólo tenemos que recordar la superconocida fórmula $e = vt$. Lo único que hay que ver es cuándo cambia la velocidad.

Si el coche va a 50 km/h, obviamente en 2 h llega a los 100 km y cambia la velocidad. Hasta entonces, el espacio recorrido es 50*t* (velocidad por tiempo). A partir de allí, sería 100(*t* – 2) puesto que contamos el tiempo desde el instante 2. A ello se le debe sumar el espacio ya recorrido, que son 100.

Apartado 2. La tasa de variación no es más que el espacio recorrido. Basta con aplicar la definición. Como ya hemos dicho antes, no nos tiene que dar ningún miedo las funciones definidas a trozos. Simplemente sustituimos donde corresponda y punto.

$TV[0,3] = f(3) - f(0) = [100 + 100 \cdot (3-2)] - 50 \cdot 0 = 200$. Entre 0 y 3 horas hemos recorrido 200 Km.

$TV[1,2] = f(2) - f(1) = 50 \cdot 2 - 50 \cdot 1 = 50$. Entre 1 y 2 horas hemos recorrido 50 Km.

$TV[2'5,3] = f(3) - f(2'5) = [100 + 100 \cdot (3-2)] - [100 + 100 \cdot (2'5-2)] = 100 \cdot (3 - 2'5) = 50$. Hemos recorrido 50 Km entre las 2'5 horas y las 3.

Apartado 3. La tasa de variación media es lo que en el lenguaje de la calle se llama velocidad (media). Y para calcularla se divide el espacio entre el tiempo, sin más.

$TVM[0,3] = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-2} = \dfrac{[100+100\cdot(3-2)]-50\cdot 0}{3-0} = 66'67$ Km/h. Entre 0 y 3 horas nuestra velocidad media ha sido de 66'67 Km/h, una media (ajustada por el tiempo) de las velocidades.

$TVM[1,2] = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = \dfrac{50}{2-1} = 50$. Entre 1 y 2 horas nuestra velocidad ha sido de 50 Km/h, como planteaba de hecho el problema.

$TVM[2'5,3] = \dfrac{f(3)-f(2'5)}{3-2'5} = \dfrac{50}{3-2'5} = 100$. Entre 2'5 y 3 horas nuestra velocidad ha sido, como era de esperar, de 100 Km/h

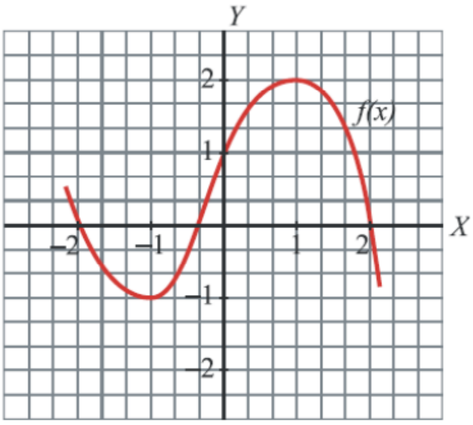
Apartado 4. Pues porque hemos pasado más tiempo circulando a 50 Km/h que a 100 Km/h y por tanto nuestra velocidad media debe estar más cerca de 50 que de 100.

Actividades propuestas

17. Dada la función $f(x) = (x-1)^3$, calcula la tasa de variación media en el intervalo [0, 1]. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

18. Dada la función $f(x) = \dfrac{3}{x}$, calcula la tasa de variación media en el intervalo [–3, –1]. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

19. Calcula la TVM de esta función *f*(*x*) en los siguientes intervalos: a) [–1, 0] y b) [1, 2].



20. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$. Halla la tasa de variación media en el intervalo [0, 2] e indica si es creciente o decreciente en ese intervalo.

21. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - 3x$ en el intervalo [1, 2] e indica si *f*(*x*) crece o decrece en ese intervalo.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

3.2. Tasa de crecimiento

"… la afiliación al Régimen General de la Seguridad Social, donde hay 13,1 millones de trabajadores, apenas repuntó en 16.852 personas respecto a febrero del 2013, un 0,13 % más" (Diario El Mundo, edición digital, 04/03/2014).

Seguro que has leído (o visto en la tele) noticias como ésta un montón de veces. La medida que están utilizando es lo que se conoce como la tasa de crecimiento. Vamos a proceder a definirla.

La **tasa de crecimiento** de una función entre dos puntos a y b es el cociente entre la tasa de variación y el valor de la función en $x = a$. En símbolos: $T_{Crec}[a,b]=\dfrac{f(b)-f(a)}{f(a)}$ o bien $T_{Crec}[a,b]=\dfrac{TV[a,b]}{f(a)}$.

Se suele expresar en tanto por ciento, por lo que normalmente se multiplica por 100. Las fórmulas pasan a ser entonces $T_{Crec}[a,b]=\dfrac{f(b)-f(a)}{f(a)}\cdot 100$ o $T_{Crec}[a,b]=\dfrac{TV[a,b]}{f(a)}\cdot 100$

Si $f(a) = 0$ la tasa de crecimiento **no está definida**. NO SE PUEDE DIVIDIR ENTRE 0.

Observa que la tasa de crecimiento puede ser negativa, indicando una disminución. Crecer al –5 % significa haber perdido el 5 %.

Ejemplo:

- *Vamos a comprobar que en el periódico han calculado bien la tasa de crecimiento.*

Los instantes del tiempo no son importantes. En el instante inicial es $f(a)=13.100.000$ trabajadores. En el instante final hay que sumarle el aumento $f(b)=13100000+16852$ = 13.116.852.

Aplicando la fórmula

$$T_{Crec}[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}\cdot 100=\frac{13.116.852-13.100.000}{13.100.000}\cdot 100=0'1286\ \%$$

que se redondea al 0'13 %. Está bien calculado.

Observa que la tasa de variación es 16852 por lo que lo podíamos haber calculado directamente con la otra fórmula:

$$T_{Crec}[a,b]=\frac{TV[a,b]}{f(a)}\cdot 100=\frac{16852}{13.100.000}\cdot 100=0'1286\ \%$$

y, obviamente, sale lo mismo.

Actividades propuestas

22. Dada la función $f(x)=(x+1)^3$, calcula la tasa de crecimiento en el intervalo [0, 1].

23. La función $f(x)=1000\cdot(1'03)^x$ representa el resultado de ingresar 1000 € en el banco (x = 0 es el estado inicial y, naturalmente, vale 1000 €). Calcula su tasa de crecimiento entre 0 y 1, entre 1 y 2 y entre 2 y 3. ¿Qué relación hay entre ellas? ¿Puedes dar una explicación de por qué?

24. La siguiente tabla representa la población mundial (estimada) en millones de personas. Calcula la tasa de crecimiento para cada intervalo de 5 años. ¿Qué observas?

Año	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Población	3692	4068	4435	4831	5264	5674	6071	6456	6916

25. ¿Podrías dar un ejemplo de una función cuya tasa de crecimiento sea constantemente 2?

CURIOSIDADES. REVISTA

Dice el premio Nobel de 1963 EUGENE WIGNER:

"La enorme utilidad de las Matemáticas en las ciencias naturales es algo que roza lo misterioso, y no hay explicación para ello. No es en absoluto natural que existan "leyes de la naturaleza", y mucho menos que el ser humano sea capaz de descubrirlas. El milagro de lo apropiado que resulta el lenguaje de las Matemáticas para la formulación de leyes de la Física es un regalo maravilloso que no comprendemos ni nos merecemos".

Las funciones se han utilizado para hacer modelos matemáticos de las situaciones reales más diversas. Antes de la época de los ordenadores las funciones que solían utilizarse eran las funciones lineales (que ya conoces pero que estudiarás detenidamente en el próximo capítulo). Se *linealizaban* los fenómenos. Al usar otras funciones, como por ejemplo parábolas pueden complicarse mucho las cosas. Incluso puede aparecer el caos.

¿Sabes qué es el caos?

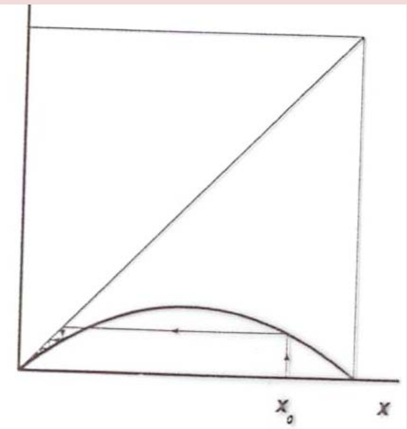
Vamos a estudiar un ejemplo en el que aparece el caos: La **ecuación logística**. Es un modelo matemático propuesto por P. F. Verhulst en 1845 para el estudio de la dinámica de una población. Explica el crecimiento de una especie que se reproduce en un entorno cerrado sin ningún tipo de influencia externa. Se consideran valores x entre 0 y 1 de la población.

$$y = r(x(1 - x))$$

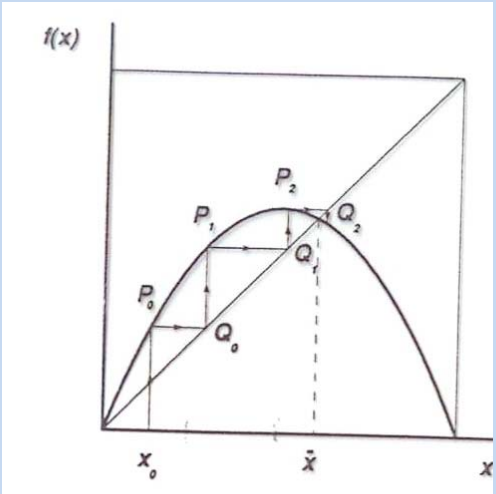
Si nos quedamos con el primer término, $y = rx$ sería un modelo lineal, y nos indica el crecimiento de la población, pero tiene un término de segundo grado que hace que sea un polinomio de segundo grado. Si en algún momento $y = x$ la población se mantendrá siempre estable para ese valor. Por ejemplo, si $x = 0$ entonces $y = 0$, y siempre habrá una población de tamaño 0. Estos valores que hacen que $y = x$ se denominan **puntos fijos**.

El comportamiento es distinto según los valores que tome r. Por ejemplo, para $r < 1$, se extingue la especie.

Dibujamos la parábola para $r = 0,9$. Imaginamos que en el instante inicial hay una población x_0. Buscamos, cortando verticalmente a la parábola, el valor de y. Para transformarlo en el nuevo x, cortamos a la diagonal del primer cuadrante. Observa que la población cada vez es menor y que va hacia la extinción. Observa con cuidado ese proceso de ir cortando a la parábola y a la diagonal, para volver a cortar a la parábola y así sucesivamente.



Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez



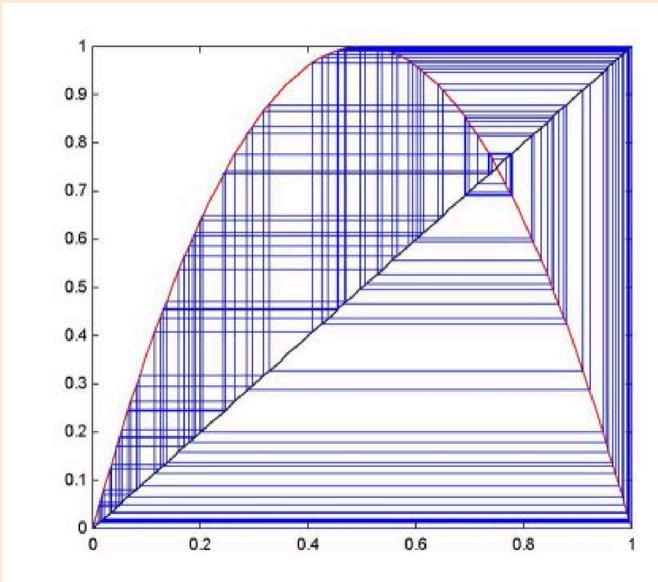
Para valores de r comprendidos entre 1 y 3: $1 < r < 3$, entonces la población se estabiliza, tiende a un punto fijo.

Hemos dibujado la parábola para $r = 2,5$, e igual que antes partimos de un valor inicial cualquiera, en este caso x_0, que se convierte en $y = P_0$. Ese valor lo tomamos como abscisa: $x = Q_0$, y calculamos el nuevo valor de $y = P_1$… Observa cómo la población se estabiliza hacia el valor de intersección de la parábola con la diagonal.

Para valores entre 3 y 3,56994546 las cosas empiezan a complicarse, hasta que …

Para r mayor o igual a 3,56994546 tenemos sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, tenemos **caos**.

No sabemos qué puede ocurrir. La población fluctúa constantemente. Y ese comportamiento tan errático es debido a ¡una función polinómica de segundo grado!



El término **caótico** va a indicar que puntos próximos en el instante inicial puedan tener comportamientos dispares en el futuro.

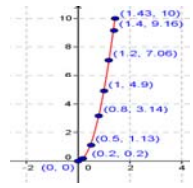
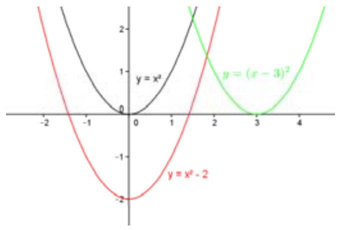
El meteorólogo americano *Edward N. Lorenz* utilizó el término de **efecto mariposa** para explicar por qué el tiempo atmosférico no es predecible a largo plazo, es decir para explicar que existía una dependencia sensible a las condiciones iniciales: *"El **aleteo de una mariposa** en Brasil, ¿podría provocar un tornado en Texas?"*

¿Lo habías oído?

Este es un ejemplo de caos dibujado con el ordenador. Hay 5 órbitas bien definidas, pero un punto de la frontera entre órbitas no sabemos en cuál terminará.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

RESUMEN

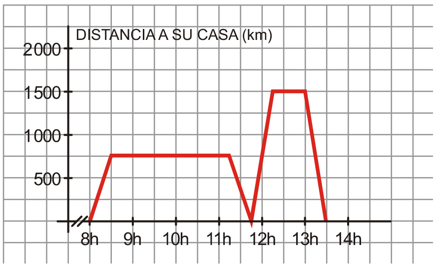
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td>Función</td><td>Una relación o correspondencia entre dos magnitudes, tales que a cada valor de la variable independiente, x, le corresponde un solo valor de la dependiente, y.</td><td>$y = 2x + 3$, $y = \frac{1}{x^2+1}$</td></tr>
<tr><td>Gráfica de una función</td><td>Son los (normalmente infinitos) puntos por los que pasa. Es decir, todos los valores $(x, f(x))$ puesto que $y = f(x)$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Maneras de describir una función.</td><td>- Dando una tabla de valores. Como en la columna de al lado
- Dando una expresión. $y = 2^x$
- A trozos: Varias expresiones. $y = \begin{cases} x+1, x > 2 \\ x, \ x \le 2 \end{cases}$</td><td><table><tr><th>X</th><th>Y</th></tr><tr><td>–3</td><td>2</td></tr><tr><td>–2</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Dominio y recorrido.</td><td>- Dominio. Son los valores de “x” donde la función tenga sentido.
- Recorrido. Son los valores de “y” que se alcanzan.</td><td>El dominio de la función $\sqrt{2-x}$ es $(-\infty, 2)$ y su recorrido $[0, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>Características de una función</td><td>Debemos estudiar su continuidad, crecimiento, máximos y mínimos, curvatura, simetrías y comportamiento en el infinito.</td><td>$y = x^2 + 2$ es continua, creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, \infty)$, tiene un mínimo absoluto en 0 y es siempre convexa</td></tr>
<tr><td>Traslaciones</td><td>- Vertical. y = f(x) + K. En sentido de K: Si K es positivo hacia arriba, si no hacia abajo.
- Horizontal. y = f(x + K). En sentido contrario de K: Si K es positivo hacia la izquierda, si no hacia la derecha.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Valores asociados</td><td>- Tasa de variación (TV): $f(b) - f(a)$
- Tasa de variación media (TVM): $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
- Tasa de crecimiento TT_{crec}: $\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}$</td><td>$y = x + 2$
$TV[3,5] = 2$
$TVM[3,5] = \frac{2}{5-3} = 1$
$T_{crec}[3,5] = \frac{2}{5} = 40\%$</td></tr>
</table>

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Pablo salió de su casa a las 8 de la mañana para ir al instituto. En el recreo, tuvo que volver a su casa para ir con su padre al médico. La siguiente gráfica refleja la situación. Las distancias vienen dadas en metros, (no en km).

a. ¿A qué hora comienzan las clases y a qué hora empieza el recreo?
b. ¿A qué distancia de su casa está el instituto? ¿Qué velocidad lleva cuando va a clase?
c. ¿A qué distancia de su casa está el consultorio médico? ¿Qué velocidad llevan cuando se dirigen allí?
d. ¿Cuánto tiempo ha estado en clase? ¿Y en el consultorio médico?

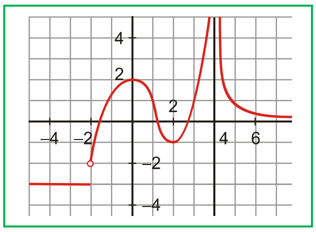


2. Dada la función a través de la siguiente gráfica:

a) Indica cuál es su dominio de definición.

b) ¿Es continua? Si no lo es, indica los puntos de discontinuidad.

c) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y cuáles los de decrecimiento de la función? ¿Qué ocurre en el intervalo (–∞, –2]?



3. Dibuja las gráficas de estas hipérbolas y determina sus dominios, calcula sus asíntotas y los puntos de corte con los ejes de coordenadas:

a. $y = \frac{2x}{x-2}$ b. $y = \frac{2x-3}{x-2}$ c. $y = \frac{4x}{2x+1}$

4. Dibuja la gráfica de $f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 4x & si \quad 1 < x \end{cases}$ y explica si es continua en $x = 1$.

5. Tres kilos de peras nos han costado 4,5 €; y, por siete kilos, habríamos pagado 10,5 €. Encuentra la ecuación de la recta que nos da el precio total, "y", en función de los kilos que compremos, "x". Represéntala gráficamente.

6. Describe las siguientes funciones cuadráticas y haz un boceto de su gráfica:

a. $y = 4x^2 + 8x - 5$ b. $y = x^2 + 3x - 4$ c. $y = 8 - 2x - x^2$

7. Calcula los puntos de corte con los ejes y el vértice de las siguientes parábolas y utiliza estos datos para representarlas gráficamente

a. $y = x^2 + 5x + 6$ b. $y = -x^2 + 4x + 5$

8. La altura sobre el suelo de un proyectil lanzado desde lo alto de una muralla viene dada, en función del tiempo, por $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$, donde *t* se expresa en segundos, y *h*, en metros. Dibuja la gráfica de esta función y calcula:

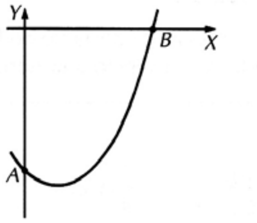
a. La altura de la muralla.

b. La altura máxima alcanzada por el proyectil y el tiempo que tarda en alcanzarla.

c. El tiempo que tarda en impactar contra el suelo.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

9. La gráfica muestra el dibujo aproximado de la curva $y = x^2 - 2x - 8$. Calcula:



a. Las coordenadas de los puntos A y B.

b. La ecuación de una recta que pase por los puntos A y B.

10. Representa las siguientes funciones:

a. $y = 3/x$ b. $y = 4/x - 5$ c. $y = \sqrt{x+4}$

d. $y = \sqrt{x-2}$ e. $y = \begin{cases} x+3 & si \quad x < -1 \\ 2 & si \quad -1 \le x < 4 \\ x^2 - 10 & si \quad 4 \le x \end{cases}$

11. El coste diario de fabricación, en euros, de x artículos se expresa con la igualdad $C = 40x + 250$, y el ingreso diario de su venta, mediante $V = -2x^2 + 100x$. ¿Qué cantidad de artículos se deben fabricar al día para que su venta reporte un beneficio máximo? *Nota*: el beneficio es la diferencia entre el ingreso y el coste.

12. La base y la altura de un triángulo suman 4 centímetros. ¿Qué longitud deben tener ambas para que el área del triángulo sea máxima?

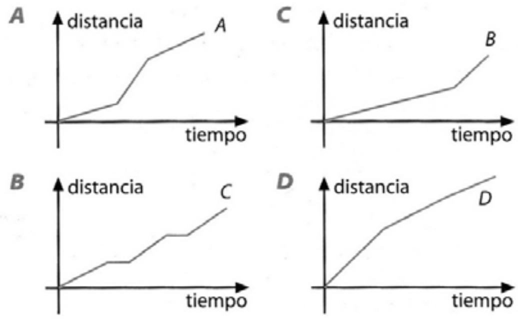
13. Asigna las gráficas al recorrido efectuado por los siguientes estudiantes en su camino diario al Instituto:

a) Emilio es el que vive más lejos del Instituto.

b) Ana debe recoger a dos amigas por el camino y siempre le toca esperar.

c) Felipe es el que menos tiempo tarda.

d) Isabel es dormilona; siempre le toca correr en el último tramo, aunque es la que vive más cerca del Instituto.



14. Un rectángulo tiene un perímetro de 14 cm. Suponiendo que la base del mismo tiene una longitud de x cm,

a. Probar que el área del mismo A está dada por la función .

b. Dibuja la gráfica correspondiente a esta función, tomando para ello valores de x de 0 a 7. Utilizando la gráfica, calcula los siguientes apartados.

c. El área del rectángulo cuando

d. Las dimensiones del rectángulo cuando su área es 9

e. El área máxima del rectángulo.

f. Las dimensiones del rectángulo correspondientes a esa área máxima.

15. La velocidad v en m/s de un misil t segundos después de su lanzamiento viene dada por la ecuación . Utilizando la gráfica de esta función, calcula:

a. La máxima velocidad que alcanza el misil.

b. El tiempo que necesita para acelerar hasta conseguir una velocidad de 52 m/s.

c. El intervalo (aproximado, resuelve gráficamente) de tiempo en el cual el misil vuela a más de 100 m/s.

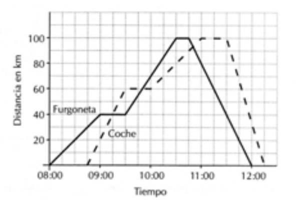
16. El precio del viaje de fin de curso de un grupo de alumnos es de 200 euros por persona si van 30 alumnos o menos. En cambio, si viajan más de 30 y menos de 40, rebajan un 5 % por cada alumno que sobrepase el número de 30, y si viajan 40 o más, el precio por persona es de 100 euros. Halla la expresión y dibuja la gráfica de la función que hace corresponder al número de viajeros el precio del viaje.

17. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a. $y = \frac{5x-3}{4x-1}$ c. $y = \sqrt{3x+6}$ e. $y = \frac{4x^2-3x}{1+5x-6x^2}$

b. $y = 2x^4 - 3x^2 + 1$ d. $y = 2 - \frac{3}{x^2-3x}$ f. $y = \sqrt[3]{x^2+2x}$

18. La siguiente gráfica muestra los viajes hechos por una furgoneta y un coche saliendo desde Teruel hacia la población de Alcañiz, ida y vuelta.



a) ¿Cuánto tiempo se detuvo la furgoneta durante el trayecto?
b) ¿A qué hora adelantó el coche a la furgoneta?
c) ¿Qué velocidad llevaba la furgoneta entre las 9:30 y las 10:00?
d) ¿Cuál fue la mayor velocidad alcanzada por el coche durante el viaje?
e) ¿Cuál fue la velocidad media del coche en el viaje completo?

19. La siguiente gráfica muestra los viajes hechos por una furgoneta y un coche saliendo desde Teruel hacia la población de Alcañiz, ida y vuelta.

a. ¿Cuánto tiempo se detuvo la camioneta durante el trayecto?
b. ¿A qué hora adelantó el coche a la furgoneta?
c. ¿Qué velocidad llevaba la camioneta entre las 9:30 y las 10:00?
d. ¿Cuál fue la mayor velocidad alcanzada por el coche durante el viaje?
e. ¿Cuál fue la velocidad media del coche en el viaje completo?

20. Representa gráficamente la siguiente función: _ . Una vez representada estudia las zonas de crecimiento-decrecimiento, los extremos (máximos-mínimos) y su continuidad.

21. Representa gráficamente una función, f, que cumpla las siguientes condiciones:

a. Dom (f) = [–5, 6]
b. Crece en los intervalos (–5, –3) y (0, 6); decrece en el intervalo (–3, 0).
c. Es continua en su dominio.
d. Corta al eje X en los puntos (–5, 0), (–1, 0) y (4, 0).
e. Tiene un mínimo en (0, –2) y máximos en (–3, 3) y (6, 3).

22. Construye una gráfica que represente la audiencia de una determinada cadena de televisión durante un día, sabiendo que:

a. A las 0 horas había, aproximadamente, 0'5 millones de espectadores.
b. Este número se mantuvo prácticamente igual hasta las 6 de la mañana.
c. A las 7 de la mañana alcanzó la cifra de 1'5 millones de espectadores.
d. La audiencia descendió de nuevo hasta que, a las 13 horas, había 1 millón de espectadores.
e. Fue aumentando hasta las 21 horas, momento en el que alcanzó el máximo: 6'5 millones de espectadores.
f. A partir de ese momento, la audiencia fue descendiendo hasta las 0 horas, que vuelve a haber, aproximadamente, 0'5 millones de espectadores.

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones algebraicas es una función real:

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $y = -2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$ c) $y = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ d) $y^2 = x + 1$

2. Estamos confeccionando una tabla de valores de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Indica qué punto (o puntos) no debería estar en la tabla:

a) (0, 1) b) (1/2, 2) c) (2, 1/5) d) (1, 0)

3. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ es:

a) La recta real b) $\{x \in \Re \mid x < 1\}$ c) $\{x \in \Re \mid x \geq 1\}$ d) $\{x \in \Re \mid x \geq 0\}$

4. Indica que tipo de discontinuidad o continuidad presenta la función $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$ en el punto $x = 1$:

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable

c) Tiene un salto finito de tamaño 2 d) Tiene un salto infinito

5. Señala la función que tiene simetría par:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$

6. Señala la función que tiene como asíntota horizontal a la recta $y = 0$:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$

7. La tasa de variación de la función $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 y 2 es igual a:

a) TV[–1, 2] = 1 b) TV[–1, 2] = 2 c) TV[–1, 2] = 3 d) TV[–1, 2] = 0

8. La tasa de variación media de la función $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 y 2 es igual a:

a) TV[–1, 2] = 1/3 b) TV[–1, 2] = 2/3 c) TV[–1, 2] = 1 d) TV[–1, 2] = 3

9. La tasa de crecimiento de la función $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 y 2 es igual a:

a) T_{crec} [–1, 2] = 3 b) T_{crec} [–1, 2] = 2 c) T_{crec} [–1, 2] = 0 d) T_{crec} [–1, 2] = 1

10. La función $y = x^2 + 3$ tiene un mínimo absoluto en el punto:

a) (1, 4) b) (0, 0) c) (0, 3) d) (3, 0)

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez