

## 4 Ecuaciones y sistemas

1. Un rectángulo de área  $84 \text{ cm}^2$  tiene su base  $5 \text{ cm}$  más larga que su altura. Halla sus dimensiones.
2. Si Ana le da una moneda a José, él tendrá el doble de monedas que ella; pero si José se la da a Ana, los dos tendrán el mismo número de monedas. ¿Cuántas tiene cada uno?
3. Dos fuentes manando agua juntas llenan un estanque en 2 horas. ¿Cuánto tardarían en llenarlo cada una por separado si la primera tarda 3 horas menos en hacerlo que la segunda?
4. Halla la medida de los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son números enteros consecutivos.
5. El doble del cuadrado de la edad de un hijo es la edad de su padre. Dentro de 10 años, la edad del padre será triple de la del hijo. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno?
6. Resuelve la ecuación  $e^{4x} - 5e^{3x} + 5e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$ .
7. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:
 

a) $\begin{cases} x + y = 3^x \\ 2^x(x + y) = 7776 \end{cases}$	b) $\begin{cases} \log_x(y + 7) = 2 \\ \log_y(2x + 1) = 1 \end{cases}$
---	--
8. Resuelve la ecuación exponencial  $x^2 \cdot 8^{-x} - 9 \cdot 2^{-3x} = 0$ .
9. Prueba la siguiente identidad:  $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$
10. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones exponenciales:
 
$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 4^x - 9^y = 7 \end{cases}$$

# SOLUCIONES

1. 
$$\begin{cases} bh = 84 \\ b = h + 5 \end{cases} \Rightarrow (h + 5)h = 84 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 + 5h - 84 = 0 \Rightarrow h = 7; h = -12$$
$$h = 7 \text{ cm}, b = 12 \text{ cm} (h = -12 \text{ no es válida})$$

2. 
$$\begin{cases} j + 1 = 2(a - 1) \\ j - 1 = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j - 2a = -3 \\ j - a = 2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = 5, j = 7$$

3. Si la segunda lo llena en  $x$  horas, la primera lo hace en  $x - 3$ ; por tanto, cada una, por separado, llena en 1 hora  $\frac{1}{x}$  y  $\frac{1}{x - 3}$  de la capacidad del estanque. Puesto que tardan 2 h en llenarlo juntas,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(x - 3) + 2x = x(x - 3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6, x = 1$$

La solución es 6 horas la segunda fuente y 3 horas la primera, ya que la solución  $x = 1$  no es válida.

4. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1,$$

la solución es 3, 4 y 5 cm, puesto que la solución  $x = -1$  no es válida.

5. 
$$\begin{cases} 2h^2 = p \\ 3(h + 10) = p + 10 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2h^2 - 3h - 20 = 0 \Rightarrow h = 4, h = -\frac{5}{2}$$

La solución es: el hijo, 4 años, y el padre, 32, puesto que la solución  $h = -\frac{5}{2}$  no es válida.

6. 
$$e^x = u \Rightarrow u^4 - 5u^3 + 5u^2 + 5u - 6 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (u - 1)(u + 1)(u - 2)(u - 3) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u = 1 \Rightarrow x = 0 \\ u = -1 \Rightarrow x \text{ imposible} \\ u = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \\ u = 3 \Rightarrow x = \ln 3 \end{cases}$$

7. a) 
$$2^x \cdot 3^x = 7776 \Rightarrow 6^x = 7776 = 6^5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 5, y = 238$$
  
b) 
$$\begin{cases} x^2 = y + 7 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x + 1 + 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4, y = 9$$

La solución  $x = -2$  no es válida.

8. 
$$x^2 \cdot 2^{-3x} - 9 \cdot 2^{-3x} = 0 \Rightarrow 2^{-3x}(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ 2^{-3x} = 0 \text{ es imposible} \end{cases}$$

9. Puesto que  $\log_a x = \frac{\log_b a}{\log_b a}$  es una identidad que se verifica para todos los valores de  $a, b, x > 0$ , siendo  $a$  y  $b$  distintos de 1.

10. Si  $u = 2^x, v = 3^y \Rightarrow$ 
$$\Rightarrow \begin{cases} u + v = 7 \\ u^2 - v^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u^2 - (7 - u)^2 = 7 \Rightarrow 14u = 56 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = 4 \Rightarrow v = 3 \Rightarrow x = 2, y = 1$$