17 Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Calcula 3^{-5}; $(-2)^2$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$; 7^0; $(\sqrt{2})^4$; $27^{\frac{1}{3}}$; $16^{-\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $(-1)^{-1}$; $0{,}5^{-2}$.

2. Considera la función $y = 4^x$.

a) ¿Cuál es su dominio?

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) ¿A qué valor tiende la función cuando $x \longrightarrow +\infty$? ¿Y cuando $x \longrightarrow -\infty$? ¿Qué puedes concluir respecto al tipo de asíntota que presenta?

d) ¿Qué valor toma la función cuando $x = 0$? ¿Qué número verifica que $\log_4 x = 0$?

e) Compara su gráfica con la de la función $y = \log_4 x$.

3. Calcula, sin ayuda de la calculadora, $\log_2 4$; $\log_{\frac{1}{2}} 8$; $\log_{27} 3$; $\log_5 1$; $\log_4 \frac{1}{2}$.

4. Considera la función $f(x) = \log(x^2 - 1)$.

a) ¿Cuál es su dominio?

b) Calcula $f(5)$, $f(-2)$ y $f(4)$. Usa tu calculadora.

c) ¿En qué puntos corta al eje OX? ¿Corta al eje OY? Razónalo

5. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} 2^x$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

6. Calcula:

a) $\log 0{,}01$ b) $\log \frac{1}{10\,000}$ c) $\log \sqrt{10}$ d) $\log \sqrt{0{,}1}$

7. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}30$, calcula:

a) $\log 8$ b) $\log \frac{1}{2}$ c) $\log \sqrt{32}$ d) $\log \frac{\sqrt{8}}{4}$

8. Tienes una hoja de papel, dóblala por la mitad, córtala y quédate con una parte; dobla esta por la mitad y quédate con una parte, y así sucesivamente.

a) Si la hoja original tenía una superficie de $6\ \text{dm}^2$, escribe la función que da la superficie del papel con el que te vas quedando, en función del número de cortes que haces.

b) Forma una tabla de valores y calcula la superficie del papel con el que te vas quedando después de 1, 2, 3, 4 y 5 cortes.

c) Si pudieses hacer infinitos cortes, ¿con cuánto papel te quedarías? ¿Cómo expresarías matemáticamente esta circunstancia?

9. A partir del momento de su compra, un coche va depreciando su valor de forma gradual a razón de un 20 % anual. Si un coche cuesta hoy 18 000 euros:

a) ¿Cuál es su precio dentro de un año?
¿Y dentro de dos años y medio?

b) ¿Cuánto tiempo ha pasado desde el momento de la compra si al venderlo nos dan 7 372,80 €?

c) Escribe la función que da el precio del coche en función de los años que transcurren.

10. Hoy es mi cumpleaños y mi hermano mayor me ha regalado 1 céntimo de euro. Al ver la cara que puse, me ha prometido que cada año, tal día como hoy, duplicará la cantidad que me haya dado el año anterior.

a) ¿Cuánto dinero me tendrá que dar dentro de 10 años? ¿Y dentro de 15? ¿Y dentro de 25?

b) Escribe la función que expresa el dinero que me regalará mi hermano mayor en función de los años que pasen.

SOLUCIONES

1. $\frac{1}{243}$; 4; 4; 1; 4; 3; $\frac{1}{64}$; $\frac{3}{2}$; -1; 4.

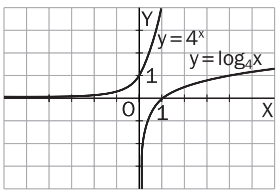
2. a) $D(f) = R$

b) Creciente.

c) $+\infty$; 0; tiene una asíntota por la izquierda en el eje OX.

d) 1; 1

e)



3. 2; -3; $\frac{1}{3}$; 0; $-\frac{1}{2}$

4. a) $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

b) $f(5) = 1{,}3802$, $f(-2) = 0{,}4771$, $f(4) = 1{,}1761$

c) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$; no corta al eje OY porque 0 no pertenece al dominio de la función.

5. a) $\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

d) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty$

6. a) $\log 0{,}01 = -2$

b) $\log \frac{1}{10\,000} = -4$

c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$

d) $\log \sqrt{0{,}1} = -\frac{1}{2}$

7. a) $\log 8 = 3 \log 2 = 0{,}9$

b) $\log \frac{1}{2} = -\log 2 = -0{,}3$

c) $\log \sqrt{32} = \frac{5}{2} \log 2 = 0{,}75$

d) $\log \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{3}{2} \log 2 - 2 \log 2 = -\frac{1}{2} \log 2 = -0{,}15$

8. a) $y = 6\left(\frac{1}{2}\right)^x$

b)

x	0	1	2	3	4	5
y	6	3	1,5	0,75	0,375	0,1875

c) Nada; $\lim_{x\to\infty} 6\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.

9. a) 14 400 €; 10 368 €.

b) 4 años.

c) Si se deprecia un 20 %, el nuevo precio será el 80 % del precio antiguo, es decir:
$\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$; así, tenemos que:
$f(x) = 18\,000 \left(\frac{4}{5}\right)^x$, donde x representa los años.

10. a) 5,12 €; 163,84 €; 167,77 €.

b) $f(x) = \frac{2^{x-1}}{100}$ donde x representa los años.