EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1 **Clasifica los siguientes números.**

a) 0,112123123412345123456123456 7…

b) 45,454555455554555545555 4555…

c) 4,101001000100001000001000000 1…

d) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

a) Número irracional

b) Número racional con período decimal 4555

c) Número irracional

d) Número irracional

2.2 **El ecuador de la Tierra es, aproximadamente, una circunferencia de 40 000 kilómetros de longitud. ¿Cuánto mide el radio de la Tierra? ¿Qué tipos de números aparecen en este problema?**

$L = 2\pi r = 40\,000$ kilómetros $\Rightarrow r = 6366{,}20$ km. π es un número irracional.

2.3 **Clasifica los siguientes números.**

a) $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{9}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ **d)** $\pi\sqrt{4}$

a) $\sqrt{3} = 1{,}732050808$ es un número irracional.
b) $\sqrt{9} = \pm 3$ es un número racional.
c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ es un número racional.
d) $\pi\sqrt{4}$ es un número irracional.

2.4 **Un terreno cuadrado tiene 100 metros de lado, y se quiere ampliar a otro de la misma forma y área doble. ¿Por cuánto hay que multiplicar el lado? ¿Cuánto medirá el nuevo lado?**

Área del cuadrado dado: 10 000 m^2

Lado del nuevo cuadrado: 100k

Ecuación: $(100k)^2 = 20\,000$

Se opera: $10\,000k^2 = 20\,000$

Se simplifica: $k^2 = 2$

Valor de k:$k = \sqrt{2}$

Valor del nuevo lado: $100\sqrt{2} \approx 100 \cdot 1{,}4142\ldots = 141{,}421\ldots$

2.5 **Un aula de dibujo es rectangular; sus medidas son 10 metros de largo, 8 metros de ancho y 5 metros de altura. Una mosca revolotea dentro del aula. ¿Cuál es la máxima distancia que puede recorrer sin cambiar de dirección?**

¿Qué tipos de números aparecen en este problema?

La dirección máxima está dada por dos vértices opuestos (no de dos caras).
Distancia: $\sqrt{(10^2 + 8^2 + 5^2)} = \sqrt{189} \approx 13{,}75$ m

2.6 **Haz en tu cuaderno una tabla de aproximaciones por exceso y por defecto del número $\sqrt{2}$, hasta un orden de aproximación de la milésima.**

Dato: $\sqrt{2}$	Aproximaciones de $\sqrt{2}$			
↓ Precisión	Por defecto	$\sqrt{2}$	Por exceso	Intervalos de $\sqrt{2}$
1 unidad	$1 <$	$\sqrt{2}$	< 2	[1; 2]
1 décima	$1{,}4 <$	$\sqrt{2}$	$< 1{,}5$	[1,4; 1,5]
1 centésima	$1{,}41 <$	$\sqrt{2}$	$< 1{,}42$	[1,41; 1,42]
1 milésima	$1{,}414 <$	$\sqrt{2}$	$< 1{,}415$	[1,414; 1,415]
…	…	…	…	…

2.7 Expresa los tres primeros intervalos de la aproximación decimal del número real $\sqrt{7} = 2{,}645751311...$

Los tres primeros intervalos encajados son: [2; 3], [2,6; 2,7], [2,64; 2,65]

2.8 Halla el error absoluto y el error relativo que se producen cuando se toma para $\frac{25}{3}$ el valor 8,3. ¿Cuál es el orden de la aproximación?

$\frac{25}{3} = 8{,}3333333...$

El error absoluto es: $E_a = |\mathrm{A} - \mathrm{V}| \Rightarrow E_a = |8{,}3 - 8{,}3333333| = 0{,}0333333...$

El error relativo es: $E_r \frac{E_a}{V} = \Rightarrow E_r = \frac{0{,}0333333}{8{,}3333333} = 0{,}004000000016$

El orden de aproximación son las décimas.

2.9 Utiliza la aproximación de Arquímedes y la de Metius para el número π, y calcula el área de un círculo de 20 metros de radio. ¿Crees que son aceptables los errores cometidos en ambos casos?

La aproximación de Arquímedes para el número π es $\frac{22}{7} = 3{,}142857143...$ y la de Metius es $\frac{355}{113} = 3{,}141592920...$

El área de un círculo es: $A = \pi \cdot r^2$

$A_A = \left(\frac{22}{7}\right) \cdot 20^2 = 1257{,}142857\ \text{m}^2$

$A_M = \frac{355}{113} \cdot 20^2 = 1256{,}637168\ \text{m}^2$

2.10 Sabiendo que $\sqrt{5} = 2{,}236067977...$, escribe las cinco primeras aproximaciones por defecto, por exceso y por redondeo.

	Aproximaciones de $\sqrt{5}$		
↓ Precisión	Por defecto	Por exceso	Por redondeo
1 unidad	2	3	2
1 décima	2,2	2,3	2,2
1 centésima	2,23	2,24	2,24
1 milésima	2,236	2,237	2,236
1 diezmilésima	2,2360	2,2361	2,2361

2.11 Realiza las siguientes operaciones con un orden de aproximación de dos cifras decimales, por exceso y por defecto:

a) $2\sqrt{2} + \sqrt{10}$

	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{2} + \sqrt{10}$	Error máximo
Por exceso	2,83	3,17	6,00	0,02
Por defecto	2,82	3,16	5,98	

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$

	$\sqrt{7}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$	Error máximo
Por exceso	2,65	1,74	4,61	0,04
Por defecto	2,64	1,73	4,57	

2.12 Escribe en notación científica los números:

a) $75{,}9 \cdot 10^{15}$ **b) $0{,}0114 \cdot 10^{23}$** **c) $345{,}8 \cdot 10^{17}$**

a) $75{,}9 \cdot 10^{15} = 7{,}59 \cdot 10^{16}$ b) $0{,}0114 \cdot 10^{23} = 1{,}14 \cdot 10^{21}$ c) $345{,}8 \cdot 10^{17} = 3{,}458 \cdot 10^{19}$

2.13 Realiza la siguiente operación y expresa el resultado en notación científica.

$(3{,}45 \cdot 10^{12} + 40{,}12 \cdot 10^{10}) : (8 \cdot 10^{8})$

$(3{,}45 \cdot 10^{12} + 40{,}12 \cdot 10^{10}) : (8 \cdot 10^{8}) = 4{,}8 \cdot 10^{3}$

2.14 La masa de la Tierra es, aproximadamente, de $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kilogramos, y la de la Luna, de $7{,}34 \cdot 10^{22}$ kilogramos.

¿Cuántas lunas se podrían formar con una masa equivalente a la de la Tierra?

Relación entre las masas: $(5{,}98 \cdot 10^{24}) : (7{,}34 \cdot 10^{22}) \approx 0{,}815 \cdot 10^{2} = 8{,}15 \cdot 10$

La masa de la Tierra es unas 81 veces la masa de la Luna.

Por tanto, con la masa de la Tierra se podrían formar casi 82 lunas.

2.15 Escribe tres potencias equivalentes de cada una de las siguientes.

a) $7^{\frac{1}{2}}$ **c) $9^{\frac{3}{2}}$** **e) $11^{\frac{1}{5}}$**

b) $7^{\frac{3}{2}}$ **d) $27^{\frac{1}{3}}$** **f) $2^{\frac{7}{9}}$**

a) $7^{\frac{2}{4}}, 7^{\frac{3}{6}}, 7^{\frac{4}{8}}$ c) $9^{\frac{6}{4}}, 9^{\frac{9}{6}}, 9^{\frac{12}{8}}$ e) $11^{\frac{2}{10}}, 11^{\frac{3}{15}}, 11^{\frac{4}{20}}$

b) $7^{\frac{6}{4}}, 7^{\frac{9}{6}}, 7^{\frac{12}{8}}$ d) $27^{\frac{2}{6}}, 27^{\frac{3}{9}}, 27^{\frac{4}{12}}$ f) $2^{\frac{14}{18}}, 2^{\frac{21}{27}}, 2^{\frac{28}{36}}$

2.16 Calcula las siguientes potencias en forma fraccionaria y luego pasándolas a forma radical. Comprueba que los resultados son iguales.

a) $4^{\frac{8}{2}}$ **b) $21^{\frac{10}{5}}$** **c) $17^{\frac{6}{3}}$** **d) $11^{\frac{12}{4}}$**

a) Forma fraccionaria: $4^{\frac{8}{2}} = 4^{4} = 256$

Forma radical: $4^{-\frac{8}{2}} = \sqrt{4^{8}} = 4^{4} = 256$

b) Forma fraccionaria: $21^{\frac{10}{5}} = 21^{2} = 441$

Forma radical: $21^{\frac{10}{5}} = \sqrt[5]{21^{10}} = 21^{\frac{10}{5}} = 21^{2} = 441$

c) Forma fraccionaria: $17^{\frac{6}{3}} = 17^{2} = 289$

Forma radical: $17^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{17^{6}} = 17^{2} = 289$

d) Forma fraccionaria: $11^{\frac{12}{4}} = 11^{3} = 1331$

Forma radical: $11^{\frac{12}{4}} = \sqrt[4]{11^{12}} = 11^{3} = 1331$

2.17 Introduce el factor en el radical.

a) $7\sqrt{2}$ **b) $3 \cdot \sqrt[3]{3}$**

a) $\sqrt{98}$ b) $\sqrt[3]{81}$

2.18 Extrae factores de los radicales.

a) $\sqrt{6125}$ **b) $\sqrt[3]{648}$**

a) $\sqrt{6125} = \sqrt{5^{3} \cdot 7^{2}} = 35\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{2^{3} \cdot 3^{4}} = 6\sqrt[3]{3}$

2.19 Opera y simplifica.

a) $\sqrt{42} \cdot \sqrt{75} : \sqrt{105}$ **c) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{512}} \cdot \sqrt{256}$**

b) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[5]{12}$ **d) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{9}} : \sqrt[5]{81} \cdot \sqrt{\dfrac{18}{75}}$**

a) $\sqrt{42} \cdot \sqrt{75} : \sqrt{105} = \sqrt{30}$ c) 20

b) $\sqrt[30]{2^{52} 5^{15} 3^{6}}$ d) $\dfrac{6}{15} \sqrt[10]{\dfrac{2^{5}}{3^{8}}}$

2.20 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

a) $\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $-5\sqrt{2}+5\sqrt{3}$

c) $2-\sqrt{3}$

d) $\dfrac{2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}-\sqrt{15}}{3}$

2.21 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{8}}-\dfrac{3}{\sqrt{32}}+\dfrac{6}{\sqrt{50}}$

b) $-2\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{54}$

c) $10\sqrt[3]{40}-6\sqrt[3]{5000}$

d) $-3\sqrt{28}+5\sqrt{343}$

a) $\dfrac{59\sqrt{2}}{40}$

b) $4\sqrt[3]{2}$

c) $-40\sqrt[3]{5}$

d) $29\sqrt{7}$

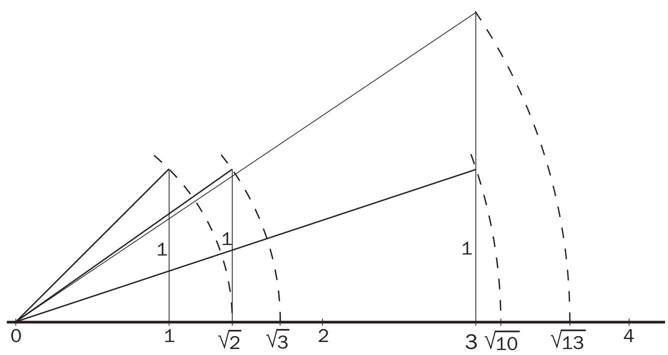
2.22 Los lados de tres cuadrados miden, respectivamente, $\dfrac{51}{4}$, $\dfrac{51}{6}$ y $\dfrac{52}{3}$. Ordénalos de menor a mayor según el área.

Lados: $\dfrac{52}{3} > \dfrac{51}{4} > \dfrac{51}{6}$

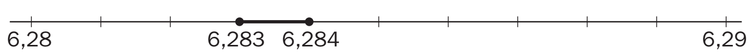
Áreas: $\dfrac{2\,704}{9} > \dfrac{2\,601}{16} > \dfrac{2\,601}{36}$

2.23 Representa en la recta real los números:

a) $\sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{13}$ **c)** 2π **d)** $\dfrac{\pi}{4}$



$2\pi = 6{,}283$



$\dfrac{\pi}{4} = 0{,}785$

2.24 ¿Qué distancia hay entre los siguientes pares de números reales?

a) 1 y −1 **b) 2 y 3** **c) −3 y −7** **d) 1 y $-\frac{1}{2}$**

a) $d(1, -1) = 2$ b) $d(2, 3) = 1$ c) $d(-3, -7) = 4$ d) $d\left(1, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

2.25 ¿Cuál de estos dos números reales, $\frac{3\sqrt{3} - 1}{2}$ y $\frac{2\sqrt{3} + 1}{3}$, es mayor?

Se comprueba haciendo que los dos números reales tengan el mismo denominador.

$$\frac{3\sqrt{3} - 1}{2} > \frac{2\sqrt{3} + 1}{3}$$

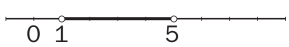
2.26 Expresa de otras dos formas cada uno de estos intervalos y represéntalos gráficamente.

a) $|x - 3| < 2$ **b) $(-8, 0)$** **c) $-2 < x < 9$**

a) $|x - 3| < 2$

$1 < x < 5$

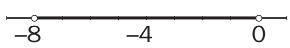
$(1, 5)$



b) $(-8, 0)$

$-8 < x < 0$

$|x + 4| < 4$



c) $-2 < x < 9$

$(-2, 9)$

2.27 ¿Qué intervalo, en el eje de abscisas, determina un círculo con centro el origen de coordenadas y 5 centímetros de radio?

$(-5, 5)$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2.28 Laura quiere fabricar otro depósito con el doble de capacidad, es decir, 40 litros, y desea mantener la misma forma cúbica. ¿Cuánto medirá ahora la arista aproximando hasta los milímetros?

Se trata de calcular la raíz cúbica de 40. Conviene hacer notar a los alumnos que la arista no será el doble de la anterior.

Aproximamos sucesivamente.

$3^3 = 27 < 40 < 4^3 = 64$ $\rightarrow$ 3…

$3{,}4^3 = 39{,}304 < 40 < 3{,}5^3 = 42{,}875$ $\rightarrow$ 3,4…

$3{,}41^3 = 39{,}651821 < 40 < 3{,}42^3 = 40{,}001688$ $\rightarrow$ La mejor aproximación es 3,42 dm.

2.29 La profesora de Laura le pide ahora calcular las medidas de un cartón de leche de un litro, sabiendo que la base es cuadrada y la altura es el doble de la arista de la base, aproximando nuevamente las medidas hasta los milímetros.

Queremos que $a^2 \cdot 2a = 2a^3$ sea igual a 1 dm^3, es decir, buscamos la raíz cúbica de 0,5.

Aproximamos sucesivamente.

$0{,}7^3 = 0{,}343 < 0{,}5 < 0{,}8^3 = 0{,}512$ $\rightarrow$ 0,7…

$0{,}79^3 = 0{,}493039 < 0{,}5 < 0{,}80^3 = 0{,}512$ $\rightarrow$ 0,79 dm es la mejor aproximación.

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

Números reales

2.30 Indica qué tipo de expresión decimal tienen los siguientes números.

a) $\frac{7}{20}$ **b)** $\frac{8}{11}$ **c)** $\frac{11}{18}$ **d)** $\frac{13}{35}$

a) $\frac{7}{20} = 0{,}35$. Decimal exacto

b) $\frac{8}{11} = 0{,}\widehat{72}$. Decimal periódico puro

c) $\frac{11}{18} = 0{,}6\widehat{1}$. Decimal periódico mixto

d) $\frac{13}{35} = 0{,}3\widehat{714285}$. Decimal periódico mixto

2.31 Copia y completa la tabla escribiendo estos números en todos los conjuntos numéricos a los que pertenecen.

$$\frac{3}{5};\ -\sqrt{2};\ 2;\ 1{,}2525\ldots;\ 2{,}010010001\ldots;\ -4;\ 0{,}1\widehat{6}$$

Naturales (N)	2
Enteros (Z)	2; -4
Racionales (Q)	-4; $\frac{3}{5}$; 1,2525…; $0{,}1\widehat{6}$; 2
Reales (R)	Todos

2.32 ¿Qué diferencia existe entre la parte decimal de un número racional y la de un número irracional? Indica si los siguientes números son racionales o irracionales.

a) 5,372727272…

b) 0,127202002000…

c) 3,5454454445…

d) 8,66612671267…

a) Racional

b) Irracional

c) Irracional

d) Racional

2.33 ¿Qué tipo de número obtendrás al sumar dos números en cada uno de los siguientes casos? Pon ejemplos.

a) Dos racionales

b) Dos irracionales

c) Uno racional y otro irracional

a) Un número racional $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = 0{,}8\widehat{3}$

b) Un número irracional, salvo que sean opuestos. $\pi + \sqrt{3} = 4{,}87364346116\ldots$

c) Un número irracional. $\sqrt{2} + 1 = 2{,}41421356237\ldots$

2.34 Una figura con forma de hexaedro (cubo) tiene 25 centímetros de arista, y queremos ampliarla a otro hexaedro cuyo volumen sea el doble. ¿Cuánto medirá la arista del nuevo hexaedro? ¿Qué relación existe con la arista del hexaedro inicial?

El volumen del hexaedro inicial será: $V = a^3 = (5^2)^3 = 5^6$ cm^3. Si queremos que el volumen del hexaedro transformado sea el doble, se cumplirá:

$V' = 2V = 2 \cdot 5^6 = (a')^3 \Rightarrow a' = \sqrt[3]{2 \cdot 5^6} = 5^2\sqrt[3]{2}$ cm

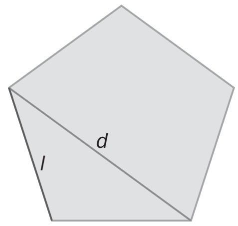
Y la relación existente con la arista inicial será: $a' = 5^2\sqrt[3]{2} = a\sqrt[3]{2}$. La nueva arista será $\sqrt[3]{2}$ veces más larga que la inicial.

Aproximaciones, representación y orden en R

2.35 La relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado se llama número de oro o áureo, y se designa por ϕ. Su valor es $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$

¿Es irracional? ¿Por qué?

Calcula una aproximación por defecto con un error menor que una centésima.



Sí es irracional, ya que al ser $\sqrt{5}$ irracional, entonces $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ también lo es.

$\phi = 1{,}61$

2.36 ¿Qué errores, absoluto y relativo, se cometen cuando se aproxima 4,1592 a 4,16?

Error absoluto $= |4{,}1592 - 4{,}16| = 0{,}0008$

Error relativo $= \frac{0{,}0008}{4{,}16} = 0{,}0002$

2.37 ¿Cuántos números reales existen comprendidos entre 5,187246 y 5,187247? Escribe tres de ellos.

Existen infinitos números reales entre ambos, por ejemplo: 5,187 2461; 5,187 2462; 5,187 2463.

2.38 Calcula la sucesión de intervalos encajados necesaria para aproximar el número $\sqrt{6} - 1$ con un error inferior a una milésima.

$2 < \sqrt{6} < 3$

$2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$

$2{,}44 < \sqrt{6} < 2{,}45$

$2{,}449 < \sqrt{6} < 2{,}450$

Ahora restamos una unidad a cada extremo de cada intervalo, y obtenemos:

$1 < \sqrt{6} - 1 < 2$

$1{,}4 < \sqrt{6} - 1 < 1{,}5$

$1{,}44 < \sqrt{6} - 1 < 1{,}45$

$1{,}449 < \sqrt{6} - 1 < 1{,}450$

Por tanto, la sucesión de intervalos buscada es:

$I_0 = (1; 2)$; $I_1 = (1{,}4; 1{,}5)$; $I_2 = (1{,}44; 1{,}45)$; $I_3 = (1{,}449 ; 1{,}450)$

2.39 Copia en tu cuaderno y rellena los recuadros vacíos con < o > según sea necesario en cada caso.

a) $\frac{1}{6}$ ☐ 0,166667 | **c) 1,333334 ☐ $\frac{4}{3}$**

b) 1,732051 ☐ $\sqrt{3}$ | **d) $\sqrt[3]{5}$ ☐ 1,709976**

a) $\frac{1}{6} < 1{,}66667$

b) $1{,}732051 > \sqrt{3}$

c) $1{,}333334 > \frac{4}{3}$

d) $\sqrt[3]{5} < 1{,}709976$

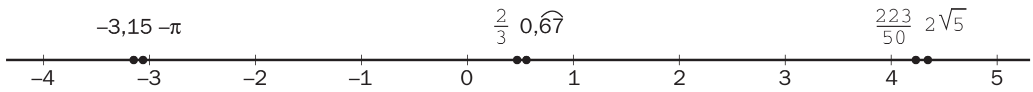
2.40 **Ordena de menor a mayor y representa gráficamente los siguientes números reales.**

$-\pi;\ 2\sqrt{5};\ \frac{2}{3};\ \frac{223}{50};\ -3{,}15;\ 0{,}\widehat{67}$

Necesitamos tener la aproximación decimal de cada uno de los números:

$$-\pi = -3{,}14159\ldots\ 2\sqrt{5} = 4{,}4721\ldots\ \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots\ \frac{223}{50} = 4{,}46 \Rightarrow -3{,}15 < -\pi < \frac{2}{3} < 0{,}\widehat{67} < \frac{223}{50} < 2\sqrt{5}$$

Utilizando la aproximación decimal anterior, representamos gráficamente los números:



2.41 **Calcula la distancia existente en la recta real entre los siguientes pares de números.**

a) $\mathbf{-2,\ 5}$

b) $\mathbf{5,\ \frac{11}{2}}$

c) $\mathbf{-3,\ -4}$

d) $\mathbf{-3,\ \frac{4}{3}}$

a) $d(-2, 5) = |5-(-2)| = |5 + 2| = 7$

b) $d\left(5, \frac{11}{2}\right) = \left|\frac{11}{2} - 5\right| = \left|\frac{11}{2} - \frac{10}{2}\right| = \frac{1}{2}$

c) $d(-3, -4) = |-4-(-3)| = |-4 + 3| = |-1| = 1$

d) $d\left(-3, \frac{4}{3}\right) = \left|\frac{4}{3}-(-3)\right| = \left|\frac{4}{3} + 3\right| = \left|\frac{4}{3} + \frac{9}{3}\right| = \frac{13}{3}$

Intervalos, semirrectas y entornos

2.42 **Expresa, mediante desigualdades y gráficamente en la recta real, los siguientes intervalos y semirrectas.**

a) $\mathbf{[-1,\ +\infty)}$

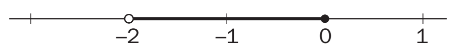
b) $\mathbf{(-2,\ 0]}$

c) $\mathbf{(-\infty,\ 3)}$

d) $\mathbf{[4,\ 8]}$

a) $[-1, +\infty) \rightarrow x \geq -1 \rightarrow$

b) $(-2, 0] \rightarrow -2 < x \leq 0 \rightarrow$



c) $(-\infty, 3) \rightarrow x < 3 \rightarrow$

d) $[4, 8] \rightarrow 4 \leq x \leq 8 \rightarrow$

2.43 **Señala si las siguientes igualdades son verdaderas o no.**

a) $\mathbf{E[1,\ 2] = [-1,\ 3]}$

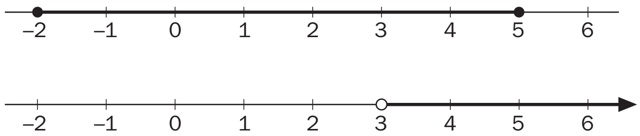
b) $\mathbf{E(0,\ 1) = [-1,\ 1]}$

c) $\mathbf{E(-2,\ 3) = (-5,\ 0)}$

d) $\mathbf{E(4,\ 2) = (3,\ 5]}$

a) Verdadera b) Falsa c) Falsa d) Falsa

2.44 Representa en la recta real el intervalo $A = [-2, 5]$ y la semirrecta $B = (3, +\infty)$. ¿Existe algún intervalo de puntos común a ambos? En caso afirmativo, hállalo.



Sí existe intervalo común a ambos: (3, 5].

Notación científica

2.45 Escribe en notación científica los números:

a) 5182000000000

b) 0,000000000369

c) 835000000000000

d) 0,00000000000351

¿Cuál tiene el mayor orden de magnitud?

¿Y cuál el menor?

a) $5182000000000 = 5,182 \cdot 10^{12}$

b) $0,000000000369 = 3,69 \cdot 10^{-10}$

c) $835000000000000 = 8,35 \cdot 10^{14}$

d) $0,00000000000351 = 3,51 \cdot 10^{-12}$

Ya que el orden de magnitud nos lo indica el exponente de la potencia en base diez, el número de mayor orden es el c, y el de menor, el d.

2.46 Realiza las siguientes operaciones expresando el resultado en notación científica.

a) $2,85 \cdot 10^{10} + 3,16 \cdot 10^{8} - 4,28 \cdot 10^{9}$

b) $3,01 \cdot 10^{-5} \cdot 8,24 \cdot 10^{4} \cdot 71,5 \cdot 10^{7}$

c) $(10,25 \cdot 10^{5}) : (20,5 \cdot 10^{-7})$

d) $(7,35 \cdot 10^{6}) \cdot (1,49 \cdot 10^{3} + 40,2 \cdot 10^{4}) : (9,95 \cdot 10^{-3})$

a) $2,85 \cdot 10^{10} + 3,16 \cdot 10^{8} - 4,28 \cdot 10^{9} = 2,85 \cdot 10^{10} + 0,0316 \cdot 10^{10} - 0,428 \cdot 10^{10} = 2,4536 \cdot 10^{10}$

b) $3,01 \cdot 10^{-5} \cdot 8,24 \cdot 10^{4} \cdot 71,5 \cdot 10^{7} = 1773,3716 \cdot 10^{6} = 1,7733716 \cdot 10^{9}$

c) $(10,25 \cdot 10^{5}) : (20,5 \cdot 10^{-7}) = 0,5 \cdot 10^{12} = 5 \cdot 10^{11}$

d) $(7,35 \cdot 10^{6}) \cdot (1,49 \cdot 10^{3} + 40,2 \cdot 10^{4}) : (9,95 \cdot 10^{-3}) = 2,98055427136 \cdot 10^{14}$

Se realiza primero la suma, luego la multiplicación y finalmente la división. Se concluye expresando el resultado en notación científica.

2.47 En el año 2003, la distancia entre la Tierra y Marte era de 56 millones de kilómetros (la distancia más corta de los últimos 60 000 años). Calcula cuánto tiempo habría tardado en llegar a Marte una nave espacial que hubiese llevado una velocidad de $1,4 \cdot 10^{4}$ metros por segundo.

$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{56 \cdot 10^{6}\ \text{km}}{1,4 \cdot 10^{4}\ \text{m/s}} = 4 \cdot 10^{6}\ s$ tardará la nave en llegar a Marte.

Radicales. Potencias de exponente fraccionario

2.48 Ordena de mayor a menor estos radicales.

a) $3, \sqrt{10}, \sqrt[3]{26}$

b) $\sqrt{2}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{12}$

a) $\sqrt{10} > 3 > \sqrt[3]{26}$

b) $\sqrt[5]{12} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$

2.49 Calcula el valor de las siguientes potencias.

a) $25^{\frac{3}{2}}$ **b)** $343^{\frac{2}{3}}$ **c)** $16^{0,25}$ **d)** $27^{0,3333...}$

a) $25^{\frac{3}{2}} = 125$ b) $343^{\frac{2}{3}} = 49$ c) $16^{0,25} = 2$ d) $27^{0,3333} = 3$

2.50 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27}$

b) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{392}$

d) $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108}$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[6]{2}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}}$

h) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2$

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{6^3} = \sqrt{216}$

b) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{2^6 : 5^2} = \sqrt[3]{\frac{2^6}{5^2}}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{392} = \sqrt[15]{2^{19} \cdot 7^6}$

d) $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108} = \sqrt[4]{\frac{3}{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{2^{-5}}$

f) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}} = \sqrt[4]{2}$

h) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2 = 4$

Radicales semejantes. Racionalización

2.51 Introduce los factores en el radical y opera.

a) $2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{50}$ **b)** $3^2 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{12}$ **c)** $3 \cdot 5^3 \cdot \sqrt[5]{15}$ **d)** $5 \cdot \sqrt{10}$

a) $2 \cdot 5\sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5^3 \cdot 2 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 5^5}$

b) $3^2 \cdot 2\sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{3^8 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6 \cdot 3^9}$

c) $3 \cdot 5^3\sqrt[5]{15} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 5^{15} \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt[5]{3^6 \cdot 5^{16}}$

d) $5\sqrt{10} = \sqrt{5^2 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt{2 \cdot 5^3}$

2.52 Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales y opera.

a) $2 \cdot \sqrt[3]{2160}$ **b)** $3 \cdot 5 \cdot \sqrt{4320}$ **c)** $7 \cdot \sqrt[4]{9072}$ **d)** $2 \cdot 3 \cdot \sqrt{216}$

a) $2\sqrt[3]{2160} = 2\sqrt[3]{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3\sqrt[3]{2 \cdot 5} = 12\sqrt[3]{10}$

b) $3 \cdot 5\sqrt{4320} = 3 \cdot 5\sqrt{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 180\sqrt{30}$

c) $7\sqrt[4]{9072} = 7\sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4 \cdot 7} = 2 \cdot 3 \cdot 7\sqrt[4]{7} = 42\sqrt[4]{7}$

d) $2 \cdot 3\sqrt{216} = 2 \cdot 3\sqrt{2^3 \cdot 3^3} = 2^2 \cdot 3^2\sqrt{2 \cdot 3} = 36\sqrt{6}$

2.53 Opera y simplifica.

a) $2\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - \sqrt{80}$

b) $4\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

c) $\frac{3}{\sqrt{27}} - \frac{5}{\sqrt{75}} + \frac{4}{\sqrt{12}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{24}} + \frac{1}{\sqrt{54}}$

a) $9\sqrt{5}$ b) $13\sqrt[3]{2}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{5\sqrt{6}}{36}$

2.54 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ **e)** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ **i)** $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ **j)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ **g)** $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ **k)** $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$ **h)** $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{7}}$ **l)** $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

a) $2\sqrt{2}$ e) $-3-2\sqrt{2}$ i) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{5}$

b) $\sqrt[3]{9}$ f) $\sqrt{2}+1$ j) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}$ g) $\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2}$ k) $-5-2\sqrt{6}$

d) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ h) $\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{14}}{6}$ l) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{5}$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

2.55 Di si son verdaderas o falsas estas afirmaciones.

a) La raíz cuadrada de un número negativo no existe.

b) Todo número decimal es racional.

c) Todos los números irracionales son reales.

d) El número $\sqrt{\dfrac{12}{3}}$ pertenece a N, Z, Q y R.

a) Verdadera b) Falsa c) Verdadera. d) Verdadera

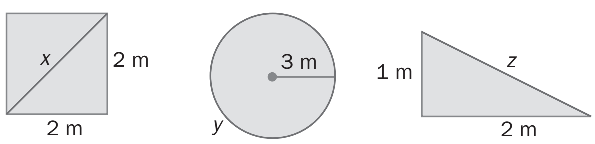
2.56 En la siguiente cadena de contenidos:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Encuentra un número que pertenezca a cada conjunto, pero no a los anteriores.

$1 \in N$; $-1 \in Z$; $\dfrac{1}{2} \in Q$; $\sqrt{2} \in R$

2.57 Las longitudes *x*, *y*, *z*, ¿pueden escribirse como cocientes de dos enteros? ¿Por qué?



No, ya que $x=\sqrt{8}$, $y=6\pi$ y $z=\sqrt{5}$ son números irracionales.

2.58 Un salón rectangular tiene 6 metros de largo y 4 de ancho. ¿Entre qué dos aproximaciones decimales se encuentra su diagonal?

Por el teorema de Pitágoras:

$d=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}=7{,}21110\ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow 7{,}2 < d < 7{,}3$

2.59 **¿Qué intervalo se puede expresar mediante la desigualdad $|x - 3| \leq 2$?**

El intervalo buscado es [1, 5].

2.60 **¿Qué números enteros están a la vez en las semirrectas $(-\infty, -2]$ y $(-6, +\infty)$?**

-5, -4, -3 y -2

2.61 **Di si son ciertas o no estas afirmaciones.**

a) Toda raíz cuadrada no exacta es irracional.

b) La suma de un número racional y otro irracional es racional.

c) Los radicales $\sqrt[6]{25}$ y $\sqrt[3]{5}$ son equivalentes.

d) $\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}$

e) En el intervalo $(-3, -4)$ no hay números enteros, pero sí racionales.

a) Falsa. Puede ser una raíz con resultado decimal periódico.

b) Falsa. Si fuese cierta: $\frac{a}{b} + x = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ sería racional, ya que tendría forma de fracción (donde $\frac{a}{b}$ es racional y x es irracional).

c) Verdadera. Ya que: $\sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[2 \cdot 3]{5^{1 \cdot 2}} = \sqrt[3]{5}$

d) Falsa. Ya que: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$. Si fuese cierta, $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25} \Rightarrow 4 + 3 \neq 5$.

e) Verdadera. En el intervalo citado no hay ninguna unidad entera negativa, pero sí fraccionaria.

2.62 **Explica cómo expresiones tan distintas como $2^{0,5}$, $\sqrt{2}$ y $8^{\frac{1}{6}}$ son equivalentes.**

$2^{0,5} = 2^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $8^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}$

PROBLEMAS PARA APLICAR

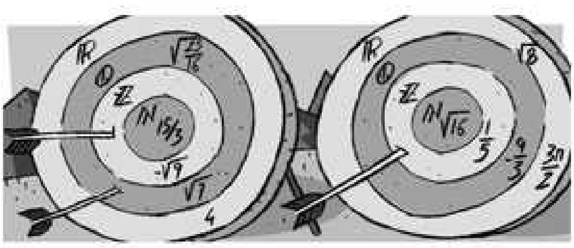
2.63 **Para solar la entrada de una nueva sala de exposiciones se utilizan baldosas de 20 × 30 centímetros. Si la entrada es un recinto circular de 6 metros de radio, ¿cuántas baldosas se necesitan como mínimo, suponiendo que se puedan aprovechar todos los recortes?**

$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = 36\pi \text{ m}^2 = 360000\pi \text{ m}^2$

$A_{\text{baldosa}} = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cm}^2$

$360000\pi : 600 \approx 1884{,}9 \Rightarrow$ El n.º mínimo de baldosas son 1885.

2.64 **En un club de matemáticos tienen una diana de números reales. A cada dardo se le asigna un número real, y se ha de clavar en la franja de la diana correspondiente. Si gana el jugador que realiza el mayor número de aciertos en las franjas adecuadas, ¿cuál de estos dos jugadores habrá ganado?**



1.er jugador: 1 acierto ($-\sqrt{9} \in Z$, $\sqrt{7} \notin Q$)

2.º jugador: 0 aciertos $\left(\frac{1}{5} \notin Z\right)$

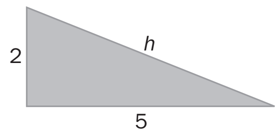
Gana el 1.er jugador.

2.65 **La longitud aproximada de una circunferencia de 7 centímetros de radio es de 43,988 centímetros. ¿Cuál y de qué tipo es la aproximación de π que se ha utilizado?**

$43{,}988 = 2\pi r \Rightarrow \pi = \frac{43{,}988}{14} = 3{,}142$. Luego se ha tomado una aproximación por exceso a la milésima.

2.66 ¿Qué aproximación está más cerca del valor de la hipotenusa del triángulo de la figura, 5,385 ó 5,386 centímetros?

¿Cuánto más cerca?



La aproximación 5,385 se encuentra más cerca del valor de la hipotenusa.

Está aproximadamente 7 milésimas más cerca que 5,386.

2.67 Un grupo de alumnos busca la raíz de un número natural y ha averiguado que se encuentra dentro de los siguientes intervalos encajados: [3; 4], [3,8; 3,9], [3,87; 3,88], [3,872; 3,873]. ¿De qué raíz se trata?

Elevamos al cuadrado los extremos de los intervalos, y obtenemos:

[9; 16], [14,44; 15,21], [14,9769; 15,0544]… Se observa que todos ellos contienen el 15. Por tanto, la solución es $\sqrt{15} = 3{,}872983\ldots$

2.68 En una fábrica de latas de refrescos han decidido aproximar el número π como $\frac{157}{50}$. ¿Cuánto se ahorran de área de aluminio y de volumen de líquido por lata si cada una es cilíndrica y tiene 3 centímetros de radio y 11 de altura?

$A_{\text{cilindro}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 18\pi + 66\pi = 84\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow A_{\text{aprox}} = 84 \cdot 3{,}14 = 263{,}76 \text{ cm}^2$

$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = 99\pi \text{ cm}^3 \Rightarrow V_{\text{aprox}} = 99 \cdot 3{,}14 = 310{,}86 \text{ cm}^3$

$A_{\text{ahorrada}} = 84\pi - 263{,}76 = 0{,}13 \text{ cm}^2$

$V_{\text{ahorrada}} = 99\pi - 310{,}86 = 0{,}16 \text{ cm}^3$

2.69 Un país invierte el 0,17% del PIB en ayuda al desarrollo del Tercer Mundo y las ONG piden cumplir la recomendación de la ONU para erradicar la pobreza, que consiste en dedicar el 0,7%. Si el PIB del país asciende a 2 billones de euros al año, ¿cuánto dinero deja de destinar el país a ayuda al desarrollo según las indicaciones de la ONU? (Realiza todas las operaciones en notación científica.)

2 billones $= 2 \cdot 10^{12}$ €

Dinero invertido $= \frac{17}{10000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 34 \cdot 10^8 = 3{,}4 \cdot 10^9$ €

Dinero recomendado $= \frac{7}{1000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 14 \cdot 10^9 = 1{,}4 \cdot 10^{10}$ €

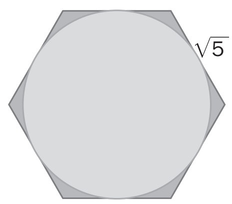
Dinero no destinado $= 1{,}4 \cdot 10^{10} - 3{,}4 \cdot 10^9 = 10{,}6 \cdot 10^9 = 1{,}06 \cdot 10^{10}$ €

2.70 Calcula el área del círculo inscrito en un hexágono regular de $\sqrt{5}$ centímetros de lado. Simplifica el resultado.

Radio = apotema.

Por el teorema de Pitágoras:

$r^2 + \frac{5}{4} = 5 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{2}$ cm²



$A = \pi r^2 = \frac{15\pi}{4}$ cm²

2.71 Un profesor escribe en la pizarra la siguiente operación: $\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Después, pide a la mitad de la clase que la desarrolle en forma de radicales, y a la otra mitad, que lo haga en forma de potencia. ¿Qué resultado obtendrá cada una de las partes de la clase?

Desarrollando en forma de radicales se obtiene como resultado $\sqrt[30]{2}$

Desarrollando en forma de potencia se obtiene como resultado $2^{\frac{1}{30}}$.

2.72 Se realiza un sorteo en la clase de Matemáticas de un grupo de 4.º de ESO con una calculadora gráfica como premio. Ganará el alumno que extraiga el número irracional más alto. Los finalistas obtienen $\frac{7 - 3\sqrt{3}}{8}$ y $\frac{5 - 3\sqrt{3}}{7}$. ¿Quién ha ganado?

Proponemos que: $\frac{7 - 3\sqrt{3}}{8} < \frac{5 - 3\sqrt{3}}{7}$, y operamos:

$\frac{49 - 21\sqrt{3}}{56} < \frac{40 - 24\sqrt{3}}{56} \Rightarrow 49 - 21\sqrt{3} < 40 - 24\sqrt{3} \Rightarrow 49 - 21\sqrt{3} - 40 + 24\sqrt{3} < 0 \Rightarrow 9 + 3\sqrt{3} < 0$, que es falso. Por tanto, la hipótesis es la contraria, es decir: $\frac{7 - 3\sqrt{3}}{8} > \frac{5 - 3\sqrt{3}}{7}$. El ganador es el que obtuvo el número irracional $\frac{7 - 3\sqrt{3}}{8}$.

2.73 Con dos aparatos de medición distintos, se ajusta la longitud de la hipotenusa del triángulo de catetos 2 y 7. Con el aparato A se obtiene $\frac{36}{5}$, y con el B, $\frac{182}{25}$. ¿Qué aparato tiene mayor precisión y qué errores absolutos se han cometido en cada uno de ellos?

Por el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53} = 7{,}280109\ldots$

Aparato A $\Rightarrow \frac{36}{5} = 7{,}2$ Aparato B $\Rightarrow \frac{182}{25} = 7{,}28$

El aparato B es más preciso, ya que tiene orden 2 (n.º de cifras que coinciden con el número exacto).

$Ea_A = |7{,}2 - 7{,}280109\ldots| = 0{,}080109\ldots$

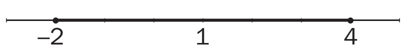
$Ea_B = |7{,}28 - 7{,}280109\ldots| = 0{,}000109\ldots$

2.74 Un alumno piensa en un número entero. El compañero A solicita como pista para adivinarlo si el número pensado está en el entorno (−14, 10), y el compañero B, si se encuentra en (−1, 9). El alumno les contesta que no está en ninguno de esos entornos y que, para encontrarlo, deberían buscar en un entorno que tuviera como centro el punto medio de los centros de los dos entornos citados, y como radio, la suma de los dos radios. ¿Qué entorno les está indicando? ¿Qué posibilidades existen para el número pensado?

$$\underset{(-14,\,10)}{\textit{Compañero A}} \begin{cases} a(centro) = \dfrac{-14 + 10}{2} = -2 \\ r(radio) = \left|\dfrac{-14 - 10}{2}\right| = 12 \end{cases} \Rightarrow E(-2,12)$$

$$\underset{(-1,\,9)}{\textit{Compañero B}} \begin{cases} a(centro) = \dfrac{-1 + 9}{2} = 4 \\ r(radio) = \left|\dfrac{-1 - 9}{2}\right| = 5 \end{cases} \Rightarrow E(4,5)$$

Centro:



Radio $= R_A + R_B = 12 + 5 = 17$

Por tanto: $E(1, 17) = (-16, 18)$

Si el número pertenece al intervalo (−16, 18) y no pertenece a los intervalos (−14, 10) y (−1, 9), entonces el número entero puede ser: −15, −14, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18.

Números reales y aproximaciones

2.75 Calcula una sucesión de intervalos encajados que converja al número $\sqrt{2} + 1$, con un error menor que una décima, una centésima y una milésima.

Error menor que una décima: (2,4; 2,5)

Error menor que una centésima: (2,41; 2,42)

Error menor que una milésima: (2,414; 2,415)

2.76 El número irracional $\pi = 3{,}1415926\ldots$ es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Halla las aproximaciones por defecto, exceso y redondeo de π hasta la milésima. Para el redondeo, calcula también los errores absoluto y relativo que se cometen.

Aproximación por defecto: $\pi \approx 3{,}141$

Aproximación por exceso: $\pi \approx 3{,}142$

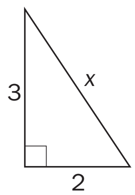
Aproximación por redondeo: $\pi \approx 3{,}142$

Error absoluto $= |3{,}142 - \pi| = 0{,}000407$

Error relativo $= \left|\dfrac{0{,}000407}{\pi}\right| = 0{,}000129$

2.77 Calcula las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo para que la hipotenusa sea un número irracional. Halla los intervalos encajados necesarios para aproximar la hipotenusa con un error inferior a la centésima.

Para que la hipotenusa sea un número irracional, debe ser una raíz cuadrada no exacta. Por ejemplo, si los catetos miden 2 y 3 cm, por el teorema de Pitágoras tenemos que:



$$2^2 + 3 = x^2 \Rightarrow 4 + 9 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{13} \text{ cm}$$

Finalmente, hallamos los intervalos encajados necesarios para aproximar $\sqrt{13}$ a la centésima:

$3 < \sqrt{13} < 4$

$3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7 \quad \Rightarrow$ Los intervalos buscados son: $I_0 = (3; 4)$, $I_1 = (3{,}6; 3{,}7)$, $I_2 = (3{,}60; 3{,}61)$

$3{,}60 < \sqrt{13} < 3{,}61$

Notación científica

2.78 Teniendo en cuenta que la masa del electrón es de $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kilogramos y que la masa de un elefante africano es, aproximadamente, de 7500 kilogramos, ¿cuántas veces es más pesado el elefante que el electrón?

$\dfrac{m_{elefante}}{m_{electrón}} = \dfrac{7{,}5 \cdot 10^3}{9{,}11 \cdot 10^{-31}} = \dfrac{7{,}5}{9{,}11} \cdot 10^{34} \cong 8{,}2327113 \cdot 10^{33}$ es más pesado el elefante respecto del electrón.

2.79 Opera y expresa el resultado en notación científica:

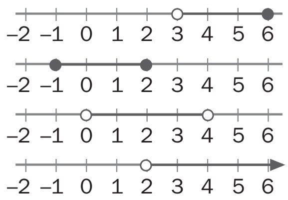
$4{,}75 \cdot 10^{-6} \cdot (3{,}56 \cdot 10^9 + 9{,}87 \cdot 10^7 - 20{,}46 \cdot 10^5)$

$4{,}75 \cdot 10^{-6} \cdot (3{,}56 \cdot 10^9 + 9{,}87 \cdot 10^7 - 20{,}46 \cdot 10^5) = 1{,}74 \cdot 10^4$

Representación en intervalos y semirrectas

2.80 Relaciona mediante flechas las diferentes formas de representar los siguientes intervalos y semirrectas.

$[-1, 2]$	$x > 2$
$(2, +\infty)$	$0 < x < 4$
$(3, 6]$	$-1 \leq x \leq 2$
$(0, 4)$	$3 < x \leq 6$

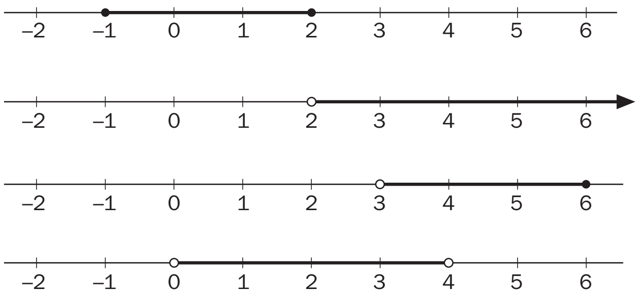


$[-1, 2] \rightarrow -1 \leq x \leq 2 \rightarrow$

$(2, +\infty) \rightarrow x > 2 \rightarrow$

$(3, 6] \rightarrow 3 < x \leq 6 \rightarrow$

$(0, 4) \rightarrow 0 < x < 4 \rightarrow$



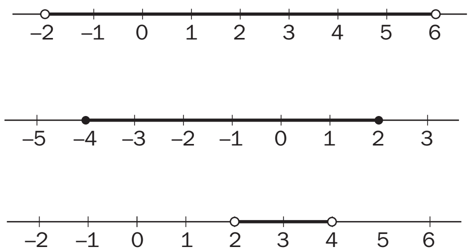
2.81 Dibuja los siguientes entornos en la recta real e indica mediante desigualdades los intervalos que determinan, así como su centro y su radio.

a) $E(2, 4)$ **b)** $E[-1, 3]$ **c)** $E(3, 1)$

a) $E(2, 4)$: $-2 < x < 6$; centro $= 2$ y radio $= 4 \rightarrow$

b) $E[-1, 3]$: $-4 \leq x \leq 2$; centro $= -1$ y radio $= 3 \rightarrow$

c) $E(3, 1)$: $2 < x < 4$; centro $= 3$ y radio $= 1 \rightarrow$



Radicales y operaciones

2.82 Realiza las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12}$

c) $\sqrt{3} + \sqrt[4]{3} : \left(\sqrt[3]{3}\right)^2$

d) $3\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - 4\sqrt{8} - \sqrt{200}$

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 3^2} = \sqrt[12]{1125}$

b) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12} = \sqrt[6]{3 \cdot 2^{-6}} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} : \left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = \sqrt[12]{3}$

d) $3\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - 4\sqrt{8} - \sqrt{200} = 9\sqrt{2}$

2.83 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{5}{\sqrt{15}}$ **b)** $\frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{11}}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

a) $\frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

b) $\frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{11}} = \sqrt{11} - \sqrt{7}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{-2 + \sqrt{10}}{3}$

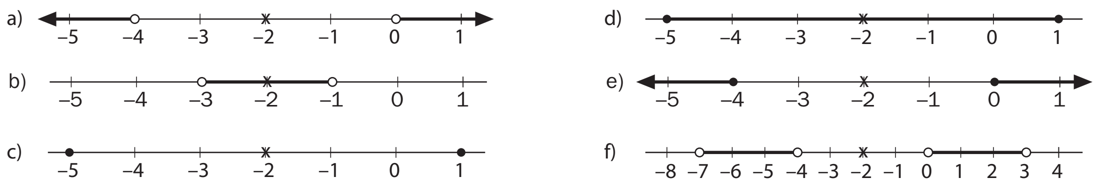
AMPLIACIÓN

2.84 Redondeando π hasta la milésima, el volumen de una esfera es de 14,139 cm^3. Averigua su radio.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = 1{,}5$, con $\pi = 3{,}142$

2.85 Marca en una recta numérica el conjunto de puntos cuya distancia al punto −2 sea:

a) Mayor que 2
b) Menor que 1
c) Igual a 3
d) No mayor que 3
e) No menor que 2
f) Mayor que 2 y menor que 5



2.86 Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $|a^2| = |a|^2$ **b) $|a| = \frac{1}{a}$** **c) $|2a - 1| < 3$**

a) $a \in \Re$ b) $a = 1$ c) $-1 < a < 2$

2.87 Calcula a, b, c y d en esta igualdad: $\sqrt{10^4 \cdot 14^6 \cdot 81^{12}} = 2a \cdot 3b \cdot 5c \cdot 7d$

$\sqrt{2^{10} \cdot 3^{48} \cdot 5^4 \cdot 7^6} = 2^a + 3^b + 5^c + 7^d \Rightarrow a = 5;\ b = 24;\ c = 2;\ d = 3$

2.88 La sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ se va acercando cada vez más al número irracional $e = 2{,}71828\ldots$ Con qué elemento de la sucesión consigues aproximar hasta la milésima dicho número?

Con el elemento $a_6 = 2{,}718055\ldots$

2.89 Calcula la distancia entre $5^{\frac{2}{5}}$ y $17^{\frac{1}{3}}$, con un error menor que una milésima.

$d(5^{\frac{2}{5}}, 17^{\frac{1}{3}}) = |17^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{2}{5}}| = |\sqrt[3]{17} - \sqrt[5]{25}| = |2{,}5712815\ldots - 1{,}9036539\ldots| = 0{,}6676276\ldots \Rightarrow d(5^{\frac{2}{5}}, 17^{\frac{1}{3}}) = 0{,}667$

Ya que $E_a = |0{,}667 - 0{,}6676276\ldots| = 0{,}0006276\ldots < 0{,}001$

2.90 Opera y simplifica.

a) $2\sqrt{x} + 5\sqrt{25x} - 3\sqrt{36x} - 4\sqrt{9x}$ **b) $\dfrac{2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{5}{6}}}$**

a) $-3\sqrt{x}$ b) $\dfrac{2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{5}{6}}} = 2\sqrt[10]{2}$

2.91 Halla el valor de a y b para que se cumpla la siguiente igualdad.

$$\frac{(98\,700\,000\,000\,000\,000\,000)^4}{(0{,}000\,000\,000\,000\,023\,4)^{-5}} = a \cdot 10^b$$

Donde a es un número racional entre 1 y 10 redondeado hasta dos cifras decimales.

Pasamos a notación científica ambos números, y luego operamos:

$\frac{(9{,}87 \cdot 10^{19})^4}{(2{,}34 \cdot 10^{-14})^{-5}} = a \cdot 10^b \Leftrightarrow \frac{9490{,}05 \cdot 10^{76}}{0{,}01 \cdot 10^{70}} = 949005 \cdot 10^6 = 9{,}49005 \cdot 10^5 \cdot 10^6 = 9{,}49 \cdot 10^{11}$

$a = 9{,}49$ y $b = 11$

2.92 **Calcula *a* y *b* en la inecuación $|x - a| < b$ para que la totalidad de valores de *x* que la cumplen estén representados por el entorno $(-16, 2)$.**

a (centro) $= \dfrac{-16 + 2}{2} = \dfrac{-14}{2} = -7$ $\qquad$ b (radio) $= \left|\dfrac{-16 - 2}{2}\right| = \left|\dfrac{-18}{2}\right| = 9$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

2.93 **Medidas inexactas**

En el dibujo aparecen las dimensiones de una mesa de pimpón.

Para obtener las medidas anteriores, se ha utilizado una regla que solo aprecia hasta el milímetro.

a) Indica cuál de las siguientes expresiones puede servir para determinar la verdadera medida del largo *a* de la mesa.

A	*B*	*C*
$a = 122{,}4$	$\|a - 122{,}4\| \leq 0{,}1$	$a = 122{,}4 \pm 0{,}1$

b) Si *b* es el valor del ancho, escribe entre qué dos valores mínimo y máximo se encuentra el verdadero valor del área de la mesa.

a) La *B*

b) $\begin{cases} 122{,}4 - 0{,}1 \leq a \leq 122{,}4 + 0{,}1 \\ 66{,}8 - 0{,}1 \leq b \leq 66{,}8 + 0{,}1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 122{,}3 \leq a \leq 122{,}5 \\ 66{,}7 \leq b \leq 66{,}9 \end{cases} \Rightarrow 122{,}3 \cdot 66{,}7 \leq a \cdot b \leq 122{,}5 \cdot 66{,}9$

$8157{,}41 \leq \text{Área} \leq 8195{,}25$

2.94 **Las células robóticas**

Se va a construir un nuevo robot con forma cilíndrica capaz de realizar numerosas tareas industriales. Para ello se utilizan *células* con diferentes funciones, pero todas ellas con forma de esfera de $12 \cdot 10^{-2}$ milímetros de diámetro.

a) Estima cuántas *células* harían falta para que, colocadas en fila, se consiguiera alcanzar la altura del robot, que es de 165 centímetros.

b) Calcula cuántas *células* se necesitarían para completar la longitud de la circunferencia que determina la sección del cuerpo del robot, sabiendo que tiene un diámetro de 30 centímetros.

c) Evalúa el número de *células* necesarias para completar el área de la capa más externa de la superficie cilíndrica del robot.

d) El peso de cada *célula* es de 0,02 miligramos. Estima el peso en kilogramos de la capa más externa del robot.

Escribe los resultados en notación científica.

a) $\dfrac{165}{1{,}2 + 10^{-3}} = 137\,500 = 1{,}375 \cdot 10^5$ células

b) $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 15 = 94{,}248$

$\dfrac{94{,}248}{1{,}2 \cdot 10^{-3}} = 78\,540 = 7{,}854 \cdot 10^4$ células

c) $1{,}375 \cdot 10^5 \cdot 7{,}854 \cdot 10^4 = 1{,}08 \cdot 10^{10}$ células

d) $1{,}08 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-8} = 216$ kg

2.A1 **Sean los números $A = 1{,}7864\ldots$ y $B = 2{,}3879\ldots$**
Calcula $A + B$ y $A - B$, con una aproximación hasta la milésima.

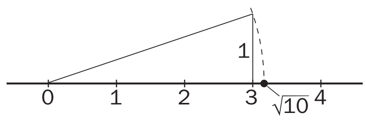
$A + B = 4{,}174$ $\qquad$ $A - B = -0{,}602$

2.A2 **Representa en la recta real el número $\sqrt{10}$.**

a) ¿Qué tipo de número es?

b) ¿Qué teorema has aplicado para la representación?

c) Halla la sucesión de intervalos encajados que lo aproximen hasta la milésima.



a) Es un número irracional, ya que es una raíz cuadrada no exacta.

b) Teorema de Pitágoras: $3^2 + 1^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$

c) $3 < \sqrt{10} < 4$

$3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2 \qquad 3{,}16 < \sqrt{10} < 3{,}17$

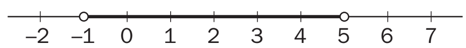
$3{,}162 < \sqrt{10} < 3{,}163$

Por tanto, los intervalos encajados buscados son:

$I_0 = (3;\ 4\ ),\ I_1 = (3{,}1;\ 3{,}2),\ I_2 = (3{,}16;\ 3{,}17),\ I_3 = (3{,}162;\ 3{,}163)$

2.A3 **Un conjunto de números reales x cumple que $|x - 2| < 3$. Describe este conjunto utilizando intervalos y desigualdades, y gráficamente.**

$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 5) \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow$



2.A4 **Calcula el punto o puntos de la recta real que verifican la siguiente igualdad: $d(x, -3) = 2$.**

$$d(x, -3) = 2 \Leftrightarrow |-3 - x| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x = -2 \Rightarrow x = -1 \\ x + 3 = 2 \Rightarrow x = -5 \end{cases}$$

2.A5 **Realiza las siguientes operaciones expresando el resultado en notación científica.**

a) $3{,}28 \cdot 10^5 + 2{,}35 \cdot 10^7$

b) $(0{,}26 \cdot 10^{-4}) \cdot (8{,}53 \cdot 10^9)^2$

c) $(2{,}5 \cdot 10^3) \cdot (6{,}2 \cdot 10^2 - 31{,}4 \cdot 10^4) \cdot (10{,}7 \cdot 10^2)$

a) $3{,}28 \cdot 10^5 + 2{,}35 \cdot 10^7 = 2{,}38 \cdot 10^7$

b) $(0{,}26 \cdot 10^{-4}) \cdot (8{,}53 \cdot 10^9)^2 = 1{,}89 \cdot 10^{15}$

c) $(2{,}5 \cdot 10^3) \cdot (6{,}2 \cdot 10^2 - 31{,}4 \cdot 10^4) \cdot (10{,}7 \cdot 10^2) = -8{,}3829 \cdot 10^{11}$

2.A6 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $81^{1,25}$ $\qquad$ **b) $8^{\frac{2}{3}}$** $\qquad$ **c) $9^{1,5}$** $\qquad$ **d) $125^{\frac{4}{3}}$**

a) 243 $\qquad$ b) 4 $\qquad$ c) 27 $\qquad$ d) 625

2.A7 **Racionaliza estas expresiones.**

a) $\dfrac{4}{\sqrt{8}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt{12}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$

2.A8 **Realiza las siguientes operaciones con radicales.**

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{2}$

b) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3}$

c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^4$

d) $3\sqrt{75}-2\sqrt{12}+3\sqrt{27}$

e) $3\sqrt{50}+\sqrt{200}-8\sqrt{8}$

f) $\dfrac{3}{\sqrt{10}}-\dfrac{5}{\sqrt{40}}+\dfrac{2}{\sqrt{90}}$

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{18}$

b) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3}=\sqrt[15]{2^5\cdot 3^{-3}}$

c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^4=\sqrt[3]{4}$

d) $3\sqrt{75}-2\sqrt{12}+3\sqrt{27}=20\sqrt{3}$

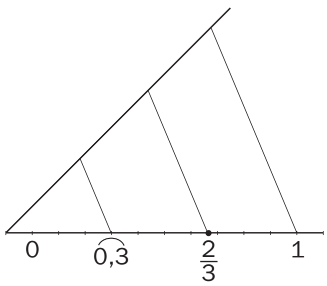
e) $3\sqrt{50}+\sqrt{200}-8\sqrt{8}=9\sqrt{2}$

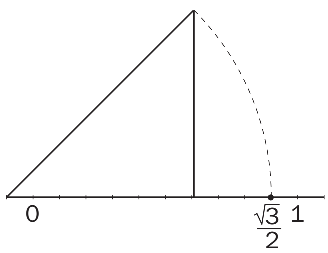
f) $\dfrac{3}{\sqrt{10}}-\dfrac{5}{\sqrt{40}}+\dfrac{2}{\sqrt{90}}=\dfrac{7\sqrt{10}}{60}$

2.A9 **Ordena de mayor a menor y representa gráficamente los siguientes números reales.**

$0,\widehat{3}$; $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0,\widehat{3}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$





M A T E T I E M P O S

¿La calculadora se equivoca?

Fíjate en esta operación: 123 987 456^2 − (123 987 455 · 123 987 457).

Comprueba que si utilizas tu calculadora para resolverla directamente obtienes una solución, y si la simplificas previamente, consigues otra distinta. ¿Por qué ocurre esto?

En una calculadora convencional no podremos introducir cifras tan grandes; por tanto, tendremos que redondear, o redondeará la propia calculadora según el modelo, y de este redondeo vendrán los errores.

Para resolverlo se tiene que tener en cuenta que si:

$123\,987\,456 = a$

$123\,987\,455 = a - 1$

$123\,987\,457 = a + 1$

Haciendo operaciones algebraicas:

$A = a^2 - (a-1)(a+1) = a^2 - (a^2-1) = a^2 - a^2 + 1 = 1$

Luego $A = 1$, independientemente del valor de a.