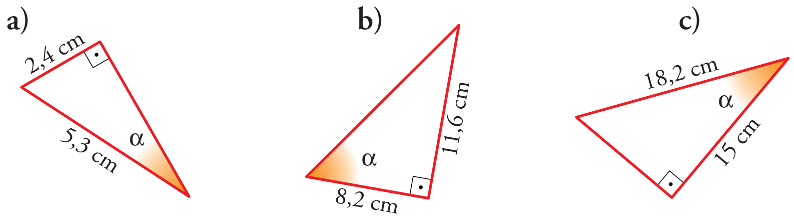
Página 190

PRACTICA

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

1 **Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:**



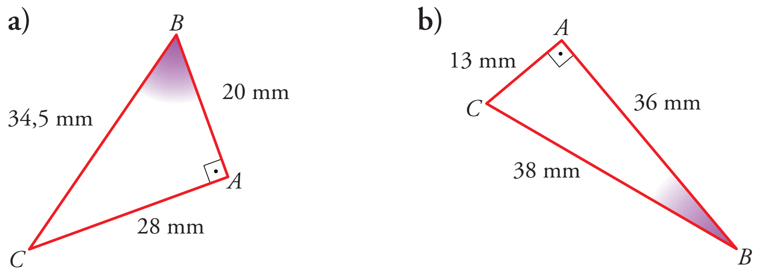
a) $sen\ \alpha = \dfrac{2,4}{5,3} = 0,45$ $\quad cos\ \alpha = \sqrt{1 - 0,45^2} = 0,89$ $\quad tg\ \alpha = \dfrac{0,45}{0,89} = 0,5$

b) $tg\ \alpha = \dfrac{11,6}{8,2} = 1,41$ La hipotenusa h es: $h = \sqrt{11,6^2 + 8,2^2} = 14,2$

$sen\ \alpha = \dfrac{11,6}{14,2} = 0,82$ $\quad cos\ \alpha = \dfrac{8,2}{14,2} = 0,58$

c) $cos\ \alpha = \dfrac{15}{18,2} = 0,82$ $\quad sen\ \alpha = \sqrt{1 - (0,82)^2} = 0,57$ $\quad tg\ \alpha = \dfrac{0,57}{0,82} = 0,69$

2 **Midiendo los lados, halla las razones trigonométricas de $\hat{B}$ en cada caso:**



a) $sen\ B = \dfrac{28}{34,5} = 0,81$

$cos\ B = \dfrac{20}{34,5} = 0,58$

$tg\ B = \dfrac{28}{20} = 1,4$

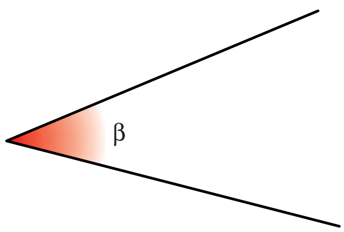
b) $sen\ B = \dfrac{13}{38} = 0,34$

$cos\ B = \dfrac{36}{38} = 0,95$

$tg\ B = \dfrac{13}{36} = 0,36$

3 **Calcula las razones trigonométricas de β:**

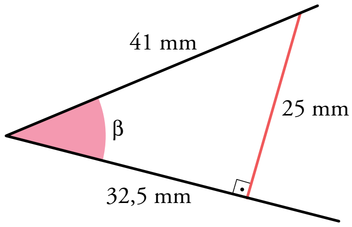
☛ *Construye un triángulo trazando una perpendicular a uno de los lados.*



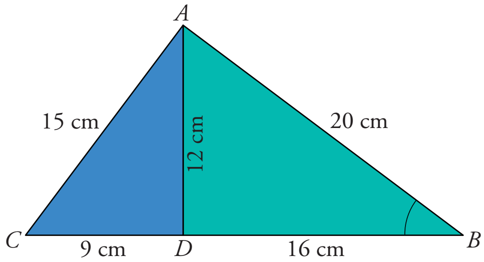
$sen\ \beta = \dfrac{25}{41} = 0,61$

$cos\ \beta = \dfrac{32,5}{41} = 0,79$

$tg\ \beta = \dfrac{25}{32,5}\ 0,77$



4 **Prueba, con el teorema de Pitágoras, que los triángulos *ABC* y *ADB* son rectángulos. Halla $sen\ \hat{B}$ en los dos triángulos (el verde y el total) y comprueba que obtienes el mismo valor.**

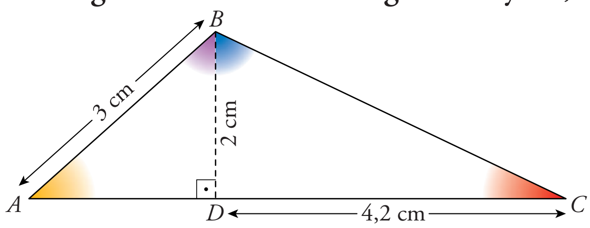


Triángulo ABC: $\sqrt{20^2 + 15^2} = 25 = \overline{CB} \rightarrow ABC$ es un triángulo rectángulo.

Triángulo ADB: $\sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \rightarrow ADB$ es un triángulo rectángulo.

En ABC: $sen\ \hat{B} = \dfrac{15}{9 + 16} = 0,6$ En ADB: $sen\ \hat{B} = \dfrac{12}{20} = 0,6$

5 **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.**



- $sen\ \hat{A} = \dfrac{2}{3}$

  $cos\ \hat{A} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

  $tg\ \hat{A} = \dfrac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

- $tg\ \hat{C} = \dfrac{2}{4,2} = 0,48 \rightarrow \dfrac{sen\ \hat{C}}{cos\ \hat{C}} = 0,48 \rightarrow sen\ \hat{C} = 0,48 \cdot cos\ \hat{C}$

  $(sen\ \hat{C})^2 + (cos\ \hat{C})^2 = 1 \rightarrow (0,48\ cos\ \hat{C})^2 + (cos\ \hat{C})^2 = 1 \rightarrow cos\ \hat{C} = 0,9$

  $sen\ \hat{C} = 0,48 \cdot 0,9 = 0,43$

- Llamamos $\alpha = \widehat{ABD}$:

$cos\ \alpha = \frac{2}{3}$

$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow (sen\ \alpha)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \rightarrow (sen\ \alpha)^2 = 1 - \frac{4}{9} \rightarrow$

$\rightarrow (sen\ \alpha)^2 = \frac{5}{9} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\sqrt{5}/3}{2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

- Llamamos $\beta = CBD$:

$tg\ \beta = \frac{4,2}{2} = 2,1 \rightarrow \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = 2,1 \rightarrow sen\ \beta = 2,1 \cdot cos\ \beta$

$(sen\ \beta)^2 + (cos\ \beta)^2 = 1 \rightarrow (2,1 \cdot cos\ \beta)^2 + (cos\ \beta)^2 = 1 \rightarrow cos\ \beta = 0,43$

$sen\ \beta = 2,1 \cdot cos\ \beta = 2,1 \cdot 0,43 = 0,9$

Relaciones fundamentales

6 **Si $sen\ \alpha = 3/5$, calcula $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ utilizando las relaciones fundamentales ($\alpha < 90°$).**

$sen\ \alpha = \frac{3}{5}\ (\alpha < 90°)$

$cos\ \alpha = \sqrt{1 - (sen\ \alpha)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{4}{5}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{3}{4}$

7 **Halla el valor exacto (con radicales) de $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$ sabiendo que $tg\ \alpha = 3$ ($\alpha < 90°$).**

$tg\ \alpha = 3\ (\alpha < 90°)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 3 \\ sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} sen\ \alpha = 3cos\ \alpha \\ (3cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow 10cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow \end{array}$$

$\rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

8 **Completa esta tabla:**

sen α	**0,92**	0,6	0,99	$\sqrt{5}/3$	**0,2**	$\sqrt{3}/2$
cos α	0,39	0,8	**0,12**	2/3	0,98	**1/2**
tg α	2,35	**0,75**	8,27	$\sqrt{5}/2$	0,2	$\sqrt{3}$

En todos los casos solo tomaremos valores positivos.

- $sen\ \alpha = 0{,}92 \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1-(0{,}92)^2} = 0{,}39$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}35$

- $tg\ \alpha = 0{,}75$

  $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0{,}75 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}75 \cdot cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow (0{,}75 \cdot cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow$

  $\rightarrow (cos\ \alpha)^2 = 0{,}64 \rightarrow cos\ \alpha = 0{,}8$

  $sen\ \alpha = 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6$

- $cos\ \alpha = 0{,}12 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1-(0{,}12)^2} = 0{,}99$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}99}{0{,}12} = 8{,}27$

- $tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

  $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2} cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$

  $\dfrac{5}{4}(cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow \dfrac{9}{4}(cos\ \alpha)^2 = 1$

  $(cos\ \alpha)^2 = \dfrac{4}{9} \rightarrow cos\ \alpha = \dfrac{2}{3}$

  $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

- $sen\ \alpha = 0{,}2 \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1-0{,}2^2} = 0{,}98$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}2$

- $cos\ \alpha = \dfrac{1}{2} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} \rightarrow sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  $tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

9 Calcula el valor exacto (utilizando radicales) de las razones trigonométricas que faltan y el ángulo α ($\alpha < 90°$).

$sen\ \alpha$	$1/3$	$\sqrt{7}/3$	$(2\sqrt{5})/5$
$cos\ \alpha$	$(2\sqrt{2})/3$	$\sqrt{2}/3$	$\sqrt{5}/5$
$tg\ \alpha$	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{7/2}$	2
α	19° 28' 16''	61° 52' 28''	63° 26' 6''

Como $\alpha < 90° \rightarrow \begin{cases} sen\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha > 0 \end{cases}$

- $sen\ \alpha = \dfrac{1}{3} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

  $tg\ \alpha = \dfrac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

  $\alpha = 19{,}47° = 19°\ 28'\ 16''$

- $cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{7}{9}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

  $tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{7}/3}{\sqrt{2}/3} = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$

  $\alpha = 61{,}87° = 61°\ 52'\ 28''$

- $tg\ \alpha = 2 \rightarrow \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2 \rightarrow sen\ \alpha = 2\ cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow 4(cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

  $sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; $\alpha = 63{,}43° = 63°\ 26'\ 6''$

Resolución de triángulos rectángulos

10 Halla la medida de los lados y ángulos desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):

a) $b = 5$ cm $c = 12$ cm   Calcula a, $\hat{B}$ y $\hat{C}$

b) $c = 43$ m $\hat{C} = 37°$ Calcula a, b y $\hat{B}$

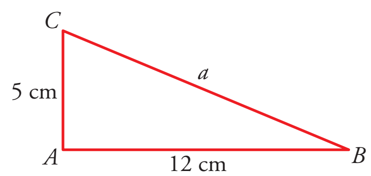
c) $b = 7$ m $\hat{C} = 49°$ Calcula a, c y $\hat{B}$

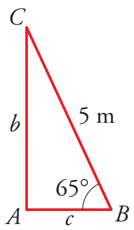
d) $a = 5$ m $\hat{B} = 65°$ Calcula b, c y $\hat{C}$

a) $a = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ cm

$sen\ \hat{B} = \dfrac{5}{13} = 22{,}62 \rightarrow \hat{B} = 22°\ 37'\ 11''$

$\hat{C} = 90° - 22{,}62 = 67{,}38 = 67°\ 22'\ 48''$



b) 

$\hat{B} = 90° - 37° = 53°$

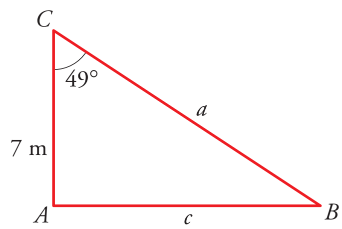
$cos\ \hat{B} = \dfrac{43}{a} \rightarrow cos\ 53° = \dfrac{43}{a} \rightarrow a = \dfrac{43}{cos\ 53°} = 71{,}45$ m

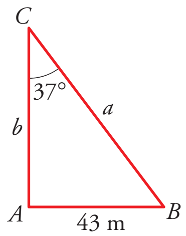
$tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{43} \rightarrow b = 43 \cdot tg\ 53° = 57{,}06$ m

c) $\hat{B} = 90 - 49 = 41°$

$cos\ \hat{C} = \dfrac{7}{a} \rightarrow a = \dfrac{7}{cos\ 49°} = 10{,}67$ m

$sen\ \hat{C} = \dfrac{c}{10{,}67} \rightarrow c = 10{,}67 \cdot sen\ \hat{C} = 8{,}05$ m



d) 

$\hat{C} = 90° - 65° = 25°$

$sen\ 65° = \dfrac{b}{5} \rightarrow b = 5\ sen\ 65° = 4{,}53$ m

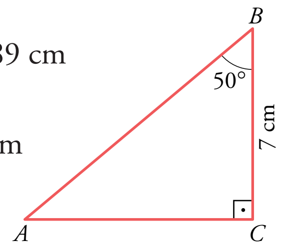
$cos\ 65° = \dfrac{c}{5} \rightarrow c = 5\ cos\ 65° = 2{,}11$ m

11 **En un triángulo rectángulo, ABC, con el ángulo recto en C, conocemos $\hat{B} = 50°$ y el cateto $\overline{BC} = 7$ cm. Calcula $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\hat{A}$.**

$cos\ \hat{B} = \dfrac{7}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \dfrac{7}{cos\ 50°} = 10{,}89 \rightarrow \overline{AB} = 10{,}89$ cm

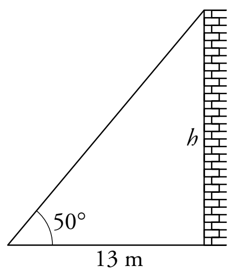
$tg\ \hat{B} = \dfrac{\overline{AC}}{7} \rightarrow \overline{AC} = 7 \cdot tg\ \hat{B} = 8{,}34 \rightarrow \overline{AC} = 8{,}34$ cm

$\hat{A} = 180° - 90° - 50° = 40° \rightarrow \hat{A} = 40°$



Página 191

12 **Calcula la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50° con el suelo.**



$tg\ 50° = \dfrac{h}{13} \rightarrow h = 13 \cdot tg\ 50° \rightarrow h = 15{,}49$ m

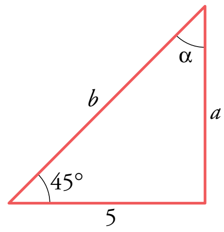
La torre mide 15,49 m de altura.

13 **De un triángulo rectángulo se sabe que un ángulo mide 45° y uno de sus catetos 5 cm. ¿Cuánto miden el otro cateto, la hipotenusa y el otro ángulo agudo?**

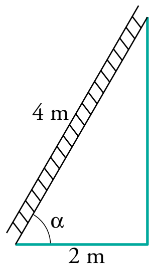
$tg\ 45° = \frac{a}{5} \rightarrow 1 = \frac{a}{5} \rightarrow a = 5$ cm

$b = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}1$ cm; $a = 90° - 45° = 45°$

El otro cateto mide 5 cm, la hipotenusa 7,1 cm y el ángulo 45°.



14 **Una escalera de 4 m está apoyada contra la pared. ¿Cuál será su inclinación si su base dista 2 m de la pared?**



$cos\ \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$

La inclinación de la escalera es de 60° respecto del suelo.

15 **Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 8 cm, respectivamente. ¿Cuánto mide el lado del rombo?**

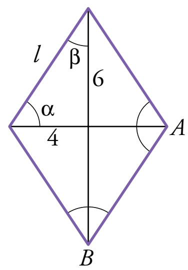
$tg\ \alpha = \frac{6}{4} \rightarrow \alpha = 56{,}3° \rightarrow \beta = 90 - 56{,}3 = 33{,}7°$

Los ángulos del rombo son:

$\hat{A} = 56{,}3 \cdot 2 = 112{,}6°$; $\hat{B} = 33{,}7 \cdot 2 = 67{,}4°$

$l = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = 7{,}21$ cm

El lado del rombo mide 7,21 cm.



16 **En el triángulo *ABC*:**

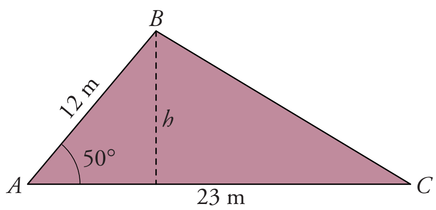
a) Traza la altura sobre *AC* y halla su longitud.

b) Calcula el área del triángulo.

a) $sen\ 50° = \frac{h}{12} \rightarrow$

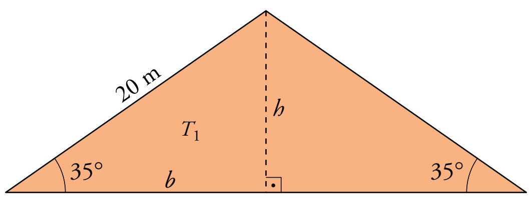
$\rightarrow h = 12 \cdot sen\ 50° = 9{,}19$ m

b) $\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{23 \cdot 9{,}19}{2} = 105{,}68\ \text{m}^2$



17 **Calcula el área de este triángulo:**

☛ *Al trazar la altura se forman dos triángulos rectángulos. Halla sus catetos.*



$$sen\ 35° = \frac{h}{20} \rightarrow h = 20 \cdot sen\ 35° = 11,47 \text{ m}$$

$$cos\ 35° = \frac{b}{20} \rightarrow b = 20 \cdot cos\ 35° = 16,38 \text{ m}$$

$$\text{Área de } T_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{16,38 \cdot 11,47}{2} = 93,94 \text{ m}^2$$

$$\text{Área total} = 2 \cdot 93,94 = 187,88 \text{ m}^2$$

Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

18 **Di en qué cuadrante se encuentran los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas.**

a) 128° b) 198° c) 87° d) 98° e) 285° f) 305°

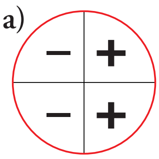
Compruébalo con la calculadora.

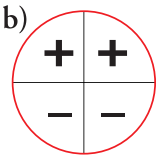
ÁNGULO	CUADRANTE	SIGNO SENO	SIGNO COSENO	SIGNO TANGENTE
128°	2º	positivo	negativo	negativo
198°	3º	negativo	negativo	positivo
87°	1º	positivo	positivo	positivo
98°	2º	positivo	negativo	negativo
285°	4º	negativo	positivo	negativo
305°	4º	negativo	positivo	negativo

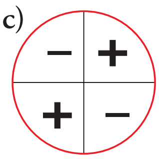
19 **Completa esta tabla sin usar la calculadora:**

	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tg	0	—	0	—	0

20 **En cada uno de estos círculos está indicado el signo de las razones trigonométricas de α, según el cuadrante en el que esté α. ¿Cuál corresponde a *sen* α, cuál a *cos* α y cuál a *tg* α?**

a)


b)


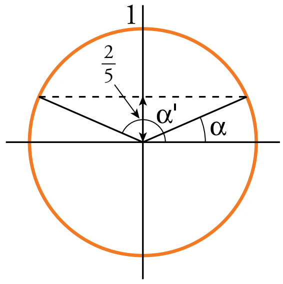
c)


a) Corresponde a *cos* α. b) Corresponde a *sen* α. c) Corresponde a *tg* α.

21 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

22 **Dibuja dos ángulos cuyo seno sea 2/5 y halla su coseno.**

$sen\ \alpha = \frac{2}{5} \rightarrow \alpha = 23°\ 34'\ 41''$

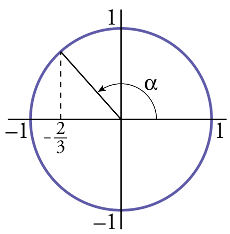


$cos\ \alpha = \sqrt{1-(sen\ \alpha)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$sen\ \alpha' = \frac{2}{5} \rightarrow \alpha' = 156°\ 25'\ 18''$

$cos\ \alpha' = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

23 **Dibuja un ángulo menor que 180° cuyo coseno sea $-\frac{2}{3}$ y halla su seno y su tangente.**



$cos\ \alpha = -\frac{2}{3}$ el ángulo es $\alpha = 131°\ 48'\ 37''$

$sen\ \alpha = \sqrt{1-(cos\ \alpha)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\sqrt{5}/3}{-2/3} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

24 **Sabiendo que $tg\ \alpha = -2$ y $\alpha < 180°$, halla $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$.**

Por ser $tg\ \alpha < 0$ y $\alpha < 180°$, el ángulo $\alpha \in$ 2º cuadrante $\rightarrow$ $sen\ \alpha > 0$ y $cos\ \alpha < 0$.

$tg\ \alpha = -2 \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -2 \rightarrow sen\ \alpha = -2\ cos\ \alpha$

$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow (-2\ cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 5\,(cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

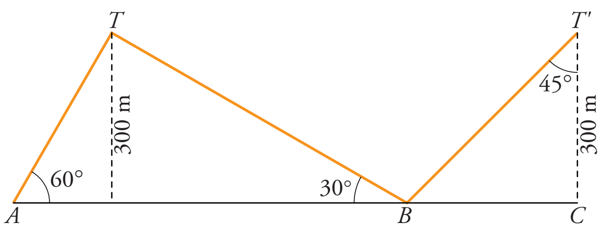
Página 192

PIENSA Y RESUELVE

25 **Una línea de alta tensión pasa por dos transformadores, *T* y *T'*.**

Este es un plano de la línea:

Calcula las longitudes de los tres tramos de cable.



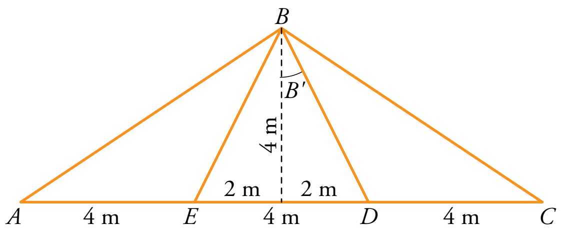
$sen\ 60° = \dfrac{300}{b} \;\rightarrow\; b = \dfrac{600}{\sqrt{3}} = 200\sqrt{3} \approx 346{,}4$ m

$sen\ 30° = \dfrac{300}{a} \;\rightarrow\; a = 600$ m

$cos\ 45° = \dfrac{300}{c} \;\rightarrow\; c = \dfrac{300}{cos\ 45°} = \dfrac{600}{\sqrt{2}} = 300\sqrt{2} \approx 424{,}3$ m

Longitud total: $a + b + c = 200\sqrt{3} + 600 + 300\sqrt{2} = 1\,370{,}7$ m

26 **Una estructura metálica tiene la forma y dimensiones de la figura. Halla la longitud de los postes AB y BE y la medida de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{EBD}$ y $\widehat{ABC}$**



Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + (4+2)^2} =$

$= \sqrt{16 + 36} = 7{,}21$ m

$\overline{BE} = \sqrt{2^2 + 4^2} =$

$= \sqrt{4 + 16} = 4{,}47$ m

$tg\ \hat{A} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \;\rightarrow\; \hat{A} = 0{,}\widehat{6}$ INV tan $67{,}38° = 33°\ 41'\ 24''$

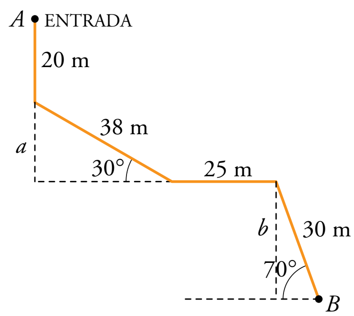
$\hat{C} = \hat{A} = 33°\ 41'\ 24''$

$\widehat{ABC} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 180° - 67{,}38° = 112{,}62° = 112°\ 37'\ 12''$

$tg\ \hat{B}' = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \hat{B}' = 26{,}57° \;\rightarrow\; \hat{B}' = 26°\ 34'\ 12''$

$\widehat{EBD} = 2\hat{B}' = 53{,}14° = 53°\ 8'\ 24''$

27 **Los espeleólogos utilizan un carrete para medir la profundidad. Sueltan hilo del carrete y miden la longitud y el ángulo que forma con la horizontal. Halla la profundidad del punto B.**



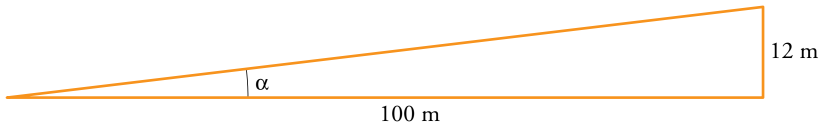
$sen\ 30° = \dfrac{a}{38} \;\rightarrow\; a = 38 \cdot sen\ 30° = 19$ m

$sen\ 70° = \dfrac{b}{30} \;\rightarrow\; b = 30 \cdot sen\ 70° = 28{,}19$ m

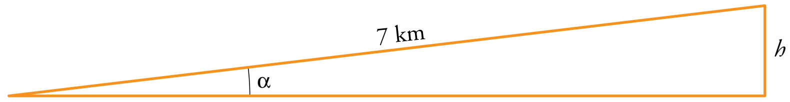
La profundidad es:

$20 + a + b = 20 + 19 + 28{,}19 = 67{,}19$ m

28 **Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?**



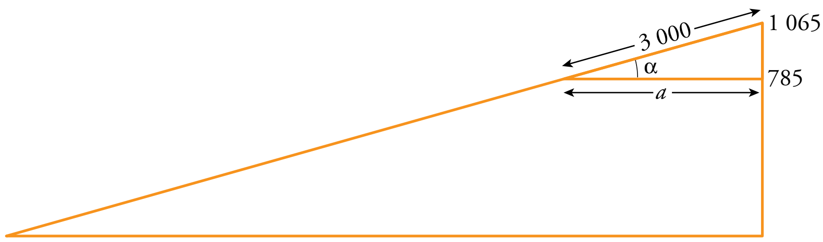
$tg\,\alpha = \dfrac{12}{100} = 0{,}12 \;\rightarrow\; \alpha = 6{,}84° = 6°\ 50'\ 34''$



Si h son los metros que hemos descendido: $sen\,\alpha = \dfrac{h}{7\,000}$

$h = 7\,000\ sen\,(6°\ 50'\ 34'') = 834$ m $\rightarrow$ Hemos descendido 834 m.

29 **En una ruta de montaña una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1 065 m. Halla la pendiente media de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.**



$sen\,\alpha = \dfrac{1\,065 - 785}{3\,000} = 0{,}093 \;\rightarrow\; \alpha = 5{,}35° = 5°\ 21'\ 19''$

$cos\,\alpha = \dfrac{a}{3\,000} \;\rightarrow\; a = cos\,5{,}35° \cdot 3\,000 = 2\,986{,}9$ m

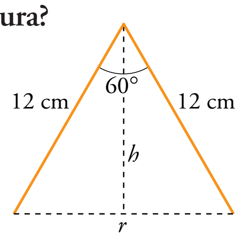
Pendiente: $\dfrac{1\,065 - 785}{2\,986{,}9} = \dfrac{x}{100} \;\rightarrow\; x = 9{,}37$

La pendiente es del 9,37%.

30 **Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 60°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?**

$sen\,30° = \dfrac{r/2}{12} \;\rightarrow\; \dfrac{r}{2} = 12 \cdot sen\,30° \;\rightarrow\; r = 12$ cm

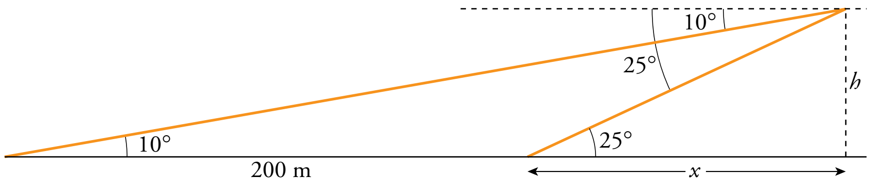
El radio de la circunferencia que puede trazarse es de 12 cm.



31 **Calcula la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas:**

- **El ángulo que forma la visual hacia la luz con la línea de horizonte es de 25°.**
- **Nos alejamos 200 metros y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10°.**

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 25° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] tg\ 10° = \dfrac{h}{200 + x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}46 = \dfrac{h}{x} \\[2ex] 0{,}17 = \dfrac{h}{200 + x} \end{array}$$



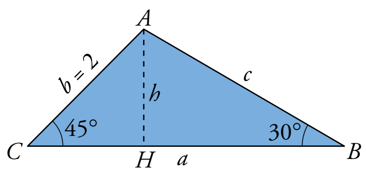
$$\left.\begin{array}{l} h = 0{,}46x \\ 34 + 0{,}17x = h \end{array}\right\} 0{,}46x = 34 + 0{,}17x \;\rightarrow\; 0{,}29x = 34 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x = \frac{34}{0{,}29} = 117{,}24 \text{ m}$$

$h = 0{,}46 \cdot 117{,}24 = 53{,}93$ m

La altura de la luz del faro es de 53,93 m.

32 **Resuelve el siguiente triángulo** ABC**; es decir, averigua las medidas de sus elementos desconocidos. Empieza por trazar la altura** AH**.**



$\hat{A} = 180° - 45° - 30° = 105°$

$$cos\ \hat{C} = \frac{\overline{CH}}{2} \;\rightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{CH}}{2} \;\rightarrow\; \overline{CH} = \sqrt{2}$$

$$tg\ 45° = \frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} \;\rightarrow\; 1 = \frac{\overline{AH}}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; \overline{AH} = \sqrt{2}$$

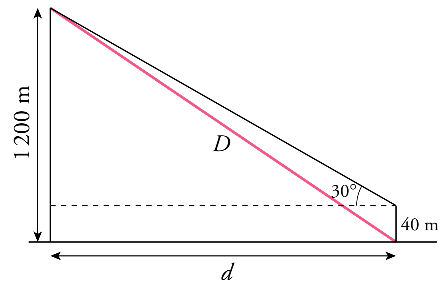
$$sen\ 30° = \frac{\overline{AH}}{c} \;\rightarrow\; \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{c} \;\rightarrow\; c = 2\sqrt{2}$$

$$cos\ 30° = \frac{\overline{HB}}{c} \;\rightarrow\; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{HB}}{2\sqrt{2}} \;\rightarrow\; \overline{HB} = \sqrt{6}$$

$$\text{Elementos del triángulo:} \left\{\begin{array}{l} \text{Ángulos:} \left\{\begin{array}{l} \hat{A} = 105° \\ \hat{B} = 30° \\ \hat{C} = 45° \end{array}\right. \\[4ex] \text{Lados:} \left\{\begin{array}{l} a = \sqrt{6} + \sqrt{2} \approx 3{,}9 \\ b = 2 \\ c = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

33 **Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de 1 200 metros y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30°.**

¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si esta mide 40 m de altura?



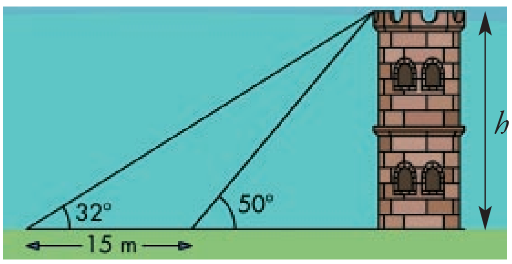
$$tg\ 30° = \frac{1\,200 - 40}{d} \quad \to \quad d = \frac{1\,160}{tg\ 30°} = 2\,009{,}2 \text{ m}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$D = \sqrt{(1\,200)^2 + (2\,009{,}2)^2} = 2\,340{,}3 \text{ m}$$

La distancia del avión al pie de la torre es de 2 340,3 m.

34 **Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal. Si me acerco 15 m, el ángulo es de 50°. ¿Cuál es la altura de la torre?**



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 32° = \dfrac{h}{15 + x} \\ tg\ 50° = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0{,}62 = \dfrac{h}{15 + x} \\ 1{,}19 = \dfrac{h}{x} \end{array}$$

$h = 9{,}3 + 0{,}62x$

$h = 1{,}19x$

$9{,}3 + 0{,}62x = 1{,}19x \quad \to \quad 9{,}3 = 0{,}57x$

$x = 16{,}31$

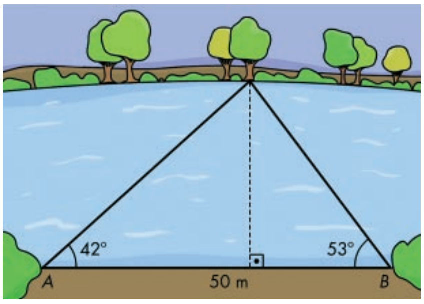
$h = 16{,}31 \cdot 1{,}19 = 19{,}4$

La altura de la torre es de 19,4 m.

Página 193

35 **Observa las medidas que ha tomado Juan para calcular la anchura del río.**

Realiza los cálculos que ha de hacer Juan para hallar la anchura del río.



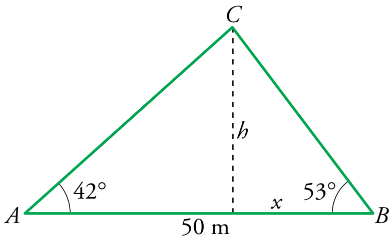
$$\left.\begin{array}{l} tg\,53° = \dfrac{h}{x} \\ tg\,42° = \dfrac{h}{50-x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1{,}32 = \dfrac{h}{x} \;\rightarrow\; h = 1{,}32x \\ 0{,}9 = \dfrac{h}{50-x} \;\rightarrow\; h = 45 - 0{,}9x \end{array}$$

$1{,}32x = 45 - 0{,}9x \;\rightarrow\; 2{,}22x = 45 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = \dfrac{45}{2{,}22} = 20{,}27$ m

$h = 1{,}32 \cdot 20{,}27 = 26{,}75$

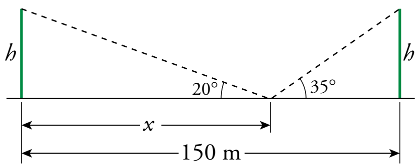
La anchura del río es de 26,75 m.



36 **Dos edificios distan entre sí 150 metros. Desde un punto que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°. ¿Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo?**

$tg\,20° = \dfrac{h}{x} \;\rightarrow\; 0{,}36 = \dfrac{h}{x}$

$tg\,35° = \dfrac{h}{150-x} \;\rightarrow\; 0{,}7 = \dfrac{h}{150-x}$



$$\left.\begin{array}{l} h = 0{,}36x \\ 105 - 0{,}7x = h \end{array}\right\} 105 - 0{,}7x = 0{,}36x \;\rightarrow\; 1{,}06x = 105 \;\rightarrow\; x = 99{,}05 \text{ m}$$

$h = 0{,}36 \cdot 99{,}05 = 35{,}66$ m

La altura de los dos edificios es de 35,66 m.

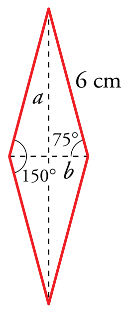
37 **Calcula el área de un rombo cuyo lado mide 6 cm y uno de sus ángulos, 150°.**

$sen\,75° = \dfrac{a}{6} \;\rightarrow\; a = 6 \cdot sen\,75° \approx 5{,}8$ cm

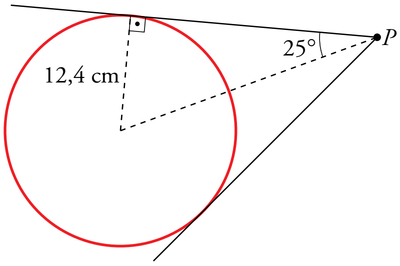
$cos\,75° = \dfrac{b}{6} \;\rightarrow\; b = 6 \cdot cos\,75° \approx 1{,}55$ cm

$\text{Área} = \dfrac{2a \cdot 2b}{2} = 2ab = 2 \cdot 5{,}8 \cdot 1{,}55 = 17{,}98 \approx 18$

El área del rombo es de 18 cm^2



38 **Las tangentes a una circunferencia de centro O, trazadas desde un punto exterior P, forman un ángulo de 50°. Halla la distancia PO sabiendo que el radio de la circunferencia es 12,4 cm.**

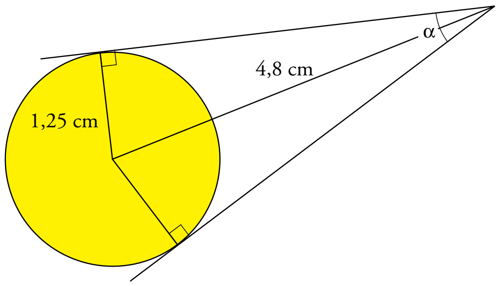


$$sen\ 25° = \frac{12{,}4}{\overline{OP}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{OP} = \frac{12{,}4}{sen\ 25°} \approx 29{,}3 \text{ cm}$$

La distancia de P a O es de 29,3 cm.

39 **El diámetro de una moneda de 2 € mide 2,5 cm. Averigua el ángulo que forman sus tangentes trazadas desde una distancia de 4,8 cm del centro, como indica la figura.**



$$sen\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1{,}25}{4{,}8} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 15{,}09° = 15°\ 5'\ 41''$$

$\alpha = 30{,}19° = 30°\ 11'\ 22''$

40 **Calcula los valores de x, y, z, t en la siguiente figura:**

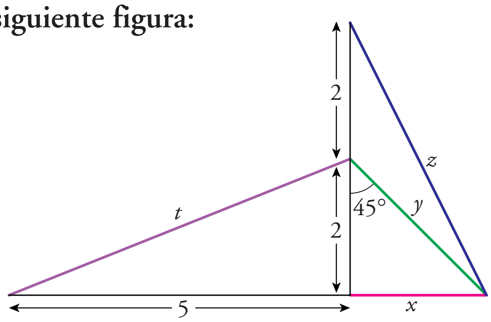
$$tg\ 45° = \frac{x}{2} \rightarrow 1 = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2$$

$$y = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$$

$$t = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}38$$

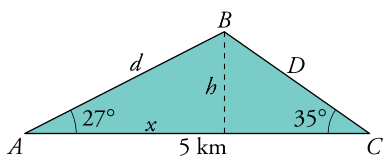
$$z = \sqrt{(2+2)^2 + x^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} =$$

$$= \sqrt{20} \rightarrow z = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$$



41 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

42 **En dos comisarías de policía, A y C, se escucha la alarma de un banco B. Con los datos de la figura, calcula la distancia del banco a cada una de las comisarías.**



$tg\ 27° = \frac{h}{x} \rightarrow 0,51 = \frac{h}{x} \rightarrow h = 0,51x$

$tg\ 35° = \frac{h}{5-x} \rightarrow 0,7 = \frac{h}{5-x} \rightarrow 3,5 - 0,7x = h$

$0,51x = 3,5 - 0,7x \rightarrow 1,21x = 3,5 \rightarrow x = 2,89$ km

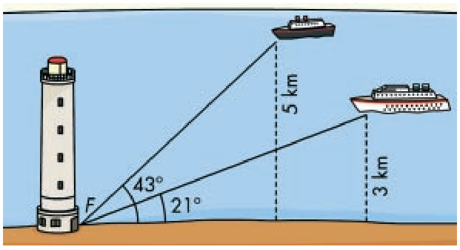
$h = 0,51 \cdot 2,89 = 1,47$ km

$sen\ 27° = \frac{h}{d} \rightarrow d = \frac{1,47}{sen\ 27°} = 3,23$ km

$sen\ 35° = \frac{h}{D} \rightarrow D = \frac{1,47}{sen\ 35°} = 2,56$ km

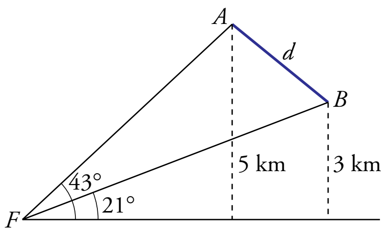
Página 194

43 **Desde el faro F se observa el barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y el barco B, bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5 km de la costa y el B a 3 km.**



Calcula la distancia entre los barcos.

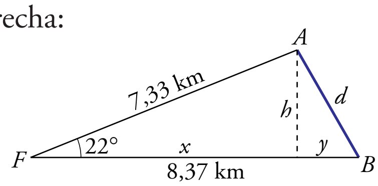
Calculamos $\overline{FA}$ y $\overline{FB}$:



$sen\ 43° = \frac{5}{\overline{FA}} \rightarrow \overline{FA} = \frac{5}{sen\ 43°} = 7,33$ km

$sen\ 21° = \frac{3}{\overline{FB}} \rightarrow \overline{FB} = \frac{3}{sen\ 21°} = 8,37$ km

Para calcular d utilizamos el triángulo de la derecha:



$sen\ 22° = \frac{5}{7,33}$

$h = 7,33 \cdot sen\ 22° = 2,74$ km

$cos\ 22° = \frac{x}{7,33} \rightarrow x = 7,33 \cdot cos\ 22° = 6,8$ km

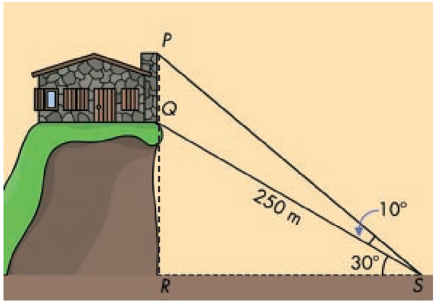
$y = 8,37 - x \rightarrow y = 8,37 - 6,8 = 1,57$ km

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$d = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{2,74^2 + 1,57^2} = 3,16$ km

La distancia entre A y B es de 3,16 km.

44 **Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.**



Calculamos $\overline{SR}$ y $\overline{RQ}$ con el triángulo SQR:

$$cos\ 30° = \frac{\overline{SR}}{250} \rightarrow \overline{SR} = 250 \cdot cos\ 30° \approx 216{,}5 \text{ m}$$

$$sen\ 30° = \frac{\overline{RQ}}{250} \rightarrow \overline{RQ} = 250 \cdot sen\ 30° = 125 \text{ m}$$

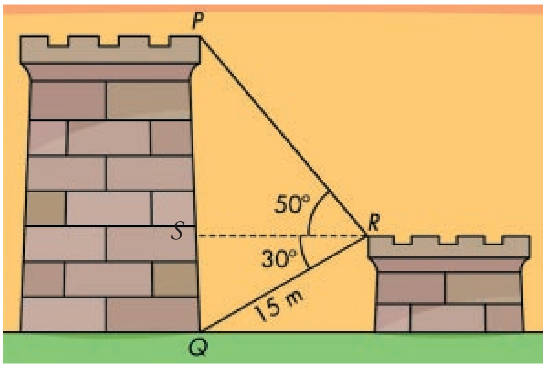
Calculamos $\overline{RP}$ con el triángulo SPR:

$$tg\ 40° = \frac{\overline{RP}}{\overline{SR}} \rightarrow \overline{RP} = 216{,}5 \cdot tg\ 40° \approx 181{,}66 \text{ m}$$

Luego, $\overline{PQ} = \overline{RP} - \overline{RQ} = 181{,}66 - 125 = 56{,}66$ m.

La altura del edificio es de 56,66 m.

45 **Si $\overline{QR}$ = 15 m, ¿cuál es la altura de la torre, $\overline{PQ}$?**



Calculamos $\overline{SR}$ y $\overline{SQ}$ con el triángulo RSQ:

$$cos\ 30° = \frac{\overline{SR}}{15} \rightarrow \overline{SR} = 15 \cdot cos\ 30° = 13 \text{ m}$$

$$sen\ 30° = \frac{\overline{SQ}}{15} \rightarrow \overline{SQ} = 15 \cdot sen\ 30° = 7{,}5 \text{ m}$$

Calculamos $\overline{SP}$ con el triángulo RPS:

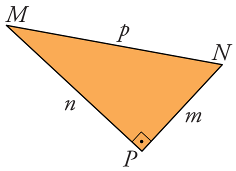
$$tg\ 50° = \frac{\overline{SP}}{\overline{SR}} \rightarrow \overline{SP} = 13 \cdot tg\ 50° = 15{,}5 \text{ m}$$

Entonces: $\overline{PQ} = \overline{SP} + \overline{SQ} = 15{,}5 + 7{,}5 = 23$ m

La altura de la torre es de 23 m.

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

46 **Observa el triángulo rectángulo MPN, y en las siguientes igualdades, sustituye los puntos suspensivos por *sen*, *cos* o *tg*.**



a) … $\hat{M} = \frac{m}{p}$ b) … $\hat{N} = \frac{m}{p}$ c) … $\hat{M} = \frac{m}{n}$

d) … $\hat{N} = \frac{n}{p}$ e) … $\hat{N} = \frac{n}{m}$ f) … $\hat{M} = \frac{n}{p}$

a) $sen\ \hat{M} = \frac{m}{p}$ b) $cos\ \hat{N} = \frac{m}{p}$ c) $tg\ \hat{M} = \frac{m}{n}$

d) $sen\ \hat{N} = \frac{n}{p}$ e) $tg\ \hat{N} = \frac{n}{m}$ f) $cos\ \hat{M} = \frac{n}{p}$

47 **¿Existe algún ángulo α tal que $sen\ \alpha = \frac{3}{5}$ y $tg\ \alpha = \frac{1}{4}$?**

Si $sen\ \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow cos\ \alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$

Tomamos el resultado positivo $\rightarrow cos\ \alpha = \frac{4}{5}$

Entonces $tg\ \alpha = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{4}$

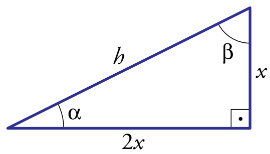
No existe un ángulo α tal que $sen\ \alpha = \frac{3}{5}$ y $tg\ \alpha = \frac{1}{4}$.

48 **En un triángulo rectángulo uno de los catetos mide el doble que el otro.**

a) Llama x al cateto menor y expresa en función de x el otro cateto y la hipotenusa.

b) Halla las razones trigonométricas del ángulo menor.

c) ¿Cuánto miden los ángulos de ese triángulo?



a) $x \rightarrow$ cateto menor

$2x \rightarrow$ cateto mayor

Hipotenusa: $h = \sqrt{x^2 + (2x^2)} = \sqrt{5x^2} \rightarrow h = x\sqrt{5}$

b) $sen\ \alpha = \frac{x}{x\sqrt{5}} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$cos\ \alpha = \frac{2x}{x\sqrt{5}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$tg\ \alpha = \frac{x}{2x} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{1}{2}$

c) $tg\ \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26°\ 33'\ 54''$; $\beta = 90° - 26{,}56° = 63{,}43° = 63°\ 26'\ 6''$

49 **El seno de un ángulo α es igual a la mitad de su coseno. Calcula *sen* α, *cos* α y *tg* α.**

$$sen\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{2} \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26°\ 33'\ 54''$$

$$2\ sen\ \alpha = cos\ \alpha$$

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow (sen\ \alpha)^2 + (2\ sen\ \alpha)^2 = 1$$

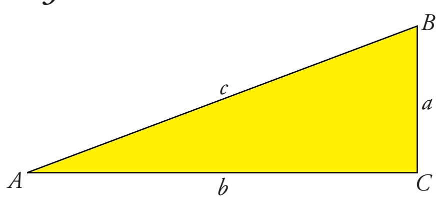
$$5\,(sen\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Tomamos el resultado positivo:

$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5};\quad tg\ \alpha = \frac{1}{2}$$

50 **En el triángulo rectángulo *ABC*, *sen* $\hat{A} = \frac{1}{3}$. ¿Cuánto valen las siguientes relaciones entre sus lados?**

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b},\ \frac{c}{a}$$



Si $sen\ \hat{A} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{3}$

$$cos\ \hat{A} = \frac{b}{c}$$

$$cos\ \hat{A} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Tomamos la parte positiva: $cos\ \hat{A} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$tg\ \hat{A} = \frac{a}{b};\ tg\ \hat{A} = \frac{sen\ \hat{A}}{cos\ \hat{A}} = \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{sen\ \hat{A}} \rightarrow \frac{c}{a} = 3$$

51 **Usando las relaciones fundamentales, simplifica:**

$$(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 + (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2$$

$$(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 + (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 = (sen\ \alpha)^2 + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + (cos\ \alpha)^2 +$$
$$+ (sen\ \alpha)^2 - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + (cos\ \alpha)^2 = 1 + 1 = 2$$

Página 195

52 Usando las relaciones fundamentales, demuestra que:

a) $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{sen\ \alpha} = 1$ **b)** $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

c) $1 + (tg\ \alpha)^2 = \dfrac{1}{(cos\ \alpha)^2}$

a) $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{sen\ \alpha} = 1$

Sacamos factor común $sen\ \alpha$:

$$\frac{sen\ \alpha\ [(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2]}{sen\ \alpha} = (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$$

b) $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

Sacamos factor común $sen\ \alpha$:

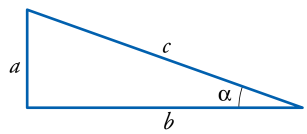
$$\frac{sen\ \alpha\ [(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2]}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha \cdot 1}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$$

c) $1 + (tg\ \alpha)^2 = \dfrac{1}{(cos\ \alpha)^2}$

Usando la igualdad $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$:

$$1 + (tg\ \alpha)^2 = 1 + \left(\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}\right)^2 = \frac{(cos\ \alpha)^2 + (sen\ \alpha)^2}{(cos\ \alpha)^2} = \frac{1}{(cos\ \alpha)^2}$$

53 ¿Puede existir un ángulo cuyo seno sea igual a 2? ¿Y uno cuyo coseno sea igual a 3/2? Razona las respuestas.



No puede ocurrir ninguna de las dos cosas.

En un triángulo rectángulo lo vemos claramente:

Sabemos que la hipotenusa es mayor que cualquiera de los dos catetos, es decir:

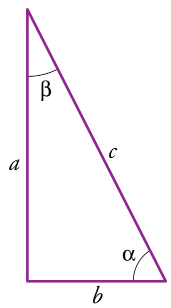
$c > a$ y $c > b$, como $sen\ \alpha = \dfrac{a}{c}$ y $cos\ \alpha = \dfrac{b}{c}$, entonces:

si $c > a \ \rightarrow\ \dfrac{a}{c} = sen\ \alpha < 1$

si $c > b \ \rightarrow\ \dfrac{b}{c} = cos\ \alpha < 1$

Y esto pasa para cualquier triángulo rectángulo.

54 **Dibuja un triángulo rectángulo en el que la tangente de uno de sus ángulos agudos valga dos. ¿Cuánto vale la tangente del otro ángulo agudo?**



$tg\,\alpha = 2 \;\rightarrow\; \alpha = 63°\ 26'\ 5{,}82''$; $\beta = 90° - \alpha$

$tg\,\beta = \dfrac{sen\,\beta}{cos\,\beta}$

$sen\,\alpha = \dfrac{a}{c} \qquad sen\,\beta = \dfrac{b}{c}$

$cos\,\alpha = \dfrac{b}{c} \qquad cos\,\beta = \dfrac{a}{c}$

$$\left.\begin{array}{l} sen\,(90° - \alpha) = cos\,\alpha \\ cos\,(90° - \alpha) = sen\,\alpha \end{array}\right\}\; tg\,\beta = \frac{sen\,\beta}{cos\,\beta} = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{1}{2}$$

La tangente del otro ángulo, β, vale $tg\,\beta = \dfrac{1}{2}$.

55 **Indica, en cada caso, en qué cuadrante está el ángulo α:**

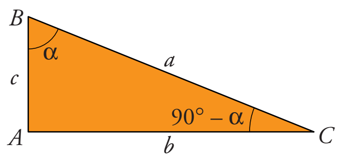
a) $sen\,\alpha > 0,\ cos\,\alpha < 0$ b) $sen\,\alpha < 0,\ cos\,\alpha > 0$

c) $tg\,\alpha > 0,\ sen\,\alpha < 0$ d) $tg\,\alpha > 0,\ sen\,\alpha > 0$

a) 2º cuadrante b) 4º cuadrante c) 3^er^ cuadrante d) 1^er^ cuadrante

PROFUNDIZA

56 **Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se llaman complementarios porque su suma es un recto. ¿Cómo se podrían calcular las razones trigonométricas de un ángulo si conocemos las de su complementario? Observa la figura, completa la tabla y expresa simbólicamente lo que obtienes:**



	α	$90° - \alpha$
sen	b/a	c/a
cos	c/a	b/a
tg	b/c	c/b

$sen\,(90° - \alpha) = cos\,\alpha$

$cos\,(90° - \alpha) = sen\,\alpha$

$tg\,(90° - \alpha) = \dfrac{1}{tg\,\alpha}$

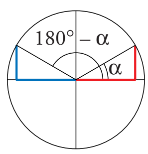
57 **Sobre la circunferencia goniométrica señalamos un ángulo α en el primer cuadrante y a partir de él dibujamos los ángulos $180° - \alpha$; $180° + \alpha$; $360° - \alpha$**

Busca la relación que existe entre:

a) $sen\,(180° - \alpha)$ y $sen\,\alpha$

$cos\,(180° - \alpha)$ y $cos\,\alpha$

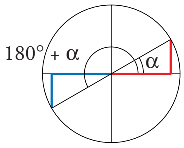
$tg\,(180° - \alpha)$ y $tg\,\alpha$



b) ***sen*** **(180° + α) y** ***sen*** **α**

cos **(180° + α) y** ***cos*** **α**

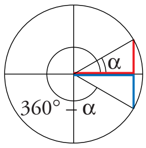
tg **(180° + α) y** ***tg*** **α**



c) ***sen*** **(360° – α) y** ***sen*** **α**

cos **(360° – α) y** ***cos*** **α**

tg **(360° – α) y** ***tg*** **α**



a) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha$

$cos\ (180° - \alpha) = -\ cos\ \alpha$

$tg\ (180° - \alpha) = -\ tg\ \alpha$

b) $sen\ (180° + \alpha) = -\ sen\ \alpha$

$cos\ (180° + \alpha) = -\ cos\ \alpha$

$tg\ (180° + \alpha) = tg\ \alpha$

c) $sen\ (360° - \alpha) = -\ sen\ \alpha$

$cos\ (360° - \alpha) = cos\ \alpha$

$tg\ (360° - \alpha) = -\ tg\ \alpha$

58 **Con ayuda de la calculadora, halla dos ángulos comprendidos entre 0° y 360° tales que:**

a) Su seno sea 0,7.

b) Su coseno sea 0,54.

c) Su tangente sea 1,5.

d) Su seno sea –0,3.

e) Su coseno sea –2/3.

f) Su tangente sea –2.

a) $sen\ \alpha = 0{,}7 \ \rightarrow\ \alpha = 44°\ 25'\ 37''$

$\beta = 180° - \alpha = 135°\ 34'\ 22''$

b) $cos\ \alpha = 0{,}54 \ \rightarrow\ \alpha = 57°\ 18'\ 59''$

$\beta = -\alpha = -57°\ 18'\ 59'' = 302°\ 41'\ 1''$

c) $tg\ \alpha = 1{,}5 \ \rightarrow\ \alpha = 56°\ 18'\ 35''$

$\beta = 180° + \alpha = 236°\ 18'\ 35''$

d) $sen\ \alpha = -0{,}3 \ \rightarrow\ \alpha = -17°\ 27'\ 27'' = 342°\ 32'\ 32''$

$\beta = 180° - \alpha = 197°\ 27'\ 27''$

e) $cos\ \alpha = -\dfrac{2}{3} \ \rightarrow\ \alpha = 131°\ 48'\ 37''$

$\beta = 360° - \alpha = 228°\ 11'\ 23''$

f) $tg\ \alpha = -2 \ \rightarrow\ \alpha = -63°\ 26'\ 6'' = 296°\ 33'\ 54''$

$\beta = 180° + \alpha = 116°\ 33'\ 54''$

59 **Recuerda las razones de 30°, 45° y 60° y completa la tabla sin usar la calculadora:**

	120°	135°	150°	210°	225°	240°	315°	330°
sen	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$
cos	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
tg	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$

60 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

61 **Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que $0° \leq x \leq 360°$.**

a) $(sen\ x)^2 - sen\ x = 0$

b) $2(cos\ x)^2 - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$

c) $3\ tg\ x + 3 = 0$

d) $4(sen\ x)^2 - 1 = 0$

e) $2(cos\ x)^2 - cos\ x - 1 = 0$

a) $(sen\ x)^2 - sen\ x = 0$

$$sen\ x(sen\ x - 1) = 0 \begin{cases} sen\ x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 180° \end{cases} \\ sen\ x = 1 \ \rightarrow\ x = 90° \end{cases}$$

b) $2(cos\ x)^2 - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$

$$cos\ x(2\ cos\ x - \sqrt{3}) = 0 \begin{cases} cos\ x = 0 \begin{cases} x = 90° \\ x = 270° \end{cases} \\ cos\ x = \sqrt{3}/2 \begin{cases} x = 30 \\ x = 330° \end{cases} \end{cases}$$

c) $3\ tg\ x + 3 = 0 \ \rightarrow\ tg\ x = -1 \begin{cases} x = 135° \\ x = 315° \end{cases}$

d) $$4(sen\ x)^2 - 1 = 0 \ \rightarrow\ (sen\ x)^2 = \frac{1}{4} \begin{cases} sen\ x = \dfrac{1}{2} \begin{cases} x = 30° \\ x = 150° \end{cases} \\ sen\ x = -\dfrac{1}{2} \begin{cases} x = 210° \\ x = 330° \end{cases} \end{cases}$$

e) $2(cos\ x)^2 - cos\ x - 1 = 0$

$$cos\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} cos\ x = 1 \ \rightarrow\ x = 0° \\ cos\ x = -\dfrac{1}{2} \begin{cases} x = 120° \\ x = 240° \end{cases} \end{cases}$$