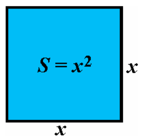
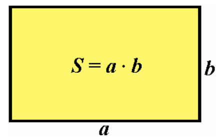
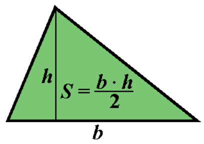
EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS.







Estas expresiones del área son *expresiones algebraicas,* ya que además de números aparecen letras. Son también expresiones algebraicas:

$$3bac, \quad 5x^2ty + 2xy, \quad 7\sqrt{xy} + z^3, \quad \frac{x^2 - 3y}{a + b}$$

> Llamamos ***expresión algebraica*** a toda combinación de letras y números ligados por los signos de las operaciones aritméticas. Cada una de las letras se llama ***variable.***

Al escribir expresiones algebraicas se debe tener en cuenta lo siguiente:

- El signo de multiplicación (×, ·) no suele ponerse entre los números y las letras, ni entre las letras.

$$21 \cdot a^2 \cdot y^3 \text{ se escribe ordinariamente así: } 21a^2y^3$$

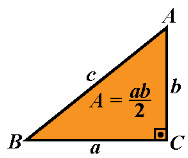
- El signo + o − que precede a una letra es un signo de operación; no indica que el valor que toma la letra sea positivo o negativo.
- Si el uno actúa como factor, divisor o exponente, se escribe el resultado.

$$1 \cdot a^3b, \ \frac{a^2x^3}{1}, \ 3x^1b^4, \text{ operando se escriben así: } a^3b, \ a^2x^3, \ 3xb^4$$

> Las letras ***a, b, c, …, x, y, z*** representan números; cuando operamos con ellas es como si operásemos con los números que representan y cumplen idénticas reglas.

1.1. Valor numérico de una expresión algebraica.

El área del triángulo rectángulo *ABC* es: $A = \frac{ab}{2}$



Para hallar el área de un triángulo concreto, por ejemplo, de uno cuyos catetos sean $a = 6$ cm y $b = 8$ cm, se sustituyen en la fórmula las letras *a* y *b* por los números 6 y 8.

Por tanto: $A = \frac{ab}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$, $A = 24 \text{ cm}^2$

El número 24 es el *valor numérico* de la expresión $\frac{ab}{2}$ cuando se sustituye *a* por 6 y *b* por 8.

> Llamamos ***valor numérico*** de una expresión algebraica, para unos valores fijos de las variables, al resultado obtenido al sustituir las variables por estos valores fijos y efectuar las operaciones indicadas.

EJERCICIOS

1. Asocia cada expresión algebraica con su enunciado correspondiente.

a) $x^2 - y^2$	1) El triple de la suma de un número más cuatro.
b) $3x + 4$	2) Suma de tres números pares consecutivos.
c) $10x + y$	3) La diferencia de los cuadrados de dos números.
d) $2x + (2x + 2) + (2x + 4)$	4) Un número de dos cifras.
e) $(x - y)^2$	5) Suma de tres números impares consecutivos.
f) $3(x + 4)$	6) El cuadrado de la diferencia de dos números.
g) $(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5)$	7) El triple de un número más cuatro.

2. Llama x e y a dos números cualesquiera y expresa con ellos cada uno de los siguientes enunciados.
   a) La suma de x y el triple de y.
   b) La diferencia del doble de x menos la mitad de y.
   c) La quinta parte de x es igual que el doble de y menos 4.
   d) El cuadrado de su suma.
   e) El cuadrado de su diferencia.
   f) La suma de sus cuadrados.
   g) La diferencia de sus cuadrados.

3. Determina los valores numéricos de las expresiones siguientes para los valores de las variables que se indican.
   a) $a^2 - b^2$; $a = 1, b = -1$
   b) $\frac{x}{2} + y + z^2$; $x = -4, y = 2, z = -2$
   c) $\frac{2x^2 + xy - 1}{2x + y}$; $x = -1, y = 4$
   d) $2^a + \sqrt{4bc}$; $a = -1, b = 2, c = 18$

2. MONOMIOS.

Un ***monomio*** es una expresión algebraica formada por el producto de un factor numérico, ***a***, y un factor que es la variable elevada a un exponente natural, x^n: ax^n.

- El factor numérico ***a*** se llama ***coeficiente*** del monomio.
- La variable ***x*** recibe también el nombre de ***indeterminada.***
- El exponente natural ***n*** de la variable se llama ***grado*** del monomio.
- La variable con su respectivo exponente, x^n, se llama ***parte literal.***

Dos monomios que tienen la misma parte literal, ax^n y bx^n, reciben el nombre de ***monomios semejantes.***

Ejemplo. Las expresiones algebraicas x^2, $\frac{3}{5}x^2$ y $8x^3$ son monomios.

De éstos, x^2 y $\frac{3}{5}x^2$ son monomios semejantes.

EJERCICIOS

4. Escribe un monomio en la indeterminada x que verifique las condiciones que se expresan en cada uno de los siguientes casos.
   a) De grado 2 y coeficiente –4.
   b) De grado cero y coeficiente 1.
   c) Semejante a $4x^3$ y de coeficiente 3.
   d) De grado 3 y coeficiente 1/3.

2.1. Operaciones con monomios: suma, resta, producto, cociente y potencia.

Dados dos monomios, en general, no pueden sumarse o restarse, en el sentido de que su suma o diferencia sea otro monomio. Para que esto sea posible tienen que ser monomios semejantes.

La **suma** o **diferencia** de monomios semejantes es otro monomio semejante, cuyo coeficiente es la suma o diferencia de los coeficientes.

$$\boldsymbol{ax^n \pm bx^n = (a \pm b)\, x^n}$$

El **producto** de monomios cualesquiera es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y cuya parte literal es el producto de las partes literales, luego su grado es la suma de los grados.

$$ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)(x^n \cdot x^m) = (a \cdot b)\, x^{n+m} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{ax^n \times bx^m = (a \times b)\, x^{n+m}}$$

El **cociente** de dos monomios, cuyo dividendo tiene grado mayor o igual que el del divisor, es otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes y cuya parte literal es el cociente de las partes literales, luego su grado es la diferencia de los grados.

$$ax^n : bx^m = (a : b)(x^n : x^m) = (a : b)\, x^{n-m} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{ax^n : bx^m = (a : b)\, x^{n-m}} \text{ con } \boldsymbol{n \geq m}$$

La **potencia** de exponente un número natural *m* de un monomio es otro monomio cuyo coeficiente es la potencia de exponente *m* del coeficiente y cuya parte literal es la potencia exponente *m* de la parte literal, luego su grado es el producto de su grado por *m*.

$$(ax^n)^m = a^m (x^n)^m = a^m x^{n \cdot m} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{(ax^n)^m = a^m x^{n \times m}}$$

Ejemplo. $8x^4 + 2x^4 - 7x^4 = (8 + 2 - 7)x^4 = 3x^4$

$7x^3 \cdot 5x^6 = (7 \cdot 5)(x^3 \cdot x^6) = 35x^{3+6} = 35x^9$

$14x^7 : 2x^4 = (14 : 2)(x^7 : x^4) = 7x^{7-4} = 7x^3$

$(2x^2)^3 = 2^3(x^2)^3 = 8x^{2\cdot 3} = 8x^6$

EJERCICIOS

5. Calcula las siguientes sumas y restas de monomios semejantes.
   a) $3x^2 - 6x^2 + 9x^2$ b) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x$ c) $3x^2 - (-5x^2)$ d) $\frac{1}{2}x^2 + x^2 - \frac{1}{3}x^2$
6. Haz los siguientes productos e indica el grado del resultado.
   a) $2x(-x^3)$ b) $-\frac{1}{4}x\left(-\frac{1}{4}x^3\right)x^2$ c) $5x\left(-\frac{1}{3}x^3\right)6x$ d) $\left(-\frac{1}{4}x\right)\left(-\frac{1}{4}x^3\right)x^2$
7. Halla los siguientes cocientes.
   a) $25x^5 : (-5x^2)$ b) $\frac{3}{5}x^6 : \frac{2}{4}x$ c) $\frac{3}{2}x^3 : 3x^2$ d) $\left(-\frac{1}{2}x^3\right) : \left(-\frac{1}{4}x^3\right)$
8. Realiza las siguientes potencias de monomios.
   a) $(x^2)^2$ b) $(2x)^3$ c) $(-2x)^3$ d) $(5x^2)^4$ e) $(-5x^2)^4$ f) $(3x^5)^3$

3. POLINOMIOS.

Cuando queremos sumar o restar monomios no semejantes, no podemos realizar dichas operaciones y debemos dejar el resultado indicado. A estas sumas o diferencias de monomios las llamamos *polinomios.*

Así, por ejemplo, tenemos el polinomio $9x^3 + 8x^2 + 6x + 12 + x^3 - x - 7x^2 - 10x^3$. Como vemos, un polinomio puede tener monomios semejantes, pero si sumamos todos los monomios semejantes se obtiene el polinomio $x^2 + 5x + 12$, que es la *forma reducida* del polinomio dado.

Un ***polinomio en la indeterminada x*** es una expresión algebraica formada por la suma o diferencia de dos o más monomios en la misma indeterminada.

- ***Término*** de un polinomio es cada uno de los monomios que lo forman. Al monomio de grado cero se le llama ***término independiente*** del polinomio. Así, *binomio* es un polinomio de dos términos y *trinomio* un polinomio de tres términos, en los demás casos se dice un polinomio de tantos términos.
- El ***grado*** de un polinomio es el mayor de los grados de los términos que lo forman.
- Un polinomio es ***completo*** cuando tiene todos los términos desde el término de grado cero hasta el término de mayor grado.
- Un polinomio está ***ordenado*** cuando los grados de los términos van creciendo o decreciendo. Normalmente se ordenan los grados de mayor a menor.

Los polinomios se designan por $A(x)$, $B(x)$, etc. indicando entre paréntesis la indeterminada. Así, son polinomios las siguientes expresiones:

Polinomio	Nº de términos	Término indep.	Grado	Completo	Ordenado
$A(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 1$	4	-1	4	No	Sí
$B(x) = 2 - 5x^2 + 4x$	3 (trinomio)	2	2	Sí	No
$C(x) = 3x - 7$	2 (binomio)	-7	1	Sí	Sí

3.1. Valor numérico de un polinomio.

Valor numérico de un polinomio ***P(x)*** para un valor de la indeterminada ***x = a,*** es el resultado obtenido de sustituir x por a y efectuar las operaciones indicadas. Lo denotamos por ***P(a).***

Ejemplo. El valor numérico del polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$ para $x = 7$ es $P(7) = 2 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 4 = 837$

Obsérvese que el valor numérico de cualquier polinomio para $x = 0$ es su término independiente. Así, por ejemplo:

$$P(0) = 2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

EJERCICIOS

9. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios, para los valores que se indican.

a) $P(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$ para $x = 0$, $x = 1$ y $x = -2$

b) $Q(x) = 3x^3 - 6x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ para $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1/2$

3.2. Operaciones con polinomios: suma, resta, producto y potencia.

- La **suma** o **diferencia** de polinomios se reduce a sumar o restar sus monomios semejantes.

  Dados los polinomios A(x) = $x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ y B(x) = $-x^4 + 8x^2 + 7x + 2$, calculamos A(x) + B(x) poniendo uno debajo del otro de modo que queden en columna los monomios semejantes; después, los sumamos:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{A}(x) = & \quad x^3 - 2x^2 - 7x - 4 \\ \mathrm{B}(x) = & -x^4 \quad\; + 8x^2 + 7x + 2 \\ \hline \mathrm{A}(x) + \mathrm{B}(x) = & -x^4 + x^3 + 6x^2 \qquad -2 \end{array}$$

  Para restar dos polinomios se suma al polinomio minuendo el polinomio opuesto del sustraendo.

  Polinomio opuesto de uno dado es el que tiene las mismas partes literales y los respectivos coeficientes opuestos a los del dado. Si B(x) = $-x^4 + 8x^2 + 7x + 2$, su polinomio opuesto es $-$B(x) = $x^4 - 8x^2 - 7x - 2$.

  Análogamente calculamos A(x) – B(x) = A(x) + [–B(x)]:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{A}(x) = & \quad x^3 - 2x^2 - 7x - 4 \\ -\mathrm{B}(x) = & x^4 \quad\; - 8x^2 - 7x - 2 \\ \hline \mathrm{A}(x) - \mathrm{B}(x) = & x^4 + x^3 - 10x^2 - 14x - 6 \end{array}$$

  En la práctica, es más cómodo reducir términos semejantes. Para ello basta aplicar la regla de los signos de la suma y la suma o diferencia de monomios semejantes. Lo primero que se hace es quitar paréntesis; si va precedido del signo más, se conservan los signos de los términos del polinomio, y si va precedido del signo menos, se cambian los signos de los términos del polinomio.

  Hallamos de nuevo A(x) + B(x) y A(x) – B(x) de esta forma:

$$(x^3 - 2x^2 - 7x - 4) + (-x^4 + 8x^2 + 7x + 2) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4 - x^4 + 8x^2 + 7x + 2 = -x^4 + x^3 + 6x^2 - 2$$

$$(x^3 - 2x^2 - 7x - 4) - (-x^4 + 8x^2 + 7x + 2) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4 + x^4 - 8x^2 - 7x - 2 = x^4 + x^3 - 10x^2 - 14x - 6$$

- Para **multiplicar** dos polinomios se multiplican todos los monomios del primero por cada uno de los del segundo, o viceversa, y se reducen los términos semejantes.

  Dados los polinomios A(x) = $x^3 + 2x^2 - x + 2$ y B(x) = $4x - 2$, calculamos A(x) · B(x):

$$\begin{array}{rr} \mathrm{A}(x) = & x^3 + 2x^2 - x + 2 \\ \times\ \mathrm{B}(x) = & 4x - 2 \\ \hline & -2x^3 - 4x^2 + 2x - 4 \\ & 4x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 8x \quad\; \\ \hline \mathrm{A}(x)\cdot \mathrm{B}(x) = & 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 10x - 4 \end{array}$$

  El producto de polinomios se basa en la propiedad distributiva y en el producto de monomios. En la práctica, se hace así:

$$(x^3 + 2x^2 - x + 2) \cdot (4x - 2) = x^3(4x - 2) + 2x^2(4x - 2) - x(4x - 2) + 2(4x - 2) =$$
$$= 4x^4 - 2x^3 + 8x^3 - 4x^2 - 4x^2 + 2x + 8x - 4 = 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 10x - 4$$

- La **potencia,** $[A(x)]^n$**,** de base un **polinomio** $A(x)$ y exponente un **número natural** n se define por:

$$[A(x)]^n = \overbrace{A(x) \times A(x) \times \cdots \times A(x)}^{(n \text{ veces})}$$

  Dado el polinomio A(x) = $2x - 3$, calculamos $[\mathrm{A}(x)]^3$:

$$[\mathrm{A}(x)]^3 = \mathrm{A}(x) \cdot \mathrm{A}(x) \cdot \mathrm{A}(x) = [\mathrm{A}(x) \cdot \mathrm{A}(x)] \cdot \mathrm{A}(x) = [(2x - 3) \cdot (2x - 3)] \cdot (2x - 3) = (4x^2 - 12x + 9) \cdot (2x - 3) =$$
$$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

EJERCICIOS

10. Dados los polinomios $A(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1$, $B(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x$ y $C(x) = -x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, realiza las siguientes operaciones.
    a) $A(x) - [B(x) + C(x)]$ b) $A(x) - B(x) + C(x)$ c) $A(x) - B(x) - C(x)$
11. Aplica las reglas para eliminar paréntesis y halla la forma reducida de cada polinomio.
    a) $4x + (2x + 8) - (-5x^2 - 3x)$
    b) $(4x^3 - 2x^2 + x + 1) - (3x^3 - x^2 - x + 7) + (x^3 - 4x^2 + 2x - 8)$
    c) $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + x - \frac{1}{8}\right) - \left[\left(x^3 - \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}\right)\right]$
12. Considera los polinomios $A(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ y $B(x) = -x^4 + 8x^2 + 7x + 2$.
    a) Calcula la diferencia $C(x) = A(x) - B(x)$.
    b) Comprueba que $A(x) = B(x) + C(x)$.
    c) Halla los valores numéricos A(3), B(3) y C(3) y comprueba que C(3) = A(3) − B(3).
13. Realiza las siguientes multiplicaciones con polinomios.
    a) $(x^2 - 3x + 1)(x + 4)$ b) $(5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x)(2x^3 + 2x + 1)$
    c) $(x^4 - 7x^2 - 3)(x^2 - 3)$ d) $(2x^2 - 4x + 16)(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$
14. Desarrolla las siguientes potencias.
    a) $(3x - 1)^2$ b) $(x + 1)^3$ c) $(-2x + 3)^3$ d) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right)^2$

4. DIVISIÓN DE POLINOMIOS.

4.1. División de un polinomio por un monomio.

Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio. Por tanto, en general, no es posible la división de un polinomio por un monomio. Para que lo sea es necesario que todos los términos del polinomio sean divisibles por el monomio.

Ejemplo. $\frac{12x^3 - 9x^2 + 3x}{3x} = \frac{12x^3}{3x} - \frac{9x^2}{3x} + \frac{3x}{3x} = 4x^2 - 3x + 1$

La división $\frac{x^2 + x + 1}{x^2}$ no es posible: el segundo término y el tercero no se pueden dividir por x2.

> El **cociente de un polinomio por un monomio** (si es posible) es igual a un polinomio cuyos términos se obtienen dividiendo cada término del polinomio por el monomio.

EJERCICIOS

15. Efectúa las siguientes divisiones de polinomios por monomios.
    a) $\frac{6x^3 + 4x^2 - 8x}{2x}$ b) $\frac{4x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x}{-2x}$ c) $\frac{15x^5 - 10x^4 + 5x^2}{5x^2}$ d) $\frac{18x^7 - 12x^5 - 24x^3}{6x^3}$

4.2. División entera de polinomios.

La **división entera** de polinomios sigue el mismo proceso que la división de números enteros.

En el caso de números enteros, dados dos números llamados *dividendo* y *divisor*, podemos encontrar mediante la división otros dos números, llamados *cociente* y *resto*, tales que cumplen $D = d \cdot c + r$ con $r < d$:

$$\begin{array}{r|l} 71 & 9 \\ \cline{2-2} 8 & 7 \end{array} \Rightarrow \quad 71 = 9 \cdot 7 + 8, \text{ con } 8 < 9$$

Lo mismo ocurre con los polinomios:

> La división de dos polinomios, llamados ***dividendo,* D(x),** y ***divisor,* d(x),** consiste en hallar otros dos polinomios llamados ***cociente,* c(x),** y ***resto,* r(x),** que cumplan:
>
> $$\boldsymbol{D(x) = d(x) \times c(x) + r(x)\ ; \quad \text{grado } r(x) < \text{grado } d(x)}$$

Veamos, con el siguiente ejemplo, como se dividen polinomios, siendo los polinomios $D(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 12$ y $d(x) = x^2 - 3x - 5$.

1.º Se ordenan los polinomios según las potencias de x, de mayor a menor. Si el dividendo es incompleto dejamos espacios en blanco correspondientes a los términos que faltan.	$\begin{array}{l\|l} 3x^3 - 2x^2 + 5x - 12 & x^2 - 3x - 5 \\ \cline{2-2} \end{array}$
2.º Hallamos el cociente entre el primer término del dividendo y el primer término del divisor $\rightarrow 3x^3 : x^2 = 3x$	$\begin{array}{l\|l} 3x^3 - 2x^2 + 5x - 12 & x^2 - 3x - 5 \\ \cline{2-2} & 3x \end{array}$
3.º El término hallado del cociente se multiplica por el divisor y el producto se resta del dividendo. Obtenemos así el primer resto parcial.	$\begin{array}{r\|l} 3x^3 - 2x^2 + 5x - 12 & x^2 - 3x - 5 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 9x^2 + 15x \quad\quad & 3x \\ \hline 7x^2 + 20x \quad\quad & \end{array}$
4.º Se baja el siguiente término del dividendo y se divide el primer término del dividendo parcial entre el primer término del divisor. Se continúa el proceso hasta llegar a un resto cuyo grado sea menor que el grado del divisor.	$\begin{array}{r\|l} 3x^3 - 2x^2 + 5x - 12 & x^2 - 3x - 5 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 9x^2 + 15x \quad\quad & 3x + 7 \\ \hline 7x^2 + 20x - 12 & \\ -7x^2 + 21x + 35 & \\ \hline 41x + 23 & \end{array}$

Además, se cumple que el grado cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor. En general:

> $\begin{array}{r\|l} \boldsymbol{D(x)} & \boldsymbol{d(x)} \\ \cline{2-2} \boldsymbol{r(x)} & \boldsymbol{c(x)} \end{array} \Rightarrow$ debe cumplirse:
> **$D(x) = d(x) \times c(x) + r(x)$**
> **grado $r(x)$ < grado $d(x)$**
> **grado $c(x)$ = grado $D(x)$ - grado $d(x)$**

Si el resto es cero, ***r*(*x*) = 0,** se trata de una **división exacta.** En este caso se dice que:

- $D(x)$ es ***divisible*** por $d(x)$ o ***múltiplo*** de $d(x)$;
- $d(x)$ es un ***factor*** de $D(x)$ o un ***divisor*** de $D(x)$.

EJERCICIOS

16. Determina el cociente y el resto de la división $(6x^3 - 5x^2 - 14x - 2) : (2x + 1)$. Comprueba que:
   a) $D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$ b) grado $r(x)$ < grado $d(x)$ c) grado $c(x)$ = grado $D(x)$ − grado $d(x)$

17. Calcula las siguientes divisiones indicando, para cada una de ellas, el cociente y el resto.
   a) $(8x^4 - 4x^2 + 7x) : 2x^2$ b) $(-3x^4 + 3x^2 + 2x - 2) : (x^2 + 2x + 4)$
   c) $(3x^4 - x^3 - 6x^2 + 29x - 9) : (3x - 1)$ d) $(7x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 5x + 3) : (2x^2 - x + 1)$

4.3. División de polinomios por *x* – *a*. Regla de Ruffini.

Uno de los casos más habituales de la división de polinomios es aquel en el que el divisor es el binomio $\boldsymbol{x - a}$, siendo a un número real. Estas divisiones se pueden hacer de la forma habitual vista anteriormente o de forma más rápida y sencilla, usando la *regla de Ruffini,* que utiliza sólo los coeficientes de los polinomios implicados en la división.

Regla de Ruffini:

1.º Se colocan los coeficientes del polinomio dividendo ordenados en forma decreciente (escribiendo ceros en los lugares de los términos que faltan) y el término independiente del divisor cambiado de signo.
2.º El primer coeficiente del cociente es igual al primer coeficiente del dividendo. Cada uno de los demás coeficientes del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente anterior por a y sumando este producto al coeficiente siguiente del dividendo.
3.º El resto es igual al producto del último coeficiente del cociente por a más el término independiente del dividendo.
4.º No debes olvidar que el grado del cociente, en estas divisiones, es una unidad inferior al grado del dividendo: **grado $\boldsymbol{c(x)}$ = grado $\boldsymbol{D(x)}$ - 1.**
Además, el resto de estas divisiones es un polinomio de grado cero, es decir, un número: $\boldsymbol{r(x) = r}$.

Observa la siguiente división, realizada por los dos procedimientos.

División habitual	**Regla de Ruffini**
$\begin{array}{rrrrr\|l} x^4 & & -8x^2 & +3x & -1 & x-2 \\ \cline{6-6} -x^4 & +2x^3 & & & & x^3+2x^2-4x-5 \\ \cline{1-2} & 2x^3 & -8x^2 & & & \\ & -2x^3 & +4x^2 & & & \\ \cline{2-3} & & -4x^2 & +3x & & \\ & & 4x^2 & -8x & & \\ \cline{3-4} & & & -5x & -1 & \\ & & & +5x & -10 & \\ \cline{4-5} & & & & -11 & \end{array}$	$x - a = x - 2 \Rightarrow a = 2$ $\begin{array}{r\|rrrr\|r} & 1 & 0 & -8 & 3 & -1 \\ 2 & & 2 & 4 & -8 & -10 \\ \hline & 1 & 2 & -4 & -5 & -11 \end{array} \leftarrow \text{Resto}$ Cociente: $c(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 5$ Resto: $r = -11$

Ejemplo. Determina k de forma que $4x^3 + 16x^2 + k$ sea divisible por $x + 3$.

El resto de la división $(4x^3 + 16x^2 + k) : (x + 3)$ ha de ser cero. Aplicando la regla de Ruffini, tenemos:

$$\begin{array}{r|rrr|l} & 4 & 16 & 0 & k \\ -3 & & -12 & -12 & 36 \\ \hline & 4 & 4 & -12 & k + 36 = 0 \end{array}$$

De la ecuación $k + 36 = 0$, se deduce que $k = -36$.

EJERCICIOS

18. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^5 - 7x^3 + 16x^2 - 12x) : (x - 1)$

b) $(4x^3 - 3x^2 + 18x - 9) : (x + 2)$

c) $(2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4) : (x + 4)$

d) $(2x^3 - 3x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}) : (x - 2)$

19. Responde a las cuestiones siguientes.

a) Calcula m, para que al dividir $x^3 - 3x^2 - mx + 12$ entre $x - 3$, el resto sea 9.

b) Halla n para que la división $(2x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x - n) : (x - 1)$ sea exacta.

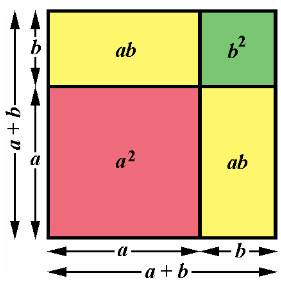
c) Determina el valor de a para que el polinomio $x^3 - ax^2 - ax + 1$ sea divisible por $x - 1$.

d) Halla m y n para que el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + (m - 1)x + n$ cumpla $P(0) = 2$ y que sea divisible por $x - 1$.

5. IGUALDADES NOTABLES.

Las fórmulas o igualdades que vamos a obtener a continuación referidas a binomios son muy importantes, por lo que debemos memorizarlas. Las figuras geométricas dan una interpretación comparando las áreas de las regiones que se forman.

- **Cuadrado de una suma**



El lado del cuadrado es $a + b$.

Se forman dos cuadrados pequeños de superficie a^2 y b^2 y dos rectángulos de superficie ab.

La superficie del cuadrado grande es igual a la suma de las superficies de los cuadrados pequeños y de los rectángulos.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

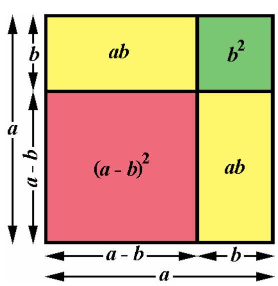
Mediante la potenciación también podríamos haber obtenido esta expresión:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El **cuadrado de la suma** de dos monomios es igual al cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

- **Cuadrado de una diferencia**



El lado del cuadrado es a.

Se forman dos cuadrados pequeños de superficie $(a - b)^2$ y b^2 y dos rectángulos de superficie ab. Observa que b^2 está en los dos rectángulos ab.

La superficie del cuadrado de lado $(a - b)$ es igual a la superficie del cuadrado grande menos la superficie sombreada.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Operando obtenemos la misma expresión:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a(a - b) - b(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El **cuadrado de la diferencia** de dos monomios es igual al cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

- **Suma por diferencia o diferencia de cuadrados**

Mediante el producto obtenemos:

$$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

La **suma de dos monomios por su diferencia** es igual a la diferencia de sus cuadrados.

$$\boldsymbol{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Ejemplo. En las operaciones con polinomios resultan muy útiles las igualdades notables, así por ejemplo:

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$(2x + 3)(2x - 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$$

EJERCICIOS

20. Desarrolla los siguientes cuadrados.
a) $(x + 8)^2$ b) $(3x + 8)^2$ c) $(4 - 3x)^2$ d) $(2x - 6)^2$
e) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ f) $\left(\frac{1}{2}x + 8\right)^2$ g) $\left(\frac{4}{3} - 3x\right)^2$ h) $\left(3x^3 - \frac{1}{3}\right)^2$

21. Expresa como el cuadrado de una suma o el cuadrado de una diferencia cada uno de los siguientes polinomios.
a) $x^2 + 10x + 25$ b) $4x^2 + 4x + 1$ c) $x^2 - 20x + 100$ d) $x^2 + 6x + 9$
e) $x^2 + 36 - 12x$ f) $4x^2 + 9 - 12x$ g) $x^4 - 20x^2 + 100$ h) $x^4 + 6x^2 + 9$

22. Expresa como una diferencia cada uno de los siguientes productos.
a) $(x - 5)(x + 5)$ b) $(5 - x)(5 + x)$ c) $(2x - 5)(2x + 5)$
d) $(5 - 2x)(5 + 2x)$ e) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$ f) $\left(\frac{1}{3}x + 3\right)\left(\frac{1}{3}x - 3\right)$

23. Completa los huecos en las igualdades siguientes.
a) $(3x + ÿ)^2 = 9x^2 + 24x + 16$ b) $(ÿ - 5)^2 = 4x^2 - ÿ + 25$
c) $16 - ÿ = (4 - ÿ)(ÿ + 5x)$ d) $(ÿ - ÿ)^2 = 49x^2 - 70x + ÿ$

24. Efectúa las siguientes operaciones con polinomios utilizando, cuando sea posible, las igualdades notables.
a) $(x + 2)(x - 2)(2x + 1)^2$ b) $4(3x - 1)(3x + 1) - 3x[(3x + 1)^2 - (3x - 1)^2]$

25. Desarrolla el cubo de la suma y de la diferencia de dos monomios: $(a + b)^3$ y $(a - b)^3$.

26. Aplica las igualdades del ejercicio anterior para hallar los siguientes cubos.
a) $(x + 1)^3$ b) $(2x - 3)^3$ c) $(2x^3 + 6x)^3$ d) $(x^2 - 5x)^3$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Asocia cada expresión algebraica con su enunciado correspondiente.

a) $x^2 - y^2$	1) El triple de la suma de un número más cuatro.
b) $3x + 4$	2) Suma de tres números pares consecutivos.
c) $10x + y$	3) La diferencia de los cuadrados de dos números.
d) $2x + (2x + 2) + (2x + 4)$	4) Un número de dos cifras.
e) $(x - y)^2$	5) Suma de tres números impares consecutivos.
f) $3(x + 4)$	6) El cuadrado de la diferencia de dos números.
g) $(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5)$	7) El triple de un número más cuatro.

1f, 2d, 3a, 4c, 5g, 6e, 7b

2. Llama x e y a dos números cualesquiera y expresa con ellos cada uno de los siguientes enunciados.
   a) La suma de x y el triple de y. $\boldsymbol{x + 3y}$
   b) La diferencia del doble de x menos la mitad de y. $\boldsymbol{2x - y/2}$
   c) La quinta parte de x es igual que el doble de y menos 4. $\boldsymbol{x/5 = 2y - 4}$
   d) El cuadrado de su suma. $\boldsymbol{(x + y)^2}$
   e) El cuadrado de su diferencia. $\boldsymbol{(x - y)^2}$
   f) La suma de sus cuadrados. $\boldsymbol{x^2 + y^2}$
   g) La diferencia de sus cuadrados. $\boldsymbol{x^2 - y^2}$

3. Determina los valores numéricos de las expresiones siguientes para los valores de las variables que se indican.
   a) $a^2 - b^2$; $a = 1, b = -1$ b) $\frac{x}{2} + y + z^2$; $x = -4, y = 2, z = -2$
   c) $\frac{2x^2 + xy - 1}{2x + y}$; $x = -1, y = 4$ d) $2^a + \sqrt{4bc}$; $a = -1, b = 2, c = 18$
   a) 0 b) 4 c) -3/2 d) 25/2

4. Escribe un monomio en la indeterminada x que verifique las condiciones que se expresan en cada uno de los siguientes casos.
   a) De grado 2 y coeficiente –4. $\boldsymbol{-4x^2}$
   b) De grado cero y coeficiente 1. **1**
   c) Semejante a $4x^3$ y de coeficiente 3. $\boldsymbol{3x^3}$
   d) De grado 3 y coeficiente 1/3. $\boldsymbol{1/3x^3}$

5. Calcula las siguientes sumas y restas de monomios semejantes.
   a) $3x^2 - 6x^2 + 9x^2 = \boldsymbol{6x^2}$ b) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x = \boldsymbol{\frac{5}{4}x}$ c) $3x^2 - (-5x^2) = \boldsymbol{8x^2}$ d) $\frac{1}{2}x^2 + x^2 - \frac{1}{3}x^2 = \boldsymbol{\frac{7}{6}x^2}$

6. Haz los siguientes productos de e indica el grado del resultado.
   a) $2x(-x^3) = \boldsymbol{-2x^4}$ b) $-\frac{1}{4}x\left(-\frac{1}{4}x^3\right)x^2 = \boldsymbol{\frac{1}{16}x^6}$ c) $5x\left(-\frac{1}{3}x^3\right)6x = \boldsymbol{-10x^5}$ d) $\left(-\frac{1}{4}x\right)\left(-\frac{1}{4}x^3\right)x^2 = \boldsymbol{\frac{1}{16}x^6}$

7. Halla los siguientes cocientes.
   a) $25x^5 : (-5x^2) = \boldsymbol{-5x^3}$ b) $\frac{3}{5}x^6 : \frac{2}{4}x = \boldsymbol{\frac{6}{5}x^5}$ c) $\frac{3}{2}x^3 : 3x^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}x}$ d) $\left(-\frac{1}{2}x^3\right) : \left(-\frac{1}{4}x^3\right) = \boldsymbol{2}$

8. Realiza las siguientes potencias de monomios.
   a) $(x^2)^2 = \boldsymbol{x^4}$ b) $(2x)^3 = \boldsymbol{8x^3}$ c) $(-2x)^3 = \boldsymbol{-8x^3}$ d) $(5x^2)^4 = \boldsymbol{625x^8}$ e) $(-5x^2)^4 = \boldsymbol{625x^8}$ f) $(3x^5)^3 = \boldsymbol{27x^{15}}$

9. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios, para los valores que se indican.
   a) $P(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$ para $x = 0, x = 1$ y $x = -2$ **P(0) = 12, P(1) = 0, P(-2) = -18**
   b) $Q(x) = 3x^3 - 6x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ para $x = 0, x = -1$ y $x = 1/2$ **Q(0) = 3/2, Q(-1) = -27/4, Q(1/2) = 0**

10. Dados los polinomios $A(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1$, $B(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x$ y $C(x) = -x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, realiza las siguientes operaciones.
    a) $A(x) - [B(x) + C(x)]$ b) $A(x) - B(x) + C(x)$ c) $A(x) - B(x) - C(x)$
    a) $\boldsymbol{2x^4 + 2x^2 - x + 2}$ **b)** $\boldsymbol{2x^3 + x}$ **c)** $\boldsymbol{2x^4 + 2x^2 - x + 2}$

11. Aplica las reglas para eliminar paréntesis y halla la forma reducida de cada polinomio.
 a) $4x + (2x + 8) - (-5x^2 - 3x)$
 b) $(4x^3 - 2x^2 + x + 1) - (3x^3 - x^2 - x + 7) + (x^3 - 4x^2 + 2x - 8)$
 c) $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + x - \frac{1}{8}\right) - \left[\left(x^3 - \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}\right)\right]$

 a) $\mathbf{5x^2 + 9x + 8}$ **b)** $\mathbf{2x^3 - 5x^2 + 4x - 14}$ **c)** $\mathbf{\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{23}{8}}$

12. Considera los polinomios $A(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ y $B(x) = -x^4 + 8x^2 + 7x + 2$.
 a) Calcula la diferencia $C(x) = A(x) - B(x)$.
 b) Comprueba que $A(x) = B(x) + C(x)$.
 c) Halla los valores numéricos A(3), B(3) y C(3) y comprueba que C(3) = A(3) − B(3).
 a) $\mathbf{C(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 - 14x - 6}$
 b) Se deja para el alumno.
 c) A(3) = -16, B(3) = 14, C(3) = -30; la comprobación se deja para el alumno.

13. Realiza las siguientes multiplicaciones con polinomios.
 a) $(x^2 - 3x + 1)(x + 4)$ b) $(5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x)(2x^3 + 2x + 1)$
 c) $(x^4 - 7x^2 - 3)(x^2 - 3)$ d) $(2x^2 - 4x + 16)(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$
 a) $\mathbf{x^3 + x^2 - 11x + 4}$ **b)** $\mathbf{10x^7 + 6x^6 + 6x^5 + 5x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x}$
 c) $\mathbf{x^6 - 10x^4 + 18x^2 + 9}$ **d)** $\mathbf{x^3 - x^2 + 6x + 8}$

14. Desarrolla las siguientes potencias.
 a) $(3x - 1)^2 = \mathbf{9x^2 - 6x + 1}$ b) $(x + 1)^3 = \mathbf{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$
 c) $(-2x + 3)^3 = \mathbf{-8x^3 + 36x^2 - 54x + 27}$ d) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}}$

15. Efectúa las siguientes divisiones de polinomios por monomios.
 a) $\frac{6x^3 + 4x^2 - 8x}{2x}$ b) $\frac{4x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x}{-2x}$ c) $\frac{15x^5 - 10x^4 + 5x^2}{5x^2}$ d) $\frac{18x^7 - 12x^5 - 24x^3}{6x^3}$
 a) $\mathbf{3x^2 + 2x - 4}$ **b)** $\mathbf{-2x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$ **c)** $\mathbf{3x^3 - 2x^2 + 1}$ **d)** $\mathbf{3x^4 - 2x^2 - 4}$

16. Determina el cociente y el resto de la división $(6x^3 - 5x^2 - 14x - 2) : (2x + 1)$. Comprueba que:
 a) $D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$ b) grado $r(x)$ < grado $d(x)$ c) grado $c(x)$ = grado $D(x)$ − grado $d(x)$
 $\mathbf{c(x) = 3x^2 - 4x - 5}$, $\mathbf{r(x) = 3}$
 Los apartados se dejan para que los compruebe el alumno.

17. Calcula las siguientes divisiones indicando, para cada una de ellas, el cociente y el resto.
 a) $(8x^4 - 4x^2 + 7x) : 2x^2$ b) $(-3x^4 + 3x^2 + 2x - 2) : (x^2 + 2x + 4)$
 c) $(3x^4 - x^3 - 6x^2 + 29x - 9) : (3x - 1)$ d) $(7x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 5x + 3) : (2x^2 - x + 1)$
 a) $\mathbf{c(x) = 4x^2 - 2}$, $\mathbf{r(x) = 7x}$ **b)** $\mathbf{c(x) = -3x^2 + 6x + 3}$, $\mathbf{r(x) = -28x - 14}$
 c) $\mathbf{c(x) = x^3 - 2x + 9}$, $\mathbf{r(x) = 0}$ **d)** $\mathbf{c(x) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}}$, $\mathbf{r(x) = -\frac{49}{8}x + \frac{27}{8}}$

18. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.
 a) $(x^5 - 7x^3 + 16x^2 - 12x) : (x - 1)$ $\mathbf{c(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 + 10x - 2}$, $\mathbf{r = -2}$
 b) $(4x^3 - 3x^2 + 18x - 9) : (x + 2)$ $\mathbf{c(x) = 4x^2 - 11x + 40}$, $\mathbf{r = -89}$
 c) $(2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4) : (x + 4)$ $\mathbf{c(x) = 2x^3 - 11x^2 + 50x - 200}$, $\mathbf{r = 796}$
 d) $(2x^3 - 3x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}) : (x - 2)$ $\mathbf{c(x) = 2x^2 + x + \frac{8}{3}}$, $\mathbf{r = 5}$

19. Responde a las cuestiones siguientes.
 a) Calcula m, para que al dividir $x^3 - 3x^2 - mx + 12$ entre $x - 3$, el resto sea 9.
 b) Halla n para que la división $(2x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x - n) : (x - 1)$ sea exacta.
 c) Determina el valor de a para que el polinomio $x^3 - ax^2 - ax + 1$ sea divisible por $x - 1$.
 d) Halla m y n para que el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + (m - 1)x + n$ cumpla P(0) = 2 y que sea divisible por $x - 1$.
 a) $\mathbf{m = 1}$ **b)** $\mathbf{n = 13}$ **c)** $\mathbf{a = 1}$ **d)** $\mathbf{m = 0, n = 2}$

20. Desarrolla los siguientes cuadrados.

a) $(x+8)^2$ b) $(3x+8)^2$ c) $(4-3x)^2$ d) $(2x-6)^2$

e) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ f) $\left(\frac{1}{2}x+8\right)^2$ g) $\left(\frac{4}{3}-3x\right)^2$ h) $\left(3x^3-\frac{1}{3}\right)^2$

a) $\mathbf{x^2+16x+64}$ **b)** $\mathbf{9x^2+48x+64}$ **c)** $\mathbf{16-24x+9x^2}$ **d)** $\mathbf{4x^2-24x+36}$

e) $\mathbf{x^2+x+\frac{1}{4}}$ **f)** $\mathbf{\frac{1}{4}x^2+8x+64}$ **g)** $\mathbf{\frac{16}{9}-8x+9x^2}$ **h)** $\mathbf{9x^6-2x^3+\frac{1}{9}}$

21. Expresa como el cuadrado de una suma o el cuadrado de una diferencia cada uno de los siguientes polinomios.

a) $x^2+10x+25$ b) $4x^2+4x+1$ c) $x^2-20x+100$ d) x^2+6x+9

e) $x^2+36-12x$ f) $4x^2+9-12x$ g) x^4-20x^2+100 h) x^4+6x^2+9

a) $\mathbf{(x+5)^2}$ **b)** $\mathbf{(2x+1)^2}$ **c)** $\mathbf{(x-10)^2}$ **d)** $\mathbf{(x+3)^2}$

e) $\mathbf{(x-6)^2}$ **f)** $\mathbf{(2x-3)^2}$ **g)** $\mathbf{(x^2-10)^2}$ **h)** $\mathbf{(x^2+3)^2}$

22. Expresa como una diferencia cada uno de los siguientes productos.

a) $(x-5)(x+5)$ b) $(5-x)(5+x)$ c) $(2x-5)(2x+5)$

d) $(5-2x)(5+2x)$ e) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ f) $\left(\frac{1}{3}x+3\right)\left(\frac{1}{3}x-3\right)$

a) $\mathbf{x^2-25}$ **b)** $\mathbf{25-x^2}$ **c)** $\mathbf{4x^2-25}$

d) $\mathbf{25-4x^2}$ **e)** $\mathbf{x^2-\frac{1}{9}}$ **f)** $\mathbf{\frac{1}{9}x^2-9}$

23. Completa los huecos en las igualdades siguientes.

a) $(3x+ÿ)^2=9x^2+24x+16$ b) $(ÿ-5)^2=4x^2-ÿ+25$

c) $16-ÿ=(4-ÿ)(ÿ+5x)$ d) $(ÿ-ÿ)^2=49x^2-70x+ÿ$

a) $(3x+\mathbf{4})^2=9x^2+24x+16$ b) $(\mathbf{2x}-5)^2=4x^2-ÿ+25$

c) $16-\mathbf{25x^2}=(4-\mathbf{5x})(\mathbf{4}+5x)$ d) $(\mathbf{7x}-\mathbf{5})^2=49x^2-70x+\mathbf{25}$

24. Efectúa las siguientes operaciones con polinomios utilizando, cuando sea posible, las igualdades notables.

a) $(x+2)(x-2)(2x+1)^2$ b) $4(3x-1)(3x+1)-3x[(3x+1)^2-(3x-1)^2]$

Se hace insistencia en que se apliquen, cuando sea posible, las igualdades notables.

a) $\mathbf{4x^4+4x^3-15x^2-16x-4}$ **b)** $\mathbf{-4}$

25. Desarrolla el cubo de la suma y de la diferencia de dos monomios: $(a+b)^3$ y $(a-b)^3$.

$\mathbf{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

$\mathbf{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

26. Aplica las igualdades del ejercicio anterior para hallar los siguientes cubos.

a) $(x+1)^3$ b) $(2x-3)^3$ c) $(2x^3+6x)^3$ d) $(x^2-5x)^3$

a) $\mathbf{x^3+3x^2+3x+1}$ **b)** $\mathbf{8x^3-36x^2+54x-27}$

c) $\mathbf{8x^9+72x^7+216x^5+216x^3}$ **d)** $\mathbf{x^6-15x^5+75x^4-125x^3}$