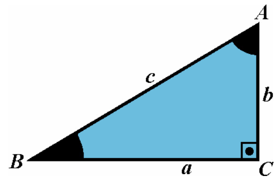
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

1. RELACIONES ENTRE LOS LADOS Y LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Dado un triángulo rectángulo *ABC*, como el de la figura, supondremos que el ángulo recto es *C*. A continuación recordamos las relaciones entre sus elementos.



- **Relaciones entre los ángulos**

  La suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180º: $\boldsymbol{A + B + C = 180º}$

  Como $C = 90º$, se tiene que $\boldsymbol{A + B = 90º}$

- **Relaciones entre los lados: teorema de Pitágoras**

  El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$

  Si un triángulo verifica esta relación, es rectángulo.

- **Relaciones entre los lados y los ángulos**

  Las razones trigonométricas relacionan el ángulo con los lados:

$$\textbf{sen } A = \frac{a}{c},\quad \textbf{cos } A = \frac{b}{c},\quad \textbf{tg } A = \frac{a}{b}\ ;\quad \textbf{sen } B = \frac{b}{c},\quad \textbf{cos } B = \frac{a}{c},\quad \textbf{tg } B = \frac{b}{a}$$

  Conocidos los lados, se pueden obtener los ángulos mediante las teclas de la calculadora $\boxed{\textbf{sen}^{-1}}$, $\boxed{\textbf{cos}^{-1}}$ y $\boxed{\textbf{tg}^{-1}}$, que dan el valor del ángulo cuyo seno, coseno o tangente se conoce.

Ejemplo.- En un triángulo rectángulo isósceles la hipotenusa mide 8 cm. ¿Cuánto miden los catetos?

Por ser isósceles los catetos son iguales, entonces se tiene:

$$a^2 + a^2 = 8^2 \Rightarrow 2a^2 = 64 \Rightarrow a^2 = 32 \Rightarrow a = \sqrt{32} \text{ cm}$$

Ejemplo.- Un triángulo rectángulo tiene un ángulo $B = 37º\ 45'\ 28''$. Calcula el ángulo *A*.

De $A + B = 90º$, se tiene que $A = 90º - B = 90º - 37º\ 45'\ 28'' = 52º\ 14'\ 32''$

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

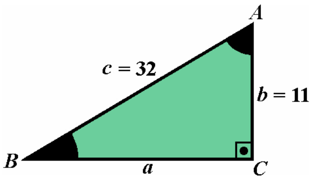
Una de las aplicaciones fundamentales de la trigonometría es la resolución de problemas en los que aparecen triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo rectángulo consiste en determinar las medidas de sus seis elementos: tres lados y dos ángulos (el tercero será recto) a partir de algunos de ellos que son conocidos.

Un triángulo rectángulo queda determinado cuando conocemos como mínimo dos de sus elementos, que no sean sus dos ángulos agudos, además del ángulo recto. Analizaremos en los siguientes ejemplos los dos casos posibles:

- **Caso 1:** cuando se conocen **dos lados.**
- **Caso 2:** cuando se conocen **un lado y un ángulo.**

Ejemplo.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $c = 32$ cm y el cateto $b = 11$ cm. Resuelve el triángulo.

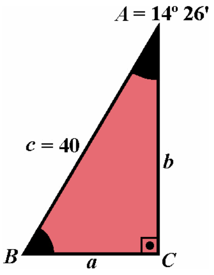


Cateto a: $a = \sqrt{32^2 - 11^2} = \sqrt{903} \cong 30'05\,\text{cm}$

Ángulo B: $\text{sen}\, B = \dfrac{11}{32} \Rightarrow B = 20^\circ\ 6'\ 20''$

Ángulo A: $A = 90^\circ - B = 90^\circ - 20^\circ\ 6'\ 20'' = 69^\circ\ 53'\ 40''$

Ejemplo.- Resuelve un triángulo rectángulo ABC del que se conoce la hipotenusa $c = 40$ cm y el ángulo $A = 14^\circ\ 26'$.



Ángulo B: $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 14^\circ\ 26' = 75^\circ\ 34'$

Cateto a: $\text{sen}\, 14^\circ\ 26' = \dfrac{a}{40} \Rightarrow a = 40 \cdot \text{sen}\ 14^\circ\ 26' \cong 9'97$ cm

Cateto b: $\cos 14^\circ\ 26' = \dfrac{b}{40} \Rightarrow b = 40 \cdot \cos 14^\circ\ 26' \cong 38'74$ cm

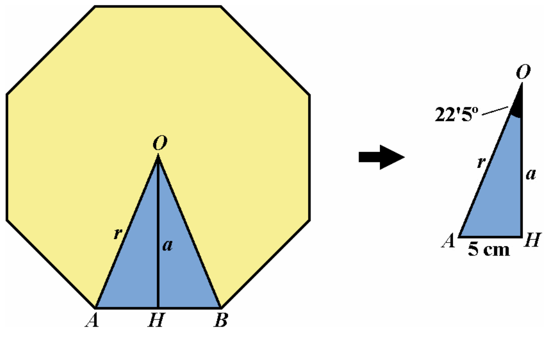
3. Aplicaciones a la geometría

El cálculo de distancias en geometría se puede ampliar a todos los casos cuando se conocen ángulos y lados o aristas. Para resolver el problema hay que relacionar los datos con un triángulo rectángulo en el que se puedan aplicar las definiciones de las razones trigonométricas. Observa cómo se resuelven los siguientes problemas.

Ejemplo.- Calcula el radio y la apotema de un octógono regular de lado 10 cm. Halla su área.

Se dibuja el octógono lo más exacto posible y unimos el centro con dos vértices consecutivos, por ejemplo, A y B. La apotema es $a = OH$, el radio $r = OA$ y AH el semilado, que mide 5 cm.

El ángulo central O del octógono regular mide 360º : 8 = 45º, y el ángulo mitad correspondiente, por tanto, 22'5º.



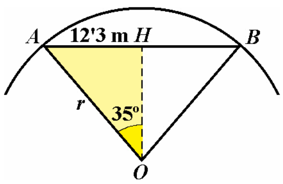
En el triángulo rectángulo OAH se conocen el ángulo O y el cateto opuesto AH. Aplicando las relaciones trigonométricas se tiene:

Valor del radio: $\text{sen}\ 22'5^\circ = \dfrac{5}{r} \Rightarrow r = \dfrac{5}{\text{sen}\ 22'5^\circ} \cong 13'06\,\text{cm}$

Valor de la apotema: $\operatorname{tg} 22'5^\circ = \dfrac{5}{a} \Rightarrow a = \dfrac{5}{\operatorname{tg} 22'5^\circ} \cong 12'07 \text{ cm}$

Valor del área: $A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{8 \cdot 10 \cdot \dfrac{5}{\operatorname{tg} 22'5^\circ}}{2} = \dfrac{200}{\operatorname{tg} 22'5^\circ} \cong 482'84 \text{ cm}^2$

Ejemplo.- Halla el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24'6 m tiene como arco correspondiente uno de 70º.

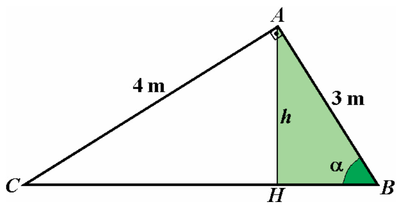


En la figura del margen se indica la construcción de un triángulo rectángulo donde aparece el radio buscado.

En el triángulo rectángulo *OAH* se conocen el ángulo *O* que vale 35º y el cateto opuesto *AH* que mide 12'3 m, mitas de la cuerda.

Valor del radio: $\operatorname{sen} 35^\circ = \dfrac{12'3}{r} \Rightarrow r = \dfrac{12'3}{\operatorname{sen} 35^\circ} \cong 21'44 \text{ cm}$

Ejemplo.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 m. Halla la altura correspondiente a la hipotenusa.



En el triángulo rectángulo *ABC* podemos hallar:

la hipotenusa *CB*, que mide $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$,

y el seno del ángulo α, $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{4}{5}$

En el triángulo rectángulo *AHB*, resulta:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot \operatorname{sen} \alpha = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2'4 \text{ m}$$

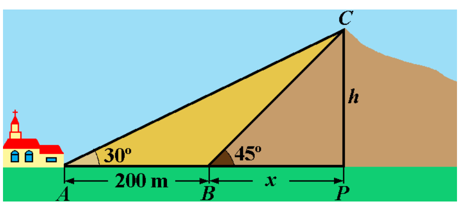
4. APLICACIONES A LA TOPOGRAFÍA

La topografía tiene como objeto medir extensiones de tierra. Para ello, el topógrafo mide con el teodolito ángulos sobre el terreno y por medio de cálculos matemáticos consigue obtener distancias horizontales y verticales, áreas y volúmenes.

El teodolito es un instrumento que se utiliza para medir ángulos y que consiste, esencialmente, en dos planos, uno horizontal y otro vertical. En cada uno de estos planos existe un círculo graduado donde se pueden medir los ángulos.

- Cuando se mira del plano horizontal de la visión hacia arriba, se llama ***ángulo de elevación.*** Por ejemplo, del suelo a una torre.
- Cuando se mira del plano horizontal de la visión hacia abajo, se llama ***ángulo de depresión.*** Por ejemplo, de la torre al suelo.

Ejemplo.- Tres amigos van a escalar un monte del que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que mide 30º. Han avanzado 200 m hasta la base del monte y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45º. Calcula la altura del monte.



Notemos por $x = BP$ y $h = PC$.

En el triángulo rectángulo *BPC* tenemos:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{x} \qquad [1]$$

En el triángulo rectángulo *APC*:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{200 + x} \qquad [2]$$

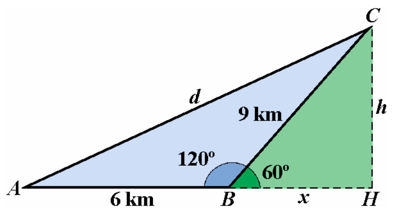
Resolvamos el sistema de ecuaciones formado por [1] y [2].

De [1] obtenemos que $1 = \dfrac{h}{x} \Rightarrow x = h$, y sustituimos en [2]:

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{h}{200+h} \Rightarrow (200+h)\text{tg } 30^\circ = h \Rightarrow 200 \cdot \text{tg } 30^\circ + h \cdot \text{tg } 30^\circ = h \Rightarrow$$

$$200 \cdot \text{tg } 30^\circ = h - h \cdot \text{tg } 30^\circ = h(1 - \text{tg } 30^\circ) \Rightarrow h = \frac{200 \cdot \text{tg } 30^\circ}{1 - \text{tg } 30^\circ} \cong 273'21\,\text{m}$$

Ejemplo.- Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia de A a B es 6 km y la de B a C es 9 km. El ángulo que forman las carreteras AB y BC es 120º. ¿Cuánto distan los pueblos A y C?



En el triángulo rectángulo CBH calculamos x y h:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{9} \Rightarrow h = 9 \cdot \text{sen } 60^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 9 \cdot \cos 60^\circ$$

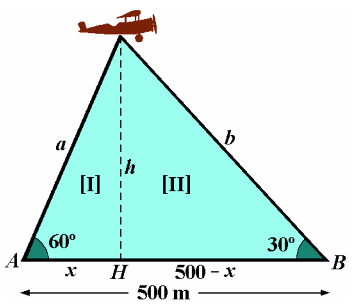
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo CAH obtenemos la distancia entre los pueblos A y C:

$$d = \sqrt{(6+x)^2 + h^2} = \sqrt{(6 + 9 \cdot \cos 60^\circ)^2 + (9 \cdot \text{sen } 60^\circ)^2} = \sqrt{110'25 + 60'75} = \sqrt{171} \cong 13'077\,\text{km}$$

Otra forma de resolver el problema es aplicando el teorema de Pitágoras generalizado:

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 9 \cdot \cos 60^\circ = \frac{9}{2};\quad d^2 = 6^2 + 9^2 + 2 \cdot 6 \cdot x = 36 + 81 + 54 = 171 \ \Rightarrow \ d = \sqrt{171} \cong 13'077\,\text{km}$$

Ejemplo.- Calcula la altura a la que está volando la avioneta si los ángulos de elevación de dos observadores A y B separados entre sí 500 metros son 60º y 30º, respectivamente. Calcula la distancia de cada observador a la avioneta.



Vamos a notar por Notemos por $x = AH$ y $500 - x = HB$ a las dos partes en que la altura h divide la distancia entre los observadores A y B.

En los triángulos rectángulos [I] y [II] tenemos:

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{x} \qquad\qquad \text{tg } 30^\circ = \frac{h}{500-x}$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones (igualación):

$$\text{[I]} \quad h = x \cdot \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}x$$

$$\text{[II]} \quad h = (500-x) \cdot \text{tg } 30^\circ = (500-x)\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Igualando ambas expresiones hallamos el valor de x:

$$\sqrt{3}x = (500-x)\frac{\sqrt{3}}{3} \ \Rightarrow \ x = \frac{500-x}{3} \ \Rightarrow \ 3x = 500 - x \ \Rightarrow \ 4x = 500 \ \Rightarrow \ x = 125\,\text{m}$$

Sustituyendo en [I] obtenemos el valor de h: $\quad h = \sqrt{3}x = 125\sqrt{3} \cong 216'5\,\text{m}$

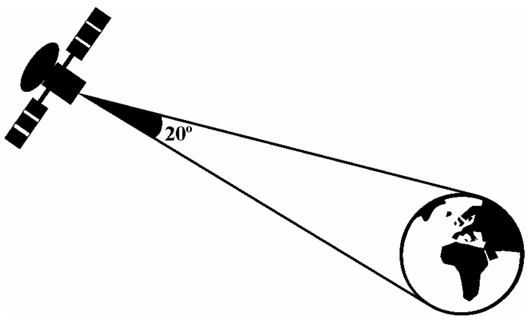
Calculamos la distancia de los observadores a la avioneta, utilizando de nuevo los triángulos [I] y [II]:

$$[\text{I}] \quad \cos 60^\circ = \frac{x}{a} \;\Rightarrow\; a = \frac{x}{\cos 60^\circ} = \frac{125}{1/2} = 125 \cdot 2 = 250\,\text{m}$$

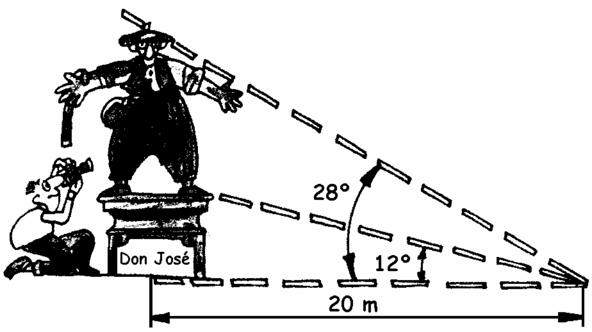
$$[\text{II}] \quad \cos 30^\circ = \frac{500-x}{b} \;\Rightarrow\; b = \frac{500-x}{\cos 30^\circ} = \frac{375}{\sqrt{3}/2} = \frac{750}{\sqrt{3}} = \frac{750\sqrt{3}}{3} = 250\sqrt{3} \cong 433\,\text{m}$$

EJERCICIOS

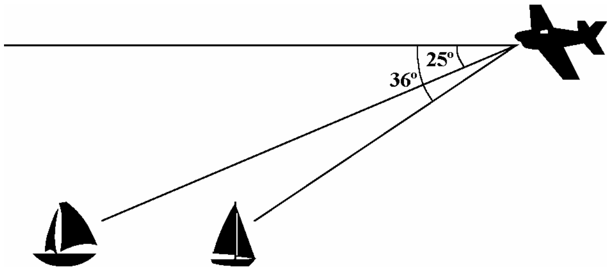
1. Los catetos de un triángulo rectángulo miden $a = 8$ cm y $b = 24$ cm. Resuelve el triángulo.
2. En un triángulo rectángulo ABC se conocen el cateto $a = 102'4$ cm y el ángulo $A = 55^\circ$. Resuelve el triángulo.
3. Calcula el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 9 cm.
4. En una circunferencia de radio 100 cm, se traza una cuerda que mide 50 cm. ¿Cuánto mide el ángulo central que determinan los extremos de la cuerda?
5. La longitud del lado de un octógono regular es 12 cm. Halla el área de la corona circular formada por las circunferencias inscrita y circunscrita al mismo.
6. Dos lados de un triángulo miden 12 cm y 20 cm y el ángulo que forman estos lados 130º. ¿Cuánto mide el tercer lado? Halla el área del triángulo.
7. Calcula la altura a la que se encuentra una cometa cuyo hilo de 32 m de longitud forma con el suelo un ángulo de elevación de 35º.
8. En un determinado momento del día los rayos solares forman con el suelo un ángulo de 40º. En ese instante la sombra de un árbol mide 30 m, ¿cuál es la altura del árbol?
9. Desde una nave espacial se ve la Tierra bajo un ángulo de 20º (ángulo que forman las tangentes a la Tierra desde la nave). Siendo el radio de la Tierra 6.370 km, halla la distancia de la nave a la superficie terrestre.



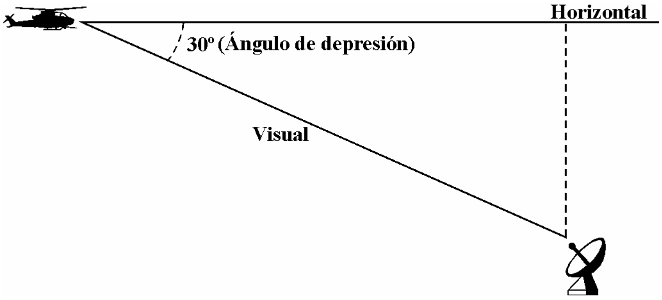
10. Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 45º, y si se retrocede 40 m, se ve bajo un ángulo de 30º. Halla la altura del árbol y el ancho del río.
11. En tu ciudad hay una estatua situada sobre un pedestal. Con un teodolito y una cinta métrica obtenéis las medidas que aparecen en el dibujo. Calcula la altura del pedestal y de la estatua.



12. Desde una avioneta que vuela a una altura de 300 metros sobre el nivel del mar se observan dos embarcaciones situadas en el mismo plano sobre la visual. Halla la distancia entre las mismas si los ángulos de depresión respectivos son de 25º y 36º.

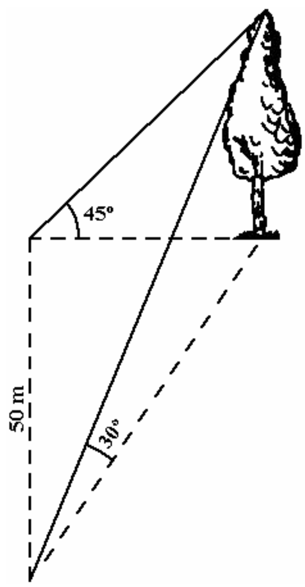


13. El piloto de un helicóptero observa el radar de un aeropuerto con un ángulo de depresión de 30º. Dieciocho segundos más tarde, el ángulo de depresión obtenido sobre el mismo es de 55º. Si vuela horizontalmente y a una velocidad de 400 millas/hora, halla la altitud de vuelo.



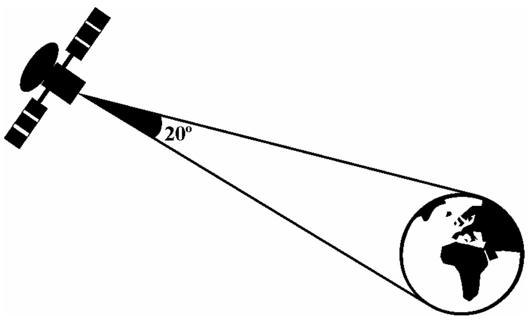
14. Dos amigos, Luis y María, están paseando una tarde por la orilla de un río. En un determinado momento se separan una distancia de 60 metros y observan un pájaro que está en la otra orilla. Los ángulos que forman las visuales que dirigen Luis y María al pájaro con la línea que une a ambos son de 70º y 55º, respectivamente. Halla la distancia del pájaro a cada uno de los amigos.

15. Un hombre que está situado al oeste de un árbol observa que su ángulo de elevación es de 45º. Camina 50 metros hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30º. Halla la altura del árbol.



Soluciones a los ejercicios propuestos

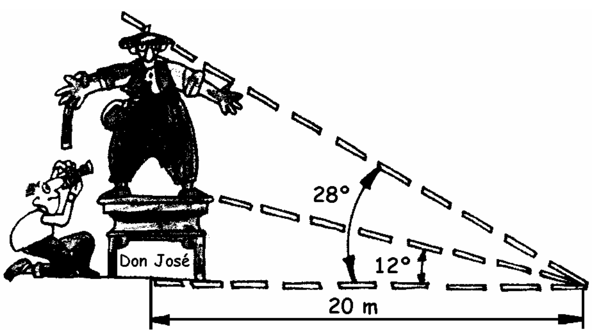
1. Los catetos de un triángulo rectángulo miden a = 8 cm y b = 24 cm. Resuelve el triángulo.
   c **@ 25'3** ***A*** **= 18º 26' 6"** ***B*** **= 71º 33' 54"** ***C*** **= 90º**
2. En un triángulo rectángulo ABC se conocen el cateto a = 102'4 cm y el ángulo A = 55º. Resuelve el triángulo.
   b **@ 71'70** ***c*** **@ 125** **B = 35º** **C = 90º**
3. Calcula el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 9 cm.
   Área pentágono = 405 x sen 36º x cos 36º @ 192'59 cm².
4. En una circunferencia de radio 100 cm, se traza una cuerda que mide 50 cm. ¿Cuánto mide el ángulo central que determinan los extremos de la cuerda?
   El ángulo central que determina los extremos de la cuerda tiene una amplitud de 28º 57' 18".
5. La longitud del lado de un octógono regular es 12 cm. Halla el área de la corona circular formada por las circunferencias inscrita y circunscrita al mismo.
   La corona circular tiene un área aproximada de 35'9023p @ 112'79 cm².
6. Dos lados de un triángulo miden 12 cm y 20 cm y el ángulo que forman estos lados 130º. ¿Cuánto mide el tercer lado? Halla el área del triángulo.
   El tercer lado mide $\sqrt{544 + 480 \text{x} \cos 50^{\circ}}$ @ 29'2 cm. El área del triángulo es 120 x sen 50º @ 91'93 cm².
7. Calcula la altura a la que se encuentra una cometa cuyo hilo de 32 m de longitud forma con el suelo un ángulo de elevación de 35º.
   La cometa se encuentra a una altura de 32 x sen 35º @ 18'35 metros.
8. En un determinado momento del día los rayos solares forman con el suelo un ángulo de 40º. En ese instante la sombra de un árbol mide 30 m, ¿cuál es la altura del árbol?
   El árbol mide 30 x tg 40º @ 25'17 metros.
9. Desde una nave espacial se ve la Tierra bajo un ángulo de 20º (ángulo que forman las tangentes a la Tierra desde la nave). Siendo el radio de la Tierra 6.370 km, halla la distancia de la nave a la superficie terrestre.



La distancia pedida es:

$$\frac{6.370}{\text{sen}\,10^{\circ}} - 6.370 \text{ @ } 30.313'37 \text{ km.}$$

10. Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 45º, y si se retrocede 40 m, se ve bajo un ángulo de 30º. Halla la altura del árbol y el ancho del río.
    La altura del árbol y el ancho del río miden lo mismo, concretamente $\frac{40\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$ @ 54'64 metros.
11. En tu ciudad hay una estatua situada sobre un pedestal. Con un teodolito y una cinta métrica obtenéis las medidas que aparecen en el dibujo. Calcula la altura del pedestal y de la estatua.



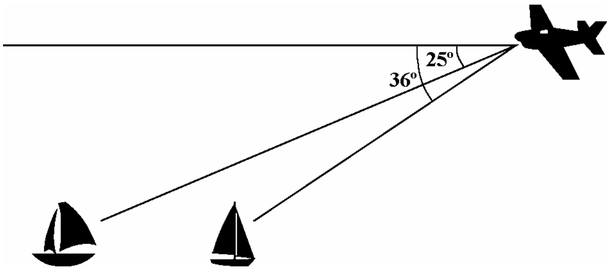
Altura del pedestal:

20 x tg 12º @ 4'25 m

Altura de la estatua:

20 x (tg 28º - tg 12º) @ 6'38 m

12. Desde una avioneta que vuela a una altura de 300 metros sobre el nivel del mar se observan dos embarcaciones situadas en el mismo plano sobre la visual. Halla la distancia entre las mismas si los ángulos de depresión respectivos son de 25º y 36º.

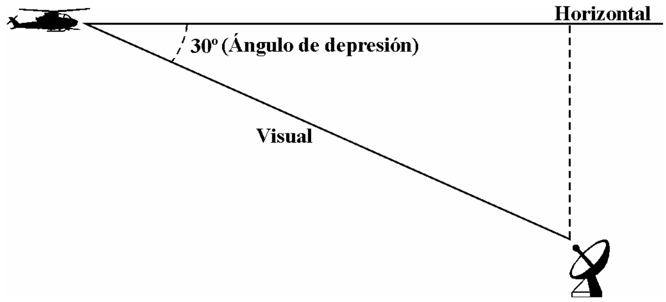


Dependiendo de cómo se resuelva el ejercicio tenemos dos expresiones para la solución del mismo:

1ª) $300 \cdot (\text{tg } 65^\circ - \text{tg } 54^\circ) \approx 230'44$ **metros**

2ª) $\dfrac{300 \cdot (\text{tg } 36^\circ - \text{tg } 25^\circ)}{\text{tg } 36^\circ \cdot \text{tg } 25^\circ} \approx 230'44$ **metros**

13. El piloto de un helicóptero observa el radar de un aeropuerto con un ángulo de depresión de 30º. Dieciocho segundos más tarde, el ángulo de depresión obtenido sobre el mismo es de 55º. Si vuela horizontalmente y a una velocidad de 400 millas/hora, halla la altitud de vuelo.

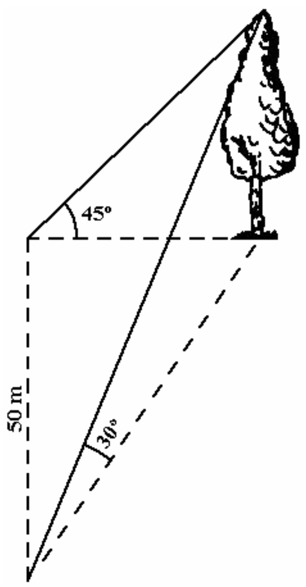


El helicóptero vuela a una altura de:

$$\frac{2 \cdot \text{tg } 30^\circ \cdot \text{tg } 55^\circ}{\text{tg } 55^\circ - \text{tg } 30^\circ} \approx 1'94 \text{ millas}$$

14. Dos amigos, Luis y María, están paseando una tarde por la orilla de un río. En un determinado momento se separan una distancia de 60 metros y observan un pájaro que está en la otra orilla. Los ángulos que forman las visuales que dirigen Luis y María al pájaro con la línea que une a ambos son de 70º y 55º, respectivamente. Halla la distancia del pájaro a cada uno de los amigos.
Aproximadamente, el pájaro está a una distancia de 60 m de Luis, y de 68'83 m de María.

15. Un hombre que está situado al oeste de un árbol observa que su ángulo de elevación es de 45º. Camina 50 metros hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30º. Halla la altura del árbol.



El árbol tiene una altura de:

$$25\sqrt{2} \approx 35'36 \text{ metros}$$