Tema 4 (I). Ecuaciones **Resumen**

Para recordar las ecuaciones de primer grado puede verse:
http://iescomplutense.es/wp-content/uploads/2010/10/ESO-3-T05-I-Resumen-ecuaciones.pdf

Ecuaciones de segundo grado: su forma estándar es $ax^2+bx+c=0$ (donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$).
Soluciones: Si una ecuación de segundo grado está escrita en su forma estándar,
$ax^2+bx+c=0$, sus soluciones se hallan aplicando la fórmula: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
El número de soluciones depende del valor del discriminante, de b^2-4ac.

- Si $b^2-4ac>0$, la ecuación tiene dos soluciones distintas. Si x_1 y x_2 son esas soluciones, entonces se puede hacer la descomposición factorial: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- Si $b^2-4ac=0$, la ecuación tiene solo una solución, que se dice doble. Si x_1 es esa solución, entonces se puede hacer la descomposición factorial: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$.
- Si $b^2-4ac<0$, la ecuación no tiene soluciones, pues la raíz cuadrada de un número negativo no es real. En este caso, el trinomio ax^2+bx+c no puede factorizarse.

Ejemplos:

a) $2x^2+4x-6=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot2\cdot(-6)}}{2\cdot2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+48}}{4}=\dfrac{-4\pm\sqrt{64}}{4}=\dfrac{-4\pm8}{4}=\begin{cases}-3\\1\end{cases}$

Las soluciones son: $x_1=-3$ y $x_2=1$. Se cumple que: $2x^2+4x-6=0 \Leftrightarrow 2(x+3)(x-1)=0$.

b) $x^2+4x+4=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot4}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{0}}{2}=-2$.

La solución es $x_1=-2$, doble. Se cumple que: $x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0$.

c) $2x^2+4x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot2\cdot3}}{4}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-24}}{4} \rightarrow$ No tiene solución.

Ecuación incompleta de segundo grado
Es de la forma: (1) $ax^2+c=0$, $b=0$ (2) $ax^2+bx=0$, $c=0$

- Para hallar las soluciones de una ecuación incompleta no es preciso recurrir a la fórmula anterior (aunque puede hacerse). Se resuelven sacando factor común o despejando x.

Ejemplos:

a) $2x^2-32=0 \Rightarrow 2x^2=32 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\sqrt{16}=\pm4$. Soluciones: $x_1=-4$ y $x_2=4$.

b) $4x^2+20x=0 \rightarrow$ (sacando factor común) $\Rightarrow 4x(x+5)=0$. Soluciones: $x_1=0$ y $x_2=-5$.

Ecuaciones bicuadradas. Las ecuaciones de cuarto grado de la forma $ax^4+bx^2+c=0$, se llaman bicuadradas. Se resuelven empleando la fórmula de la ecuación de segundo grado, pues haciendo $x^2=t$, queda:

$ax^4+bx^2+c=0 \Leftrightarrow at^2+bt+c=0 \rightarrow t$ puede tomar dos, uno o ningún valor real

Una vez encontrado t, los valores de x serán $x=\pm\sqrt{t}$, siempre que exista $\sqrt{t}$.

Ejemplos:

a) La ecuación $x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1, t = 2 \Rightarrow x = \pm 1$ y $x = \pm\sqrt{2}$.
Esta ecuación tiene cuatro soluciones reales: $x = 1$; $x = -1$; $x = \sqrt{2}$; $x = -\sqrt{2}$.

b) La ecuación $x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 5t - 36 = 0 \Rightarrow t = 4, t = -9 \Rightarrow x = \pm 2$ y $x = \pm\sqrt{-9}$, que no existe. Esta ecuación tiene dos soluciones reales: $x = -2$ y $x = 2$.

c) Si la ecuación bicuadrada es reducida es todavía más fácil. Por ejemplo:

$$x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x^2 = 0;\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = \pm\sqrt{3}.$$

Ecuaciones con expresiones radicales

Contienen al menos un término en el que la incógnita está bajo el signo radical. Se resuelven aislando la raíz. Suelen dar lugar a una ecuación de segundo grado. Hay que comprobar las soluciones halladas, pues es frecuente que haya que desechar alguna de ellas.

- Si en la ecuación hubiese dos raíces se reitera el proceso.

Ejemplos:

a) Para resolver $x - \sqrt{x} = 6$, se procede así: $x - \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x - 6 = \sqrt{x} \Rightarrow (x-6)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 = x \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow x = 9,\ x = 4.$$

De las dos soluciones sólo es válida la primera, $x = 9$.

b) $\sqrt{2x+5} - 2\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = 1 + 2\sqrt{x-1} \Rightarrow \left(\sqrt{2x+5}\right)^2 = \left(1 + 2\sqrt{x-1}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 5 = 1 + 4(x-1) + 4\sqrt{x-1} \rightarrow$ se aísla la 2ª raíz: $-2x + 8 = 4\sqrt{x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (se eleva al cuadrado): $(-2x+8)^2 = \left(4\sqrt{x-1}\right)^2 \Rightarrow 4x^2 - 32x + 64 = 16(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 48x + 80 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 = 0 \rightarrow$ soluciones: $x = 10$, $x = 2$.

Sólo es válida la solución $x = 2$.

Ecuaciones de tercer grado (o mayor)

Son ecuaciones de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, siendo *a, b, c, d* números reales; $a \neq 0$.
Para resolver ecuaciones de tercero o grado superior no hay fórmulas elementales. Sólo pueden resolverse cuando tienen alguna solución entera, que será un número divisor del término independiente, *d*. Las demás soluciones pueden hallarse descomponiendo en factores la ecuación inicial.

Ejemplos:

a) Para resolver la ecuación $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ se busca alguna solución entera. Si existe será uno de los divisores de 6: ±1; ±2; ±3; ±6. Se prueba con:

- $x = 1 \rightarrow$ no vale, pues $1 - 4 + 1 + 6 \neq 0$;
- $x = -1 \rightarrow$ sí vale, pues $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$. En consecuencia, $x + 1$ es un factor de la ecuación; el otro se obtiene dividiendo (por Ruffini) y queda:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(x^3 - 4x^2 + x + 6\right) = (x+1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

Por tanto: $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0$.

Las otras dos soluciones de la ecuación inicial son las de $\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0$, que valen 2 y 3.

En consecuencia, las soluciones de la ecuación planteada son $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$.

b) Para resolver $x^3 - 9x = 0$ basta con sacar factor común:

$$x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 9\right) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+3) = 0$$

Sus soluciones son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -3$.