Límite de una sucesión

Idea intuitiva del límite de una sucesión

En la sucesión $\mathbf{a_n = 1/n}$, observamos que los términos se van acercando a cero.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots \frac{1}{1000000}, \ldots, \frac{1}{10000000}, \ldots$$

Consideremos que **0 es el límite de la sucesión** porque:

1 **Los términos se aproximan a cero** tanto como se quiera a medida que se avanza en la sucesión.

2**La distancia a cero puede ser tan pequeña como queramos.**

d(1, 0) = 1

d(1/10, 0) = 0.1

d(1/100, 0) = 0.01

d(1/1000, 0) = 0.001

...

d(1/1 000 000, 0) = 0.000 001

...

d(1/1 000 000 000, 0) = 0.000 000 001

Vemos que el límite es 0 , pero no hay ningún valor de la sucesión que coincida con el límite.

Límite finito de una sucesión

Se dice que una sucesión a_n tiene por límite L si y sólo si para cualquiera número positivo ε que tomemos, existe un término a_k, a partir del cual todos los términos de a_n, siguientes a a_k cumplen que $|a_n - L| < \varepsilon$.

$$\lim a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} / \forall n > k \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

La sucesión a_n = 1/n tiene por límite 0.

$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| < \varepsilon; \quad \frac{1}{k} < \varepsilon; \quad k > \frac{1}{\varepsilon}$$

Ya que podemos determinar a partir de qué término de la sucesión, su distancia a 0 es menor que un número positivo (ε), por pequeño que éste sea.

$\varepsilon = 0.1;\qquad k > \frac{1}{0.1};\qquad k > 10$

Como k>10 a partir del a_{11} se cumplirá que su distancia 0 es menor que 0.1.

$\left|\frac{1}{11} - 0\right| < 0.1;\qquad 0.0909090909091 < 0.1$

Vamos a determinar a partir de que término la distancia a 0 es menor que 0.001.

$\varepsilon = 0.001;\qquad k > \frac{1}{0.001};\qquad k > 1000$

$\left|\frac{1}{1001} - 0\right| < 0.001;\qquad 0.000999000999 < 0.001$

A partir del a_{1001} se cumplirá que su distancia 0 es menor que 0.001.

También podemos definir el límite de una sucesión mediante entornos:

Se dice que una sucesión a_n tiene por límite L si y sólo si para cualquier entorno de L que tomemos, por pequeño que sea su radio ε, existe un término de la sucesión, a partir del cual, los siguientes términos pertenecen a dicho entorno.

$\lim a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists k \in \mathbb{N} / \forall n > k\ \ a_n \in E(L, \varepsilon)$

Límite infinito de una sucesión

Se dice que una sucesión a_n tiene por límite +∞ cuando para toda M>0 existe un término a_k, a partir del cual todos los términos de a_n, siguientes a a_k cumplen que $a_n > M$.

$\lim a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \ \exists k \in \mathbb{N} / \forall n > k\ \ a_n > M$

Vamos a comprobar que el límite de la sucesión $a_n = n^2$ es +∞.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

$n^2 > M;\qquad n > \sqrt{M}$

Si tomamos M = 10 000, su raíz cuadrada es 100, por tanto a partir de a_{101} superará a 10 000.

$a_{101} = 101^2 = 10\ 201$

Se dice que una sucesión a_n tiene por límite − ∞ cuando para toda N >0 existe un término a_k, a partir del cual todos los términos de a_n, siguientes a a_k cumplen que $a_n < -N$.

$\lim a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \ \exists k \in \mathbb{N} / \forall n > k\ \ a_n < -N$

Vamos a comprobar que el **límite** de la sucesión $\mathbf{a_n = -n^2}$ **es** $\mathbf{-\infty}$.

−1, −4, −9, −16, −25, −36, −49, ...

$-n^2 < -N; \quad n > \sqrt{N}$

Si tomamos N= 10 000, su raíz cuadrada es 100, por tanto a partir **de** $\mathbf{a_{101}}$ **superará a −10 000**.

$a_{101} = -101^2 = -10\,201$

Sucesiones convergentes

Son las que tienen límite finito.

Sucesiones divergentes

Son las que tienen límite infinito (+∞ ó − ∞).

Sucesiones oscilantes

No son convergentes ni divergentes. Sus términos alternan de mayor a menor o viceversa.

1, 0, 3, 0 ,5, 0, 7, ...

Sucesiones alternadas

Son aquellas que alternan los signos de sus términos. Pueden ser:

Convergentes

1, −1, 0.5, −0.5, 0.25, −0.25, 0.125, −0.125,..

Tantos los términos pares como los impares tienen de límite 0.

Divergentes

1, 1, 2, 4, 3, 9, 4, 16, 5, 25, ...

Tantos los términos pares como los impares tienden de límite +∞.

Oscilantes

−1, 2, −3, 4 ,−5, ..., $(-1)^n$ n

Propiedades de los límites

1 **El límite si existe es único.**

2 Todas las **sucesiones convergentes** están **acotadas**.

3 Hay **sucesiones acotadas** que no son c**onvergentes**.

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si n es impar} \\ 2 & \text{si n es par} \end{cases}$$

4 Todas las **sucesiones monótonas** y **acotadas** son **convergentes**.

5 Hay sucesiones **convergentes** que **no son monótonas**.

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si n es impar} \\ \frac{1}{n} & \text{si n es par} \end{cases}$$

Infinitésimos

Una sucesión a_n es un **infinitésimo** si es una **sucesión convergente** que tiene por **límite cero**.

$\lim a_n = 0$

Ejemplo

Las sucesiones:

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad b_n = \frac{n}{n^2+1} \qquad c_n = \frac{2n^2}{(n-1)^3}$$

son **infinitésimos** porque:

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim \frac{n}{n^2+1} = 0$$

$$\lim \frac{2n^2}{(n-1)^3} = 0$$

Operaciones con límites

$\lim (a_n + b_n) = \lim (a_n) + \lim (b_n)$

$\lim (a_n - b_n) = \lim (a_n) - \lim (b_n)$

$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim (a_n) \cdot \lim (b_n)$

$\lim (a_n : b_n) = \lim (a_n) : \lim (b_n)$

$$\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n}$$

$\lim k\cdot a_n = k\cdot \lim a_n$

$\lim a_n^{\,k} = (\lim a_n)^k$

$\lim \log_a a_n = \log_a \lim a_n$

Al aplicarse estas propiedades pueden presentarse estos casos:

$$\infty \pm k = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty - \infty = \text{Ind}$$

$$\infty \cdot k = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\infty \cdot 0 = \text{Ind}$$

$$\frac{0}{k} = 0 \qquad \frac{k}{0} = \infty$$

$$\frac{k}{\infty} = 0 \qquad \frac{\infty}{k} = \infty$$

$$\frac{0}{\infty} = 0 \qquad \frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\frac{0}{0} = \text{Ind} \qquad \frac{\infty}{\infty} = \text{Ind}$$

$$k^0 = 1 \qquad 0^\infty = 0 \qquad \infty^\infty = \infty$$

$$0^k = \begin{cases} 0 \text{ si } k>0 \\ \infty \text{ si } k<0 \end{cases}$$

$$k^\infty = \begin{cases} \infty & \text{si } K>1 \\ 0 & \text{si } 0<k<1 \end{cases}$$

$0^0 = Ind \quad \infty^0 = Ind \quad 1^\infty = Ind$

Indeterminación infinito partido infinito

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Se dividen todos los sumandos por la potencia de mayor exponente.

$$\lim \frac{2n^5 - 3n^2}{n^4 - n^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim \frac{\frac{2n^5}{n^5} - \frac{3n^2}{n^5}}{\frac{n^4}{n^5} - \frac{n^3}{n^5}} = \frac{2 - \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{2-0}{0-0} = \infty$$

Regla práctica

1 Si el numerador y denominador tienen el mismo grado el límite es el cociente entre los coeficientes de las potencias de mayor grado.

$$\lim \frac{an^k + \dots}{bn^k + \dots} = \frac{a}{b}$$

2 Si el numerador tiene mayor grado que el denominador el limite es ± ∞, dependiendo del signo del coeficiente de mayor grado.

$$\lim \frac{\pm an^{k+r} + \dots}{bn^k + \dots} = \pm\infty \qquad r \in \mathbb{R}^+$$

3 Si el denominador tiene mayor grado el límite es 0.

$$\lim \frac{an^k + \dots}{bn^{k+r} + \dots} = 0 \qquad r \in \mathbb{R}^+$$

Indeterminación infinito menos infinito

$\infty - \infty$

1. Sucesión entera.

Se saca factor común de la potencia de mayor exponente.

$$\lim(n^3 - 2n^2 + 3) = \infty - \infty$$

$$\lim n^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^3}\right) = \infty(1 - 0 - 0) = \infty$$

Regla práctica

El límite es $\pm\infty$, dependiendo del signo del coeficiente de mayor grado.

2. Sucesiones racionales.

Ponemos a común denominador, y si obtenemos $\frac{\infty}{\infty}$ resolvemos la indeterminación.

3. Sucesiones irracionales.

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim(\sqrt{n^2 - 2} - \sqrt{n^2 + n}) = \infty - \infty$$

$$\lim \frac{\left[(\sqrt{n^2 - 2} - \sqrt{n^2 + n})(\sqrt{n^2 - 2} + \sqrt{n^2 + n})\right]}{(\sqrt{n^2 - 2} + \sqrt{n^2 + n})} =$$

$$= \lim \frac{n^2 - 2 - n^2 - n}{(\sqrt{n^2 - 2} + \sqrt{n^2 + n})} = \lim_{n \to \infty} \frac{-2 - n}{(\sqrt{n^2 - 2} + \sqrt{n^2 + n})} =$$

$$= \lim \frac{\frac{-2}{n} - \frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{2}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2}}} = \frac{-1}{1 + 1} = \frac{-1}{2}$$

Indeterminación cero por infinito

$$0 \cdot \infty$$

Se transforma a . $\frac{\infty}{\infty}$

$$a_n \cdot b_n = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} =$$

$$\lim (n+7) \cdot \sqrt{\frac{1}{4n^2+3}} = \infty \cdot 0$$

Introducimos el 1er factor en la raíz.

$$\lim \sqrt{\frac{(n+7)^2}{4n^2+3}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\sqrt{\lim \frac{n^2+14n+49}{4n^2+3}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Indeterminación cero partido por cero

$$\frac{0}{0}$$

Se transforma a $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim \frac{\frac{3}{\sqrt{4n^2+5}}}{\frac{1}{n-1}} = \lim \frac{3n-3}{\sqrt{4n^2+5}} = \lim \frac{\frac{3n}{n}-\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{5}{n^2}}} = \lim \frac{3-\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n^2}}} = \frac{3}{2}$$

Indeterminación uno elevado a infinito: el número e

Indeterminación uno elevado a infinito

$$1^\infty$$

Se resuelve transformando la expresión en una potencia del número e .

$$e = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$e = 2.7182818284591$

En general se puede comprobar que: $e = \lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$

1^er^ Método

$$\lim \left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} = 1^{\infty}$$

Sumamos y restamos 1 en la base.

$$\lim \left(1 + \frac{2n+1}{2n+4} - 1\right)^{\frac{n^2}{n+1}} =$$

Ponemos a común denominador los últimos sumandos.

$$= \lim \left(1 + \frac{-3}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} =$$

Sustituimos por el inverso del inverso.

$$= \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+4}{-3}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} =$$

Elevamos al denominador y a su inverso.

$$= \left[\lim \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+4}{-3}}\right)^{\frac{2n+4}{-3}}\right]^{\lim \frac{-3}{2n+4} \cdot \frac{n^2}{n+1}} =$$

$$= e^{\lim \frac{-3n^2}{2n^2+6n+4}} = e^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

2º Método

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{c_n} = e^{\lim c_n \cdot \left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)}$$

$$\lim\left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} = 1^{\infty}$$

$$\lim\left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} = e^{\lim\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{2n+1}{2n+4}-1\right)} =$$

$$= e^{\lim\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{2n+1-2n-4}{2n+4}\right)} = e^{\lim\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2n+4}\right)} =$$

$$= e^{\lim\left(\frac{-3n^2}{2n^2+6n+4}\right)} = e^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$