Sucesiones

Concepto de sucesión

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dispuestos uno a continuación de otro.

$\mathbf{a_1, a_2, a_3, ..., a_n}$

$3, 6, 9, ..., 3n$

Los números $\mathbf{a_1, a_2, a_3, ...}$; se llaman **términos de la sucesión**.

El subíndice indica el **lugar que el término ocupa** en la **sucesión**.

El término general es $\mathbf{a_n}$ es un criterio que nos permite determinar cualquier término de la **sucesión**.

Determinación de una sucesión:

Por el término general

$\mathbf{a_n = 2n-1}$

$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

$\mathbf{1, 3, 5, 7, ..., 2n-1}$

No todas las sucesiones tienen término general. Por ejemplo, **la sucesión de los números primos**:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,...

Por una ley de recurrencia

Los términos se obtienen operando con los anteriores.

Escribir una sucesión cuyo primer término es 2, sabiendo que cada término es el cuadrado del anterior.

2, 4, 16, ...

Sucesión de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

Los dos primeros términos son unos y los demás se obtienen sumando los dos términos anteriores.

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Operaciones con sucesiones

Dadas las sucesiones a_n y b_n:

$a_n = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

$b_n = b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$

Suma de sucesiones

$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$

$(a_n) + (b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, ..., a_n + b_n)$

Propiedades

1 Asociativa:

$(a_n + b_n) + c_n = a_n + (b_n + c_n)$

2 Conmutativa:

$a_n + b_n = b_n + a_n$

3 Elemento neutro

$(0) = (0, 0, 0, ...)$

$a_n + 0 = a_n$

4 Sucesión opuesta

$(-a_n) = (-a_1, -a_2, -a_3, ..., -a_n)$

$a_n + (-a_n) = 0$

Diferencia de sucesiones

$(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$

$(a_n) - (b_n) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, ..., a_n - b_n)$

Producto de sucesiones

$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$

$(a_n) \cdot (b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, ..., a_n \cdot b_n)$

Propiedades

1 Asociativa:

$(a_n \cdot b_n) \cdot c_n = a_n \cdot (b_n \cdot c_n)$

2 Conmutativa:

$a_n \cdot b_n = b_n \cdot a_n$

3 Elemento neutro

$(1) = (1, 1, 1, ..)$

$a_n \cdot 1 = a_n$

4 Distributiva respecto a la suma

$a_n \cdot (b_n + c_n) = a_n \cdot b_n + a_n \cdot c_n$

Sucesión inversible

Una sucesión es inversible o invertible si todos sus términos son distintos de cero. Si la sucesión b_n es inversible, su inversa es:

$$\left(\frac{1}{b_n}\right) = \left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \dots, \frac{1}{b_n}\right)$$

$$(b_n) \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right) = (1) = (1, 1, 1, \dots)$$

Cociente de sucesiones

Sólo es posible el cociente entre dos sucesiones si el denominador es inversible.

$$\frac{a_n}{b_n} = (a_n)\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

$$(b_n)\cdot\left(\frac{1}{b_n}\right) = (1) = (1, 1, 1, \ldots)$$

Sucesiones monótonas

$$\text{Sucesiones monótonas}\begin{cases}\text{Estrictamente crecientes}\\ \text{Crecientes}\\ \text{Estrictamente decrecientes}\\ \text{Decrecientes}\end{cases}$$

Sucesiones estrictamente crecientes

Se dice que una **sucesión es estrictamente creciente** si **cada término es mayor que el anterior**.

$a_{n+1} > a_n$

2, 5, 8, 11, 14, 17,...

5 > 2; 8 > 5; 11 > 8; ...

Sucesiones crecientes

Se dice que una **sucesión es creciente** si **cada término es mayor o igual que el anterior**.

$a_{n+1} \geq a_n$

2, 2 , 4, 4, 8, 8,...

2 ≥ 2; 4 ≥ 2; 4 ≥ 4; ...

Sucesiones estrictamente decrecientes

Se dice que una **sucesión es estrictamente decreciente si cada término de la sucesión es menor que el anterior.**

$a_{n+1} < a_n$

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6,...

1/2 < 1; 1/3 < 1/2 ; 1/4 < 1/3; ...

Sucesiones decrecientes

Se dice que una **sucesión es estrictamente decreciente** si c**ada término de la sucesión es menor o igual que el anterior.**

$a_{n+1} \leq a_n$

Sucesiones constantes

Se dice que una **sucesión** es **constante** si **todos su términos son iguales, $a_n = k$.**

$a_n = a_{n+1}$

5, 5, 5, 5, ...

Sucesiones acotadas

Sucesiones acotadas inferiormente

Una **sucesión** está **acotada inferiormente** si **todos sus términos son mayores o iguales que un cierto número K,** que llamaremos **cota inferior** de la **sucesión**. **$a_n \geq k$**

A la mayor de las cotas inferiores se le llama **extremo inferior o ínfimo**.

Si el **ínfimo** de una **sucesión** es uno de sus términos se le llama **mínimo**.

Toda **sucesión acotada inferiormente** es **creciente**.

Sucesiones acotadas superiormente

Una **sucesión** está **acotada superiormente** si todos sus términos son **menores o iguales** que un cierto número **K'**, que llamaremos **cota superior** de la **sucesión**.

$\mathbf{a_n \leq k'}$

A la **menor** de las **cotas superiores** se le llama **extremo superior** o **supremo**.

Si el **supremo** de una **sucesión** es uno de sus términos se llama **máximo**.

Toda **sucesión acotada superiormente** es **monótona decreciente**.

Sucesiones acotadas

Una sucesión se dice acotada si está acotada superior e inferiormente. Es decir si hay un número **k** menor o igual que todos los términos de la sucesión y otro **K'** mayor o igual que todos los términos de la sucesión. Por lo que **todos los términos de la sucesión están comprendidos entre k y K'**. $\mathbf{k \leq a_n \leq K'}$

Ejemplos de sucesiones

$\mathbf{a_n = 1, 2, 3, 4, 5, ...n}$

Es creciente.

Está acotada inferiormente

Cotas inferiores: 1, 0, -1, ...

El mínimo es 1.

No está acotada superiormente.

Divergente

b_n = -1, -2,-3, -4, -5, ... -n

Es decreciente.

Está acotada superiormente

Cotas superiores: -1, 0, 1, ...

El máximo es -1.

No está acotada inferiormente.

Divergente

c_n = 2, 3/2, 4/3, 5/4, ..., n+1 /n

Es decreciente.

Está acotada superiormente

Cotas superiores: 2, 3, 4, ...

El máximo es 2.

Está acotada inferiormente

Cotas inferiores: 1, 0, -1, ...

El ínfimo es 1.

Convergente, límite = 1.

d_n= 2, -4, 8, -16, 32, ..., $(-1)^{n-1}\ 2^n$

No es monótona.

No está acotada.

No es convergente ni divergente.

Progresiones aritméticas

Una progresión aritmética es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado diferencia que se representa por d.

8, 3, -2, -7, -12, ...

3 - 8 = -5

-2 - 3 = -5

-7 - (-2) = -5

-12 - (-7) = -5

d= -5.

Término general de una progresión aritmética

1 Si conocemos el 1^er^ término.

$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}$

8, 3, -2, -7, -12, ..

a_n= 8 + (n-1) (-5) = 8 -5n +5 = = **-5n + 13**

2 Si conocemos el valor que ocupa cualquier **otro término** de la progresión.

$\mathbf{a_n = a_k + (n - k) \cdot d}$

a_4= -7 y d= -5

a_n = -7+ (n - 4) · (-5)= -7 -5n +20 = **-5n + 13**

Interpolación de términos en una progresión aritmética

Interpolar medios diferenciales o aritméticos entre dos números, es construir una progresión aritmética que tenga por extremos los números dados.

Ejemplo:

Interpolar tres medios aritméticos entre 8 y -12.

Hallamos d=-5 sabiendo que el primer término es 8 y el quinto -12, y construimos la sucesión

8, **3, -2, -7** , -12.

Suma de términos de una progresión aritmética

Sean **a_i y a_j dos términos equidistantes de los extremos**, se cumple que la **suma de términos equidistantes es igual a la suma de los extremos**.

$$a_i + a_j = a_1 + a_n$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_1 + a_n$$

8, 3, -2, -7, -12, ...

3 + (-7) = (-2) + (-2) = 8 + (-12)

-4 = -4 = -4

A partir de esta propiedad se deduce la expresión de la **suma de los n términos de una progresión aritmética**

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Calcular la suma de los primeros 5 términos de la progresión : 8, 3, -2, -7, -12, ...

$$S_5 = \frac{(8-12)5}{2} = \frac{-20}{2} = -10$$

Progresiones geométricas

Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija r, llamada razón.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Si tenemos la sucesión: 3, 6, 12, 24, 48, ...

6 / 3 = 2

12 / 6 = 2

24 / 12 = 2

48 / 24 = 2

r= 2.

Término general de una progresión geométrica

1 Si conocemos el 1er término.

$\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

3, 6, 12, 24, 48, ..

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n \cdot 2^{-1} = \mathbf{(3/2) \cdot 2^n}$

2 Si conocemos el valor que ocupa cualquier otro término de la progresión.

$\mathbf{a_n = a_k \cdot r^{n-k}}$

$a_4 = 24$, $k=4$ y $r=2$.

$a_n = a_4 \cdot r^{n-4}$

$a_n = 24 \cdot 2^{n-4} = (24/16) \cdot 2^n = (3/2) \cdot 2^n$

Interpolación de términos en una progresión geométrica

Interpolar medios geométricos o proporcionales entre dos números, es construir una progresión geométrica que tenga por extremos los números dados.

Interpolar tres medios geométricos entre 3 y 48.

Ejemplo:

Calculamos la razón $r=2$ y tendremos

3, **6, 12, 24** , 48.

Suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Calcular la suma de los primeros 5 términos de la progresión : 3, 6, 12, 24, 48, ...

$$S_5 = \frac{48 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 93$$

Suma de los términos de una progresión geométrica decreciente

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

Calcular la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente ilimitada:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Producto de n términos

Sean a_i y a_j dos términos equidistantes de los extremos, se cumple que el producto de términos equidistantes es igual al producto de los extremos.

$$a_i \cdot a_j = a_1 \cdot a_n$$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

$$a_3 \cdot a_{n-2} = a_2 \cdot a_{n-1} = \ldots = a_1 \cdot a_n$$

3, 6. 12, 24, 48, ...

$48 \cdot 3 = 6 \cdot 24 = 12 \cdot 12$

$144 = 144 = 144$

A partir de esta propiedad tendremos la expresión del **producto de los n términos de una progresión geométrica**.

$$P = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Calcular el producto de los primeros 5 términos de la progresión: 3, 6, 12, 24, 48, ...

$$P_5 = \sqrt{(3\cdot 48)^5} = \sqrt{(3\cdot 3\cdot 2^4)^5} = \sqrt{3^{10}\cdot 2^{20}} = 3^5\cdot 2^{10} = 248832$$

Término general de una sucesión

1 Comprobar si la **sucesión** es una **progresión aritmética**.

8, 3, -2, -7, -12, ...

3 - 8= -5

-2 - 3 = -5

-7 - (-2) = -5

-12 - (-7) = -5

d= -5.

a_n= 8 + (n - 1) (-5) = 8 -5n +5 = **-5n + 13**

2 Comprobar si la **sucesión** es una **progresión geométrica**.

3, 6, 12, 24, 48, ...

6 / 3 = 2

12 / 6 = 2

24 / 12 = 2

48 / 24 = 2

r= 2.

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

3 Comprobar si los términos de la **sucesión** son **cuadrados perfectos**.

4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, ...

Observamos que las bases están en **progresión aritmética**, siendo d = 1, y el exponente es constante.

$b_n = 2 + (n - 1) \cdot 1 = 2 + n - 1 = n+1$

Por lo que el **término general** es:

$a_n = (n + 1)^2$

También nos podemos encontrar con sucesiones cuyos términos son números próximos a cuadrados perfectos.

5, 10, 17, 26, 37, 50, ...

$2^2 +1$, $3^2 +1$, $4^2 +1$, $5^2 +1$, $6^2 +1$, $7^2 +1$, ...

Hallamos el **término general** como vimos en el ejemplo anterior y le sumamos 1.

$a_n = (n + 1)^2 + 1$

6, 11, 18, 27, 38, 51, ...

$2^2 +2$, $3^2 +2$, $4^2 +1$, $5^2 +2$, $6^2 +2$, $7^2 +2$, ...

$a_n = (n + 1)^2 - 1$

3, 8, 15, 24, 35, 48, ...

$2^2 -1$, $3^2 -1$, $4^2 -1$, $5^2 -1$, $6^2 -1$, $7^2 -1$, ...

$a_n = (n + 1)^2 - 1$

2, 7, 14, 23, 34, 47, ...

$2^2 -2$, $3^2 -2$, $4^2 -2$, $5^2 -2$, $6^2 -2$, $7^2 -2$, ...

$\mathbf{a_n = (n + 1)^2 - 2}$

4 Si los términos de la sucesión **cambian consecutivamente de signo**.

Si los términos impares son negativos y los pares positivos: Multiplicamos a_n por $(-1)^n$.

-4, 9, -16, 25, -36, 49, ...

$\mathbf{a_n = (-1)^n (n + 1)^2}$

Si los términos impares son positivos y los pares negativos: Multiplicamos a_n por $(-1)^{n-1}$.

4, -9, 16, -25, 36, -49, ...

$\mathbf{a_n = (-1)^{n-1} (n + 1)^2}$

5 Si los términos de la sucesión **son fraccionarios** (no siendo una progresión).

Se calcula el término general del numerador y denominador por separado.

$a_n = b_n / c_n$

2/4, 5/9, 8/16, 11/25, 14/36,...

Tenemos dos sucesiones:

2, 5, 8, 11, 14, ...

4, 9, 16, 25, 36, ...

La primera es una progresión aritmética con d= 3, la segunda es una sucesión de cuadrados perfectos.

$a_n = (3n - 1)/(n + 1)^2$