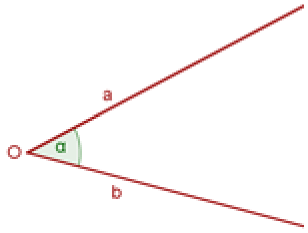
Medida de ángulos

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama **lados** y al origen común **vértice.**



El ángulo es **positivo** si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y **negativo** en caso contrario

Para medir ángulos se utilizan las siguientes unidades:

1 Grado sexagesimal (°)

Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal.

Un grado tiene 60 minutos (') y un minuto tiene 60 segundos ('').

2 Radián (rad)

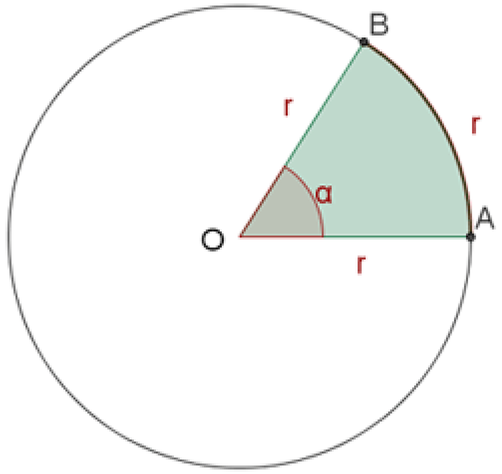
Es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio.

2π rad = 360°

π rad = 180°

$30º \longrightarrow$ rad

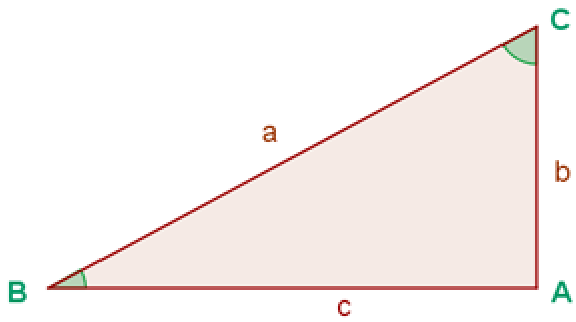
$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180°}{30°} \qquad \alpha = \frac{30°\pi}{180°} = \frac{\pi}{6} rad$$



$\pi/3$ rad $\longrightarrow$ º

$$\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = \frac{180^\circ}{\alpha} \qquad \alpha = \frac{180^\circ \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

Razones trigonométricas



Seno

Seno del ángulo B: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

Se denota por sen B.

$$\text{sen B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Coseno

Coseno del ángulo B: es la razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa.

Se denota por cos B.

$$\cos B = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Tangente

Tangente del ángulo B: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo.

Se denota por tg B.

$$\text{tg B}= \frac{\text{sen B}}{\text{cos B}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$

Cosecante

Cosecante del ángulo B: es la razón inversa del seno de B.

Se denota por cosec B.

$$\text{cosec B}= \frac{1}{\text{sen B}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Secante

Secante del ángulo B: es la razón inversa del coseno de B.

Se denota por sec B.

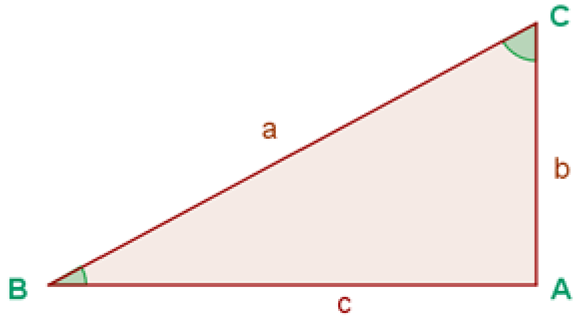
$$\text{sec B}= \frac{1}{\text{cos B}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c}$$

Cotangente

Cotangente del ángulo B: es la razón inversa de la tangente de B.

Se denota por cotg B.

$$\text{cotg B}= \frac{1}{\text{tg B}} = \frac{\text{cos B}}{\text{sen B}} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$



Circunferencia goniométrica

Se llama circunferencia goniométrica a aquélla que tiene su centro en el origen de coordenadas y su radio es la unidad. En la circunferencia goniométrica los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.

QOP y TOS son triángulos semejantes.

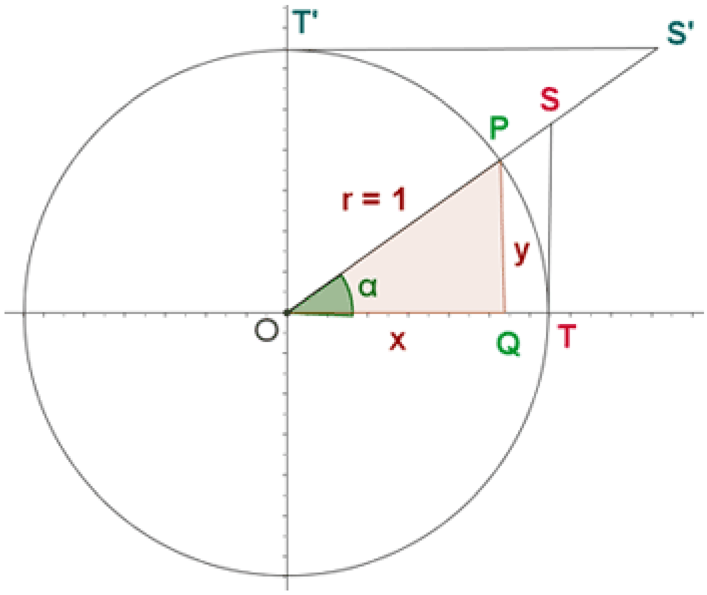
QOP y T'OS' son triángulos semejantes.

El seno es la ordenada (y).

El coseno es la abscisa (x).

-1 ≤ sen α ≤ 1

-1 ≤ cos α ≤ 1

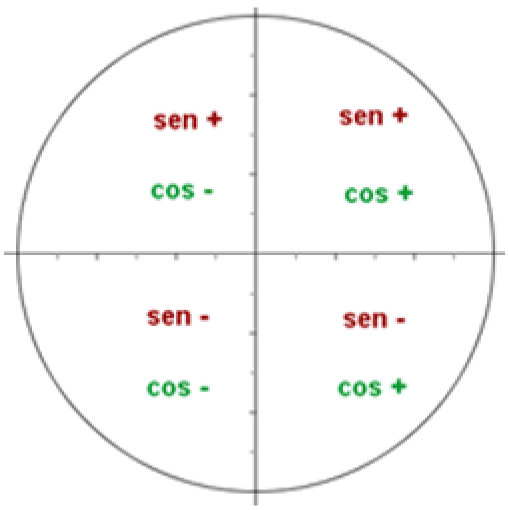


$$\text{sen } \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{r} = PQ \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{OP}{PQ} = \frac{OS'}{OT'} = \frac{OS'}{r} = OS'$$

$$\cos \alpha = \frac{OQ}{OP} = OQ \qquad \sec \alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{OS}{OT} = \frac{OS}{r} = OS$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{ST}{OT} = \frac{ST}{r} = ST \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{OQ}{PQ} = \frac{S'T'}{OT'} = \frac{S'T'}{r} = S'T'$$

Signo de las razones trigonométricas



Razones trigonométricas de 0º, 90º , 180º y 270º

α:	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	−1
cos	1	0	−1	0
tg	0	$\to\infty$	0	$\to-\infty$

Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º

Seno, coseno y tangente de 30º y 60º

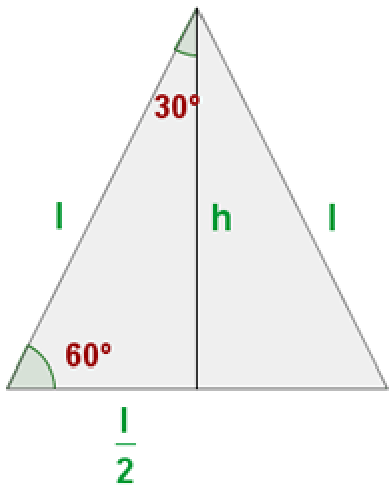
Si dibujamos un triángulo equilátero ABC, cada uno de sus tres ángulos mide 60º y, si trazamos una altura del mismo, h, el ángulo del vértice A por el que la hemos trazado queda dividido en dos iguales de 30º cada uno. Recurriendo al Teorema de Pitágoras, tenemos que la altura es:

$$h=\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3l^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,l$$

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$



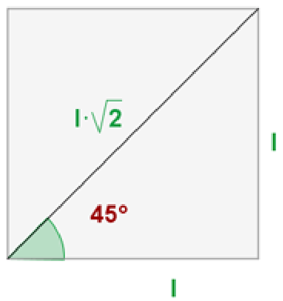
Seno, coseno y tangente de 45º

$$d = \sqrt{l^2+l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

$$\text{sen } 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$



Razones trigonométricas de ángulos notables

α:	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\to\infty$	0	$\to-\infty$

Relaciones entre ángulos

Ángulos suplementarios

Son aquéllos cuya suma es 180° ó π radianes.

$$sen\ (\pi - \alpha) = \ sen\ \alpha$$

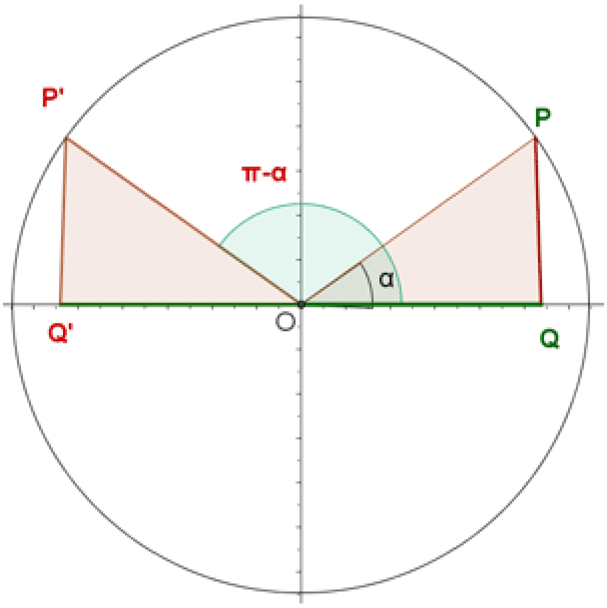
$$\cos\ (\pi - \alpha) = -\cos\ \alpha$$

$$tg\ (\pi - \alpha) = -tg\ \alpha$$

$$sen\ 150° = sen\ (180° - 30°)$$

$$\cos\ 150° = \cos\ (180° - 30°)$$

$$tg\ 150° = tg\ (180° - 30°) =$$



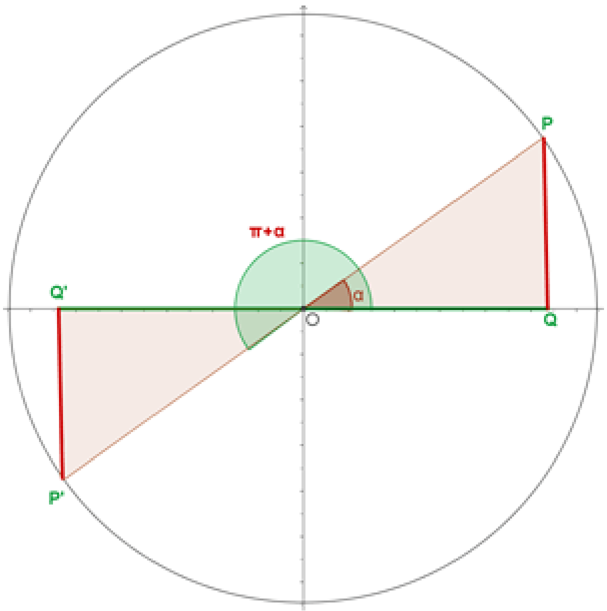
Ángulos que se diferencian en 180°

Son aquéllos cuya suma es 180° ó π radianes.

$$sen\ (\pi + \alpha) = -sen\ \alpha$$

$$\cos\ (\pi + \alpha) = -\cos\ \alpha$$

$$tg\ (\pi + \alpha) = tg\ \alpha$$



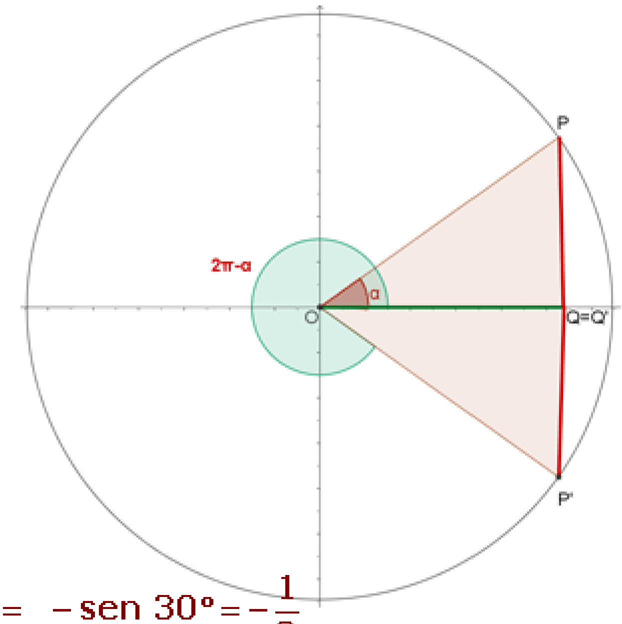
$$sen\ 210° = sen\ (180$$

$$\cos\ 210° = \cos\ (180$$

$$tg\ 210° = tg\ (180° + 30°) = \ tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ángulos opuestos

Son aquéllos cuya suma es 360º ó 2 π radianes.



$$sen\ (2\pi-\alpha)= \ -sen\ \alpha$$

$$\cos\ (2\pi-\alpha)=\cos\ \alpha$$

$$tg\ (2\pi-\alpha)=-tg\ \alpha$$

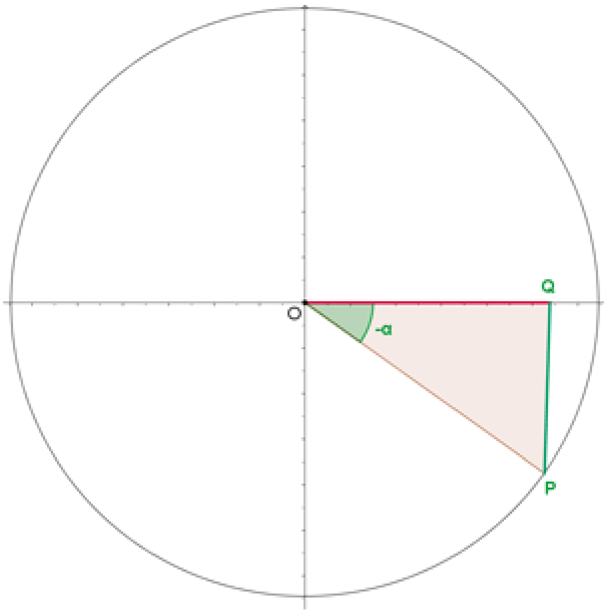
$$sen\ 330^\circ = sen\ (360^\circ-30^o)= \ -sen\ 30^o=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\ 330^\circ=\cos\ (360^\circ-30^o)= \ \cos\ 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 330^\circ=tg\ (360^\circ-30^o)=-tg\ 30^o=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ángulos negativos

El ángulo es negativo si se desplaza en el sentido del movimiento de las agujas del reloj.



$-\alpha = 360^\circ - \alpha$

$$sen\ (-\alpha)= \ -sen\ \alpha$$

$$\cos\ (-\alpha)=\cos\ \alpha$$

$$tg\ (-\alpha)=-tg\ \alpha$$

$$sen\ (-30^\circ)=-sen\ 30^o=-\frac{1}{2}$$

$$\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg(-30°) = -tg\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

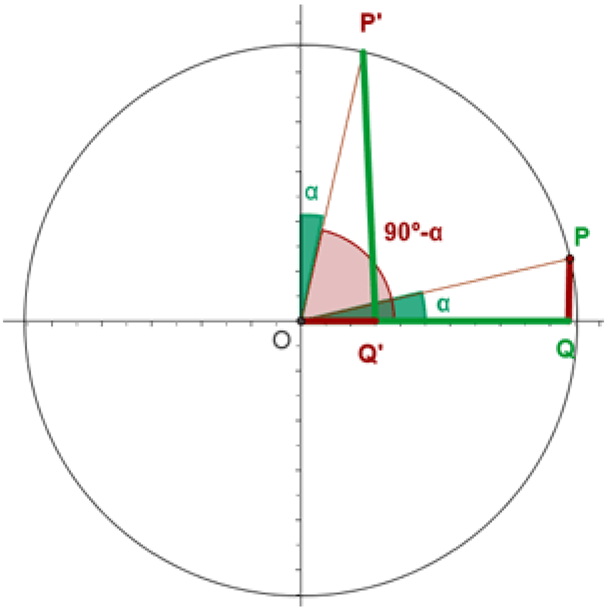
Ángulos complementarios

Son aquéllos cuya suma es 90º ó π/2 radianes.

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen\ \alpha$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cotg\ \alpha$$



$$sen\ 60° = sen\ (90° - 30°) =$$

$$\cos 60° = \cos(90° - 30°) =$$

$$tg\ 60° = tg\ (90° - 30°) = cotg\ 30° = \sqrt{3}$$

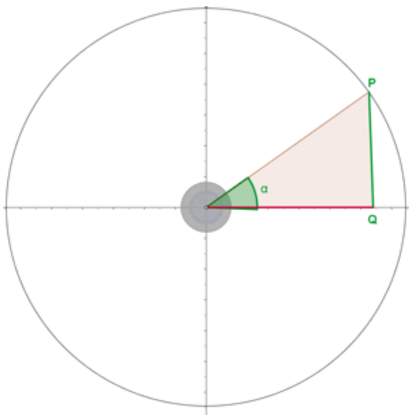
Mayores de 360º

Ángulos que se diferencian en un número entero de vueltas.

$$sen\ (\alpha + 2\pi k) = sen\ \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha$$

$$tg\ (\alpha + 2\pi k) = tg\ \alpha$$



$$\begin{array}{l|l} 750° & 360° \\ \hline 30° & 2 \end{array}$$

$$sen\ 750° = sen\ (360° \cdot 2 + 30°) = sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 750^\circ = \cos\ (360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 750^\circ = tg\ (360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) = tg\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

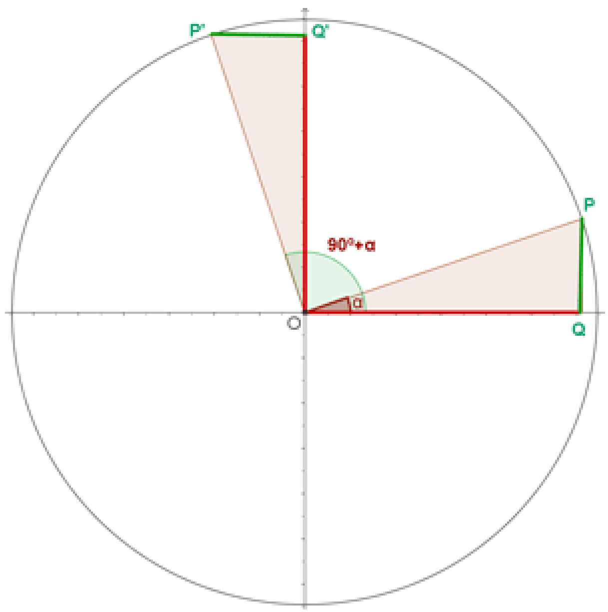
Razones trigonométricas de otros ángulos

Ángulos que difieren en 90° ó π/2 rad

$$sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -sen\ \alpha$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -cotg\ \alpha$$



$$sen\ 120^\circ = sen\ (90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos\ (90^\circ + 30^\circ) = -sen\ 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$tg\ 120^\circ = tg\ (90^\circ + 30^\circ) = -cotg\ 30^\circ = -\sqrt{3}$$

Identidades trígonométricas fundamentales

Relación seno coseno

$\cos^2 \alpha + sen^2 \alpha = 1$

Relación secante tangente

$\sec^2 \alpha = 1 + tg^2 \alpha$

Relación cosecante cotangente

$\text{cosec}^2\ \alpha = 1 + \text{cotg}^2\ \alpha$

Ejemplos de aplicación:

Sabiendo que tg α = 2, y que 180º < α <270°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$\cos\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\ \alpha = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5}$$

$$\text{sen}\ \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \text{cosec}\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{tg}\ \alpha = 2 \qquad \text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{2}$$

Sabiendo que sen α = 3/5, y que 90º <α <180°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{cosec}\ \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\cos\ \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \qquad \sec\ \alpha = -\frac{5}{4}$$

$$\text{tg}\ \alpha = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \qquad \text{cotg}\ \alpha = -\frac{4}{3}$$

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

$$sen\,(a+b) = sen\,a\ \cos b + \cos a\ sen\,b$$

$$sen\,(a-b) = sen\,a\ \cos b - \cos a\ sen\,b$$

$$\cos\,(a+b) = \cos\,a\ \cos b - sen\,a\ sen\,b$$

$$\cos\,(a-b) = \cos\,a\ \cos b + sen\,a\ sen\,b$$

$$tg\,(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b}$$

$$tg\,(a-b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a \cdot tg\,b}$$

Ejemplos de aplicación:

$$sen\,15^{o} = sen\,(45^{o} - 30^{o}) = sen\,45^{o} \cos 30^{o} - \cos 45^{o} sen\,30^{o} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$\cos\,15^{o} = \cos\,(45^{o} - 30^{o}) = \cos\,45^{o} \cos 30^{o} + sen\,45^{o} sen\,30^{o} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

$$tg\,15^{o} = \frac{tg\,45^{o} - tg\,30^{o}}{1 + tg\,45^{o} \cdot tg\,30^{o}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

$$sen\,2a = 2\ sen\,a\ \cos a$$

$$\cos\,2a = \cos^2 a - sen^2 a$$

$$tg\,2a = \frac{2\,tg\,a}{1 - tg^2 a}$$

Ejemplos de aplicación:

$$sen\ 120° = 2\ sen\ 60° \cos 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\ 120° = \cos^2 60° - sen^2 60° = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$tg\ 120° = \frac{2\,tg\ 60°}{1 - tg^2\ 60°} = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$sen\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$tg\ \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

Ejemplos de aplicación:

$$sen(22°\ 30') = sen\left(\frac{45°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos(22°\ 30') = \cos\left(\frac{45°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$tg\,(22°\,30') = tg\left(\frac{45°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = -1+\sqrt{2}$$

Transformaciones de sumas en productos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\ \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\ \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\ \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\ \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

Ejemplos de aplicación:

$$\operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 20^\circ = 2\ \operatorname{sen} 30^\circ \cos 10^\circ$$

$$\operatorname{sen} 40^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ = 2 \cos 30^\circ \operatorname{sen} 10^\circ$$

$$\cos 40^\circ + \cos 20^\circ = 2 \cos 30^\circ \cos 10^\circ$$

$$\cos 40^\circ - \cos 20^\circ = -2\ \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 10^\circ$$

Transformaciones de productos en sumas

$$\operatorname{sen} A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)\right]$$

$$\cos A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)\right]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = -\frac{1}{2}\left[\cos(A+B) - \cos(A-B)\right]$$

Ejemplos de aplicación:

$$\operatorname{sen} 3x \cdot \cos x = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x)$$

$$\cos 3x \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x)$$

$$\cos 3x \cdot \cos x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$$

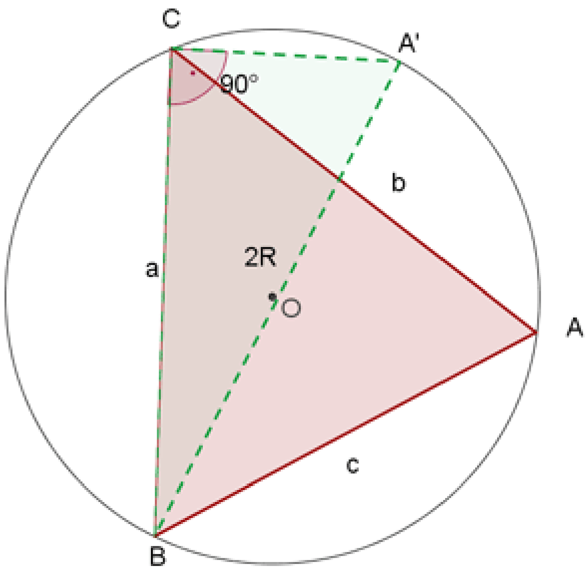
$$sen\, 3x \cdot sen\, x = -\frac{1}{2}(\cos\ 4x - \cos 2x)$$

Teoremas del seno y coseno

Teorema de los senos

Cada lado de un triángulo es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto.

$$\frac{a}{sen\, a} = \frac{b}{sen\, b} = \frac{c}{sen\, c} = 2R$$



Teorema del coseno

En un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A$$

Área de un triángulo

El área de un triángulo es la mitad del producto de una base por la altura correspondiente.

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h$$

El área de un triángulo es el semiproducto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.

$$S = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot sen\, C$$

El área de un triángulo es el cociente entre el producto de sus lados y cuatro veces el radio de su circunferencia circunscrita.

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

El área de un triángulo es igual al producto del radio de la circunferencia inscrita por su semiperímetro.

$$S = r \cdot p \qquad\qquad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

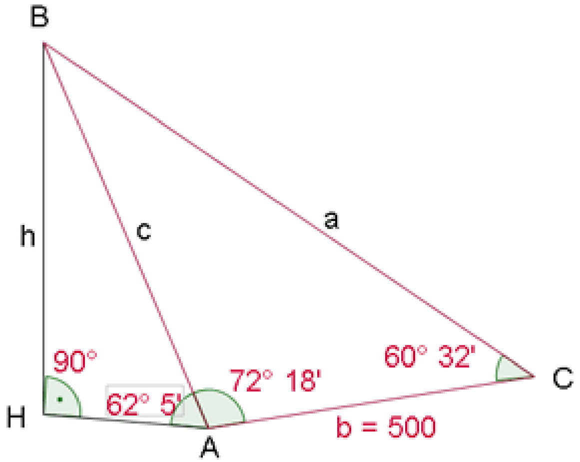
Aplicaciones de la trigonometría

Cálculo de la altura de un punto de pie inaccesible

Se fija en el plano horizontal dos puntos A y C, y se mide la distancia que los separa: b= 500 m.

Se miden con el teodolito los ángulos A y C. A= 72º 18' y C= 60º 32'.

También se mide el ángulo HAB = 62º 5'



$$ABC = 180^{o} - (72^{o}18' + 60^{o}32') = 47^{o}10'$$

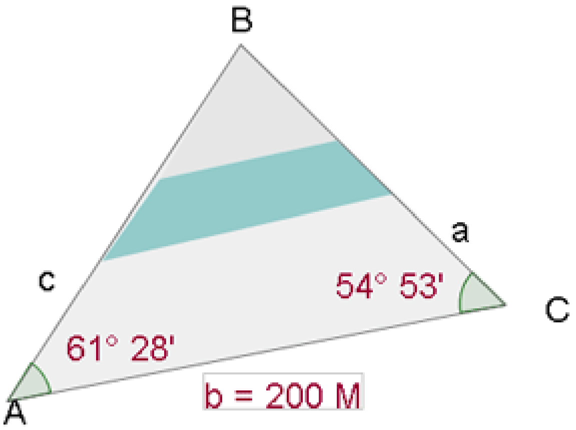
$$\frac{c}{sen\,60°32'} = \frac{500}{sen\,47°10'} \qquad c = 593.62\,m$$

$$h = 593.62 \cdot sen\,62°5' = 524.54\,m$$

Cálculo de la distancia entre dos puntos, uno de los cuales es inaccesible

Se fija en el plano horizontal dos puntos A y C, y se mide la distancia que los separa: b= 200 m.

Se miden con el teodolito los ángulos A y C. A= 61º 28' y C= 54º 53'.



$$B = 180° - (61°28' + 54°53') = 63°39'$$

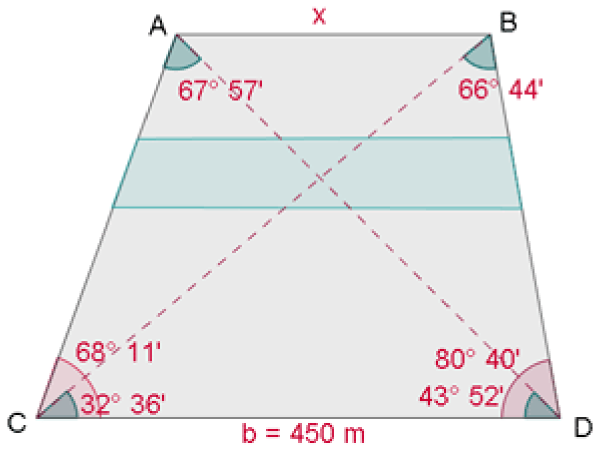
$$\frac{c}{sen\,54°53'} = \frac{200}{sen\,63°39'} \qquad c = 182.565\,m$$

Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles

Se fija en el plano horizontal dos puntos C y D, y se mide la distancia que los separa: b= 450 m.

Se miden con el teodolito los ángulos C y D. C= 68º 11' y D= 80º 40'.

También se miden los ángulos BCD = 32º 36' y ADC = 43º 52'.



$$\frac{AC}{sen\,43°52'} = \frac{450}{sen\,67°57'} \qquad AC = 336.45m$$

$$\frac{CB}{sen\,80°40'} = \frac{450}{sen\,66°44'} \qquad CB = 483.35m$$

$$x^2 = 336.45^2 + 483.35^2 - 2 \cdot 336.45 \cdot 483.35 \cdot \cos(68°11' - 32°36')$$

$$x = 286.902m$$

Ecuaciones trigonométricas

Son las ecuaciones en las que la incógnita está afectada por una función trigonométrica. Como éstas son periódicas, habrá por lo general infinitas soluciones.

Ejemplos de ecuaciones trigonométricas

$$sen\,x = 0$$

El seno es nulo en el eje de abscisas y tiene de período 360º.

$$x = arc\,sen\,0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°k & x_1 = 0°, 360°, 720°, \ldots \\ x_2 = 180° + 360°k & x_2 = 180°, 540°, 900°, \ldots \end{cases}$$

solución: $x = 0° + 180°k$

$$\cos x = 0$$

El coseno es nulo en el eje ordenadas y tiene de período 360º.

$$x = \arccos 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ k & x_1 = 90^\circ, 450^\circ, 810^\circ, \ldots \\ x_2 = 270^\circ + 360^\circ k & x_2 = 270^\circ, 630^\circ, 990^\circ, \ldots \end{cases}$$

soluciones: $x = 0^\circ + 180^\circ k$

$x = 90^\circ + 180^\circ k$

$$tg\ x = 0$$

La tangente es nula en el eje de abscisas y tiene de período 180º.

$x = arc\,tg\ 0$ $\qquad$ $x = 0^\circ + 180^\circ k$

$$sen\,x = 1$$

$x = arc\,sen\,1$ $\qquad$ $x = 90^\circ + 360^\circ k$

$$\cos x = 1$$

$x = \arccos 1$ $\qquad$ $x = 0^\circ + 360^\circ k$

$$tg\ x = 1$$

$x = arc\,tg\ 1$ $\qquad$ $x = 45^\circ + 180^\circ k$

$$sen\,x=-1$$

$x=arc\,sen\,(-1)$ $\qquad\qquad$ $x=270^\circ+360^\circ k$

$\cos\ x=-1$

$arc\cos\ (\cos\ x)=arc\cos\ (-1)$ $\qquad\qquad$ $f\circ f^{-1}=x$

$x=arc\cos\ (-1)$ $\qquad\qquad$ $x=180^\circ+360^\circ k$

$$tg\ \ x=-1$$

$x=arc\,tg\ \ (-1)$ $\qquad\qquad$ $x=135^\circ+180^\circ k$

$$sen\,x=\frac{1}{2}$$

El seno es positivo en el 1er y 2º cuadrante.

$$x=arc\,sen\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=\ \ 30^\circ+360^\circ k\\ x_2=150^\circ+360^\circ k\end{cases}$$

$$sen\,x=-\frac{1}{2}$$

$arc\,sen\,(sen\,x)=arc\,sen\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\qquad\qquad$ $f\circ f^{-1}=x$

El seno es negativo en el 2º y 4º cuadrante.

$$x=arc\,sen\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=210^\circ+360^\circ k\\ x_2=330^\circ+360^\circ k\end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

El coseno es positivo en el 1er y 4º cuadrante.

$$x = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \ \ 60^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

El coseno es negativo en el 2º y 3er cuadrante.

$$x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 120^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

Ejercicios de ecuaciones trigonométricas

Resolver las ecuaciones trigonométricas:

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} sen\, 60^\circ \\ sen\, 120^\circ \end{cases}$$

$$x + 45^\circ = 60^\circ \qquad x_1 = 15^\circ + 360^\circ k$$

$$x + 45^\circ = 120^\circ \qquad x_2 = 75^\circ + 360^\circ k$$

$$3sen^2 x - 5sen\, x + 2 = 0$$

$$sen\, x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$sen\ x = 1 \qquad x = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$sen\ x = \frac{2}{3} \qquad x = \begin{cases} 41^\circ 48' 37'' + 360^\circ k \\ 138^\circ 11' 23'' + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\cos 2x = 1 + 4 sen\, x$$

$$\cos^2 x - sen^2 x = 1 + 4 sen\, x$$

$$1 - sen^2 x - sen^2 x = 1 + 4 sen\, x$$

$$2 sen^2 x + 4 sen\, x = 0$$

$$2 sen\, x\,(sen\, x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} sen\, x = 0 \\ sen\, x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = arcsen\, 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°k \\ x_2 = 180° + 360°k \end{cases} \qquad x = 0° + 180°k$$

$$x = arcsen(-2)$$ Sin solución

$$tg\, 2x = -tg\, x$$

$$\frac{2tg\, x}{1 - tg^2 x} = -tg\, x$$

$$tg\, x\,(tg^2 x - 3) = 0$$

$$tg\, x = 0 \qquad x = 0° + 180°k$$

$$tg\, x = \pm\sqrt{3} \qquad \begin{cases} x = 60° + 180°k \\ x = 120° + 180°k \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones trigonométricas

$$\begin{cases} sen\, x + sen\, y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ sen\, x - sen\, y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

Por reducción:

$$e_1 + e_2 \qquad 2 sen\, x = \sqrt{3} \qquad sen\, x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \begin{cases} x = 60° + 360°k \\ x = 120° + 360°k \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg\,x + tg\,y = 1 \\ \text{cotg}\,(x+y) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1}{tg\,(x+y)} = \frac{3}{4} \qquad tg\,(x+y) = \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} tg\,x + tg\,y = 1 \\ \dfrac{1}{1 - tgx \cdot tg\,y} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\,y = 1 - tg\,x \\ 4tgx \cdot tg\,y = 1 \end{cases}$$

$$4tg^2\,x - 4tg\,x + 1 = 0 \qquad (2tg\,x - 1)^2 = 0$$

$$tg\,x = \frac{1}{2} \qquad x = 26°33'54'' + 180°k$$

$$tg\,y = \frac{1}{2} \qquad x = 26°33'54'' + 180°k$$

$$\begin{cases} sen\,x \cdot \cos y + \cos x \cdot sen\,y = 1 \\ sen\,x \cdot \cos y - \cos x \cdot sen\,y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen\,(x+y) = 1 \\ sen\,(x-y) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 90° \\ x - y = 30° \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2x &= 120° + 360°k \\ x &= 60° + 180°k \\ y &= 30° + 180°k \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + y = 90° \\ x - y = 150° \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2x &= 240° + 360°k \\ x &= 120° + 180°k \\ y &= -30° + 180°k \end{aligned}$$