Ecuaciones de 2º grado

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es toda expresión de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Se resuelve mediante la siguiente fórmula: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{12}{4} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si es a<0, es más práctico multiplicar los dos miembros por (−1).

$$-x^2 + 7x - 10 = 0$$

$$(-1) \cdot (-x^2 + 7x - 10) = (-1) \cdot 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Se dice que una ecuación de segundo grado es **incompleta cuando alguno de los coeficientes, b o c, o ambos, son iguales a cero.**

Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas

$ax^2 = 0$

La solución es x = 0.

$2x^2 = 0 \qquad x = 0$

$\frac{2}{5}x^2 = 0 \qquad x = 0$

$ax^2 + bx = 0$

Extraemos factor común x:

$x(ax + b) = 0$

$x = 0$

$ax + b = 0 \qquad x = \frac{-b}{a}$

$x^2 - 5x = 0$

$x(x - 5) = 0$

$x = 0$

$x - 5 = 0 \qquad x = 5$

$2x^2 - 6x = 0$

$2x(x - 3) = 0$

$2x = 0 \qquad x = 0$

$x - 3 = 0 \qquad x = 3$

$ax^2 + c = 0$

Despejamos:

$$ax^2 = -c \qquad x^2 = \frac{-c}{a} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \begin{matrix} \nearrow x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \\ \searrow x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{matrix}$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25 \qquad x = \pm\sqrt{25} \begin{cases} \nearrow x_1 = \sqrt{25} = 5 \\ \searrow x_2 = -\sqrt{25} = -5 \end{cases}$$

$$2x^2 + 8 = 0$$

$$2x^2 = -8 \qquad x^2 = -4 \qquad x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

Estudio de las soluciones de la ecuación de 2º grado

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\boxed{b^2 - 4ac}}}{2a} \rightarrow \text{Discriminante}$$

$b^2 - 4ac$ se llama **DISCRIMINANTE** de la ecuación y permite averiguar en cada ecuación el número de soluciones. Podemos distinguir tres casos:

$b^2 - 4ac > 0$

La ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$b^2 - 4ac = 0$

La ecuación tiene una solución doble.

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

b^2 – 4ac < 0

La ecuación no tiene soluciones reales.

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{1} \notin \mathbb{R}$$

Propiedades de las soluciones de la ecuación de 2º grado

La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

El producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Factorización de un trinomio de segundo grado

a x^2 + bx +c = 0

a · (x -x_1) · (x -x_2) = 0

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$$