

Ecuaciones

Igualdad

Una **IGUALDAD** se compone de dos expresiones unidas por el signo igual.

$$2x + 3 = 5x - 2$$

Una **igualdad** puede ser:

Falsa:

$$2x + 1 = 2 \cdot (x + 1) \quad 2x + 1 = 2x + 2 \quad 1 \neq 2.$$

Cierta

$$2x + 2 = 2 \cdot (x + 1) \quad 2x + 2 = 2x + 2 \quad 2 = 2$$

Identidad

Una **identidad** es una igualdad que es cierta para cualquier valor de las letras.

$$2x + 2 = 2 \cdot (x + 1) \quad 2x + 2 = 2x + 2 \quad 2 = 2$$

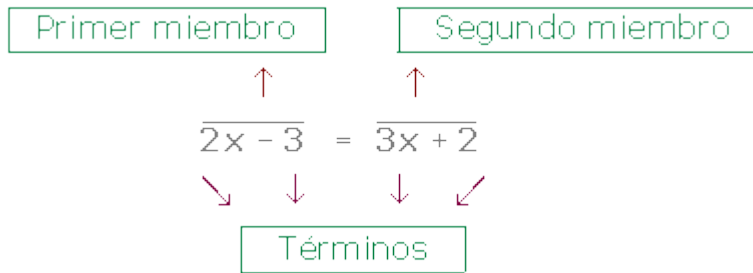
Ecuación

Una **ecuación** es una igualdad que se cumple para algunos valores de las letras.

$$x + 1 = 2 \quad x = 1$$

Los **MIEMBROS** de una ecuación son **cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual.**

Los **TÉRMINOS** son los sumandos que forman los miembros.



Las **INCÓGNITAS** son las letras que aparecen en la ecuación.

Las **SOLUCIONES** son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

$$2x - 3 = 3x + 2 \quad x = -5$$

$$2 \cdot (-5) - 3 = 3 \cdot (-5) + 2$$

$$-10 - 3 = -15 + 2 \quad -13 = -13$$

El **grado** de una ecuación es el mayor de los grados de los monomios que forman sus miembros.

Tipos de ecuaciones según su grado

$$5x + 3 = 2x + 1 \quad \text{Ecuación de primer grado.}$$

$$5x + 3 = 2x^2 + x \quad \text{Ecuación de segundo grado.}$$

$$5x^3 + 3 = 2x + x^2 \quad \text{Ecuación de tercer grado.}$$

$$5x^3 + 3 = 2x^4 + 1 \quad \text{Ecuación de cuarto grado.}$$

Clasificación de ecuaciones

1. Ecuaciones polinómicas enteras

Las ecuaciones polinómicas son de la forma $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio.

Grado de una ecuación

El **grado** de una ecuación es el **mayor de los grados de los monomios que forman sus miembros.**

Tipos de ecuaciones polinómicas

1.1 Ecuaciones de primer grado o lineales

Son del tipo **$ax + b = 0$** , con $a \neq 0$, ó cualquier otra ecuación en la que al operar, trasponer términos y simplificar adoptan esa expresión.

$$(x + 1)^2 = x^2 - 2$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2$$

$$2x + 1 = -2$$

$$**2x + 3 = 0**$$

1.2 Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas

Son ecuaciones del tipo **$ax^2 + bx + c = 0$** , con $a \neq 0$.

Ecuaciones de segundo grado incompletas

$$**ax^2 = 0**$$

$$**ax^2 + b = 0**$$

$$**ax^2 + bx = 0**$$

1.3 Ecuaciones de tercer grado

Son ecuaciones del tipo **$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$** , con $a \neq 0$.

1.4 Ecuaciones de cuarto grado

Son ecuaciones del tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, con $a \neq 0$.

Ecuaciones bicuadradas

Son ecuaciones de cuarto grado que no tiene términos de grado impar.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ con } a \neq 0.$$

1.5 Ecuaciones de grado n

En general, las ecuaciones de grado n son de la forma:

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$

2. Ecuaciones polinómicas racionales

Las ecuaciones polinómicas son de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, donde P(x) y Q(x) son polinomios.

$$\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x - 1} = 0$$

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

$$2x - 3 = 3x + 2 \quad x = -5$$

$$x + 3 = -2 \quad x = -5$$

Criterios de equivalencia de ecuaciones

1. Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o se les resta una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada.

$$x + 3 = -2$$

$$x + 3 - 3 = -2 - 3$$

$$x = -5$$

2. Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o se les divide una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada.

$$5x + 10 = 15$$

$$(5x + 10) : 5 = 15 : 5$$

$$x + 2 = 3$$

$$x + 2 - 2 = 3 - 2$$

$$x = 1$$

Resolución de ecuaciones de primer grado

En general para **resolver una ecuación de primer grado** debemos seguir los siguientes **pasos**:

1º Quitar paréntesis.

2º Quitar denominadores.

3º Agrupar los términos en x en un miembro y los términos independientes en el otro.

4º Reducir los términos semejantes.

5º Despejar la incógnita.

$$2x = 6$$

Despejamos la incógnita:

$$x = \frac{6}{2} \quad x = 3$$

$$2x - 3 = 6 + x$$

Agrupamos los términos semejantes y los independientes, y sumamos:

$$2x - x = 6 + 3 \quad x = 9$$

$$2(2x - 3) = 6 + x$$

Quitamos paréntesis:

$$4x - 6 = 6 + x$$

Agrupamos términos y sumamos:

$$4x - x = 6 + 6 \quad 3x = 12$$

Despejamos la incógnita:

$$x = \frac{12}{3} \quad x = 4$$

$$\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$$

Quitamos denominadores, para ello en primer lugar hallamos el mínimo común múltiplo.

$$\text{m.c.m.}(6, 2) = 6$$

$$x - 1 - 3(x - 3) = -6$$

Quitamos paréntesis, agrupamos y sumamos los términos semejantes:

$$x - 1 - 3x + 9 = -6; \quad x - 3x = -6 - 9 + 1; \quad -2x = -14$$

Despejamos la incógnita:

$$2x = 14 \quad x = \frac{14}{2} \quad x = 7$$

$$\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 19$$

Quitamos paréntesis y simplificamos:

$$\frac{6}{4}x + \frac{12}{4} = x + 19 \quad \frac{3}{2}x + 3 = x + 19$$

Quitamos denominadores, agrupamos y sumamos los términos semejantes:

$$3x + 6 = 2x + 38 \quad 3x - 2x = 38 - 6 \quad x = 32$$

$$2 - \left[-2 \cdot (x + 1) - \frac{x - 3}{2} \right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3x$$

Quitamos corchete:

$$2 - \left(-2x - 2 - \frac{x - 3}{2} \right) = \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3x$$

Quitamos paréntesis:

$$2 + 2x + 2 + \frac{x - 3}{2} = \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3x$$

Quitamos denominadores:

$$24 + 24x + 24 + 6 \cdot (x - 3) = 8x - (5x - 3) + 36x$$

Quitamos paréntesis:

$$24 + 24x + 24 + 6x - 18 = 8x - 5x + 3 + 36x$$

Agrupamos términos:

$$24x + 6x - 8x + 5x - 36x = 3 - 24 - 24 + 18$$

Sumamos:

$$-9x = -27$$

Dividimos los dos miembros por: -9

$$x = 3$$

Problemas de ecuaciones de primer grado

Expresiones algebraicas comunes

El **doble o duplo** de un número: $2x$

El **triple** de un número: $3x$

El **cuádruplo** de un número: $4x$

La **mitad** de un número: $x/2$.

Un **tercio** de un número: $x/3$.

Un **cuarto** de un número: $x/4$.

Un número es **proporcional** a 2, 3, 4, ...: $2x, 3x, 4x, \dots$

Un número al **cuadrado**: x^2

Un número al **cubo**: x^3

Dos números **consecutivos**: x y $x + 1$.

Dos números **consecutivos pares**: $2x$ y $2x + 2$.

Dos números **consecutivos impares**: $2x + 1$ y $2x + 3$.

Descomponer 24 en dos partes: x y $24 - x$.

La **suma** de dos números es 24: x y $24 - x$.

La **diferencia** de dos números es 24: x y $24 + x$.

El **producto** de dos números es 24: x y $24/x$.

El **cociente** de dos números es 24; x y $24 \cdot x$.

Problemas geométricos con ecuaciones de primer grado

Halla el valor de los tres ángulos de un triángulo sabiendo que B mide 40° más que C y que A mide 40° más que B.

$$C \rightarrow x$$

$$B \rightarrow x + 40$$

$$A \rightarrow x + 40 + 40 = x + 80$$

$$x + x + 40 + x + 80 = 180; \quad x + x + x = 180 - 40 - 80;$$

$$3X = 60; \quad X = 20$$

$$C = 20^\circ \quad B = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ \quad A = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$$

Problemas de mezclas

$$C_1 \longrightarrow 1^a \text{ cantidad. } C_1 = x$$

$$C_2 \longrightarrow 2^a \text{ cantidad. } C_2 = C_m - x$$

$$C_m \longrightarrow \text{Cantidad de la mezcla } C_m = C_1 + C_2$$

$$P_1 \longrightarrow \text{Precio de la } 1^a \text{ cantidad}$$

$$P_2 \longrightarrow \text{Precio de la } 2^a \text{ cantidad}$$

P_m \longrightarrow Precio de la mezcla

$$C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2 = C_m \cdot P_m$$

También podemos poner los datos en una tabla

	Cantidad	Precio	Coste
1ª sustancia	C_1	P_1	$C_1 \cdot P_1$
2ª sustancia	C_2	P_2	$C_2 \cdot P_2$
Mezcla	$C_1 + C_2$	P	$C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2$

$$C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2 = (C_1 + C_2) \cdot P_m$$

Un comerciante tiene dos clases de café, la primera a 40 € el kg y la segunda a 60 € el kg.

¿Cuántos kilogramos hay que poner de cada clase de café para obtener 60 kilos de mezcla a 50 € el kg?

	1ª clase	2ª clase	Total
Nº de kg	x	$60 - x$	60
Valor	$40 \cdot x$	$60 \cdot (60 - x)$	$60 \cdot 50$

$$40x + 60 \cdot (60 - x) = 60 \cdot 50$$

$$40x + 3600 - 60x = 3000; \quad -60x + 40x = 3000 - 3600; \quad 20x = 600$$

$$x = 30; \quad 60 - 30 = 30$$

Tenemos que mezclar 30 kg de la 1ª clase y otros 30 de la 2ª clase .

Problemas de aleaciones

La ley de la aleación es la relación entre el peso del metal fino, es decir, más valioso, y el peso total.

Se resuelven del mismo modo que los problemas de mezclas, teniendo en cuenta que la ley de la aleación equivale al precio de la mezcla.

$$C_1 \cdot L_1 + C_2 \cdot L_2 = (C_1 + C_2) \cdot L_a$$

Se tienen dos lingotes de plata, uno de ley 0.750 y otro de ley 0.950. ¿Qué peso hay que tomar de cada lingote para obtener 1800 g de plata de ley 0.900?

	1ª ley	2ª ley	Total
Nº de g	x	1800 - x	1800
Plata	0.750 · x	0.950 · (1800-x)	0.900 · 1800

$$0.750 \cdot x + 0.950 \cdot (1800 - x) = 0.9 \cdot 1800$$

$$0.750x + 1710 - 0.950x = 1620$$

$$0.750x - 0.950x = 1620 - 1710$$

$$-0.2x = -90 \quad x = 450$$

$$1^\text{ª ley} \rightarrow 450 \text{ g}$$

$$2^\text{ª ley} \rightarrow 1350 \text{ g}$$

Problemas de grifos

En una hora el primer grifo llena $1/t_1$ del depósito.

En una hora el segundo grifo llena $1/t_2$ del depósito.

Si existe un desagüe

En una hora el desagüe vacía $1/t_3$ del depósito.

En una hora los dos grifos juntos habrán llenado:

Sin desagüe

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{x}$$

Con desagüe

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3} = \frac{1}{x}$$

Un grifo tarda en llenar un depósito tres horas y otro grifo tarda en llenarlo cuatro horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenar los dos grifos juntos el depósito?

En una hora el primer grifo llena $1/3$ del depósito.

En una hora el segundo grifo llena $1/4$ del depósito.

En una hora los dos grifos juntos habrán llenado:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{4+3}{12} = \frac{1}{x} \qquad \frac{7}{12} = \frac{1}{x}$$

$$7x = 12$$

$$x = 12/7 \text{ horas}$$

Problemas de móviles

Para plantear problemas sobre móviles que llevan velocidad constante se utilizan las fórmulas del movimiento rectilíneo uniforme:

espacio = velocidad × tiempo

$$e = v \cdot t$$

1^{er} caso

Los móviles van en sentido contrario.



$$e_{AC} + e_{CB} = e_{AB}$$

Dos ciudades A y B distan 300 km entre sí. A las 9 de la mañana parte de la ciudad A un coche hacia la ciudad B con una velocidad de 90 km/h, y de la ciudad B parte otro hacia la ciudad A con una velocidad de 60 km/h. Se pide:

1 El tiempo que tardarán en encontrarse.

$$90t + 60t = 300 \quad 150t = 300 \quad \mathbf{t = 2 \text{ horas}}$$

2 La hora del encuentro.

Se encontraran a las **11 de la mañana** .

3 La distancia recorrida por cada uno.

$$e_{AC} = 90 \cdot 2 = \mathbf{180 \text{ km}}$$

$$e_{CB} = 60 \cdot 2 = \mathbf{120 \text{ km}}$$

2º caso

Los móviles van en el mismo sentido.



$$e_{AC} - e_{BC} = e_{AB}$$

Dos ciudades A y B distan 180 km entre sí. A las 9 de la mañana sale de un coche de cada ciudad y los dos coches van en el mismo sentido. El que sale de A circula a 90 km/h, y el que sale de B va a 60 km/h. Se pide:

1 El tiempo que tardarán en encontrarse.

$$90t - 60t = 180 \quad 30t = 180 \quad t = 6 \text{ horas}$$

2 La hora del encuentro.

Se encontraran a las **7 de la tarde** .

3 La distancia recorrida por cada uno.

$$e_{AB} = 90 \cdot 6 = \mathbf{540 \text{ km}}$$

$$e_{BC} = 60 \cdot 6 = \mathbf{360 \text{ km}}$$

3º caso

Los móviles parten del mismo punto y con el mismo sentido.

$$e_1 = e_2$$

Un coche sale de la ciudad A a la velocidad de 90 km/h. Tres horas más tarde sale de la misma ciudad otro coche en persecución del primero con una velocidad de 120 km/h. Se pide:

1 El tiempo que tardará en alcanzarlo.

$$90t = 120 \cdot (t - 3)$$

$$90t = 120t - 360 \quad -30t = -360 \quad \mathbf{t = 12 \text{ horas}}$$

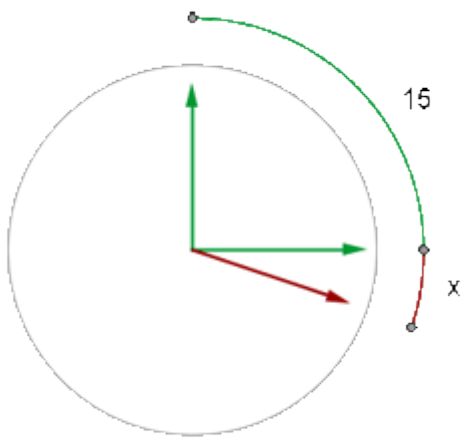
2 La distancia a la que se produce el encuentro.

$$e_1 = 90 \cdot 12 = \mathbf{1080 \text{ km}}$$

Problemas de relojes

El ángulo o arco descrito que recorre el minuterero es siempre 12 veces mayor que el arco que describe la aguja horaria.

Un reloj marca las 3 en punto. ¿A qué hora entre las 3 y las 4 se superpondrán las agujas?



x es el arco que describe la aguja horaria.

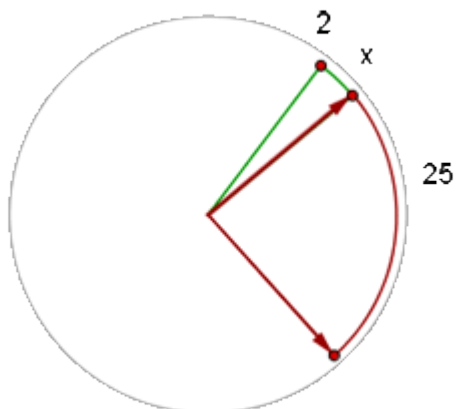
(15 + x) es el arco que describe el minuterero.

$$15 + x = 12x$$

$$x = 15/11 \text{ min}$$

Las agujas se superpondrán a la **3 h 16 min 21 s**

Un reloj marca las 2 en punto. ¿A qué hora formarán sus agujas por primera vez un ángulo recto?



Las agujas del reloj forman un ángulo recto a las 2 h 25 min y un poco más, que llamaremos x.

x es el arco que describe la aguja horaria.

25 + x, es el arco que describe el minutero.

$$25 + x = 12x$$

$$x = 25/11 \text{ min}$$

Las agujas del reloj conformarán un ángulo de 90° a las **2h 27 min 16 s.**

Ecuaciones de 2º grado

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es toda expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0.$$

Se resuelve mediante la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

$\nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3$
 $\searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} =$$

$\nearrow x_1 = \frac{12}{4} = 3$
 $\searrow x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Si es $a < 0$, es más práctico multiplicar los dos miembros por (-1) .

$$-x^2 + 7x - 10 = 0$$

$$(-1) \cdot (-x^2 + 7x - 10) = (-1) \cdot 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} =$$

$\nearrow x_1 = \frac{10}{2} = 5$
 $\searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2$

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Se dice que una ecuación de segundo grado es **incompleta** cuando alguno de los coeficientes, **b** o **c**, o ambos, son iguales a cero.

Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas

$$ax^2 = 0$$

La solución es $x = 0$.

$$2x^2 = 0 \quad x = 0$$

$$\frac{2}{5}x^2 = 0 \quad x = 0$$

$$\mathbf{ax^2 + bx = 0}$$

Extraemos factor común x:

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0$$

$$ax + b = 0 \quad x = \frac{-b}{a}$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0$$

$$x = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad x = 5$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x - 3) = 0$$

$$2x = 0 \quad x = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad x = 3$$

$$\mathbf{ax^2 + c = 0}$$

Despejamos:

$$ax^2 = -c \quad x^2 = \frac{-c}{a} \quad x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \begin{array}{l} \nearrow X_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \\ \searrow X_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{array}$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25 \quad x = \pm\sqrt{25} \quad \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \sqrt{25} = 5 \\ \searrow x_2 = -\sqrt{25} = -5 \end{array}$$

$$2x^2 + 8 = 0$$

$$2x^2 = -8 \quad x^2 = -4 \quad x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

Estudio de las soluciones de la ecuación de 2º grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \text{Discriminante}$$

$b^2 - 4ac$ se llama **DISCRIMINANTE** de la ecuación y permite averiguar en cada ecuación el número de soluciones. Podemos distinguir tres casos:

$$b^2 - 4ac > 0$$

La ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{array}$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

La ecuación tiene una solución doble.

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

La ecuación no tiene soluciones reales.

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{1} \notin \mathbb{R}$$

Propiedades de las soluciones de la ecuación de 2º grado

La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

El producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Factorización de un trinomio de segundo grado

$$a x^2 + bx + c = 0$$

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{matrix}$$

$$(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$$