# Matrices

***Ejercicio nº 1.-***

**Dadas las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**a) Comprueba que** $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

**b) Halla una matriz,** $X$**, tal que** $AX = B$**.**

***Ejercicio nº 2.-***

**Resuelve el siguiente sistema matricial:**

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 3.-***

**Calcula los valores de** $x$ **para que la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

**verifique la ecuación** $A^2 - 6A + 9I = 0$**, donde** $I$ **y** $O$ **son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.**

***Ejercicio nº 4.-***

**Halla los valores de** $a$ **y** $b$ **en la matriz** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$**, de forma que** $A^2 - 2A = B$**,**
**siendo** $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

***Ejercicio nº 5.-***

**Si** $I$ **es la matriz identidad de orden 2 y** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$**, halla el valor que deben tener** $x$ **e** $y$
**para que se cumpla la igualdad** $A^2 - xA - yI = 0$.

***Ejercicio nº 6.-***

**Calcula la inversa de la matriz** $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}.$

***Ejercicio nº 7.-***

**Calcula la inversa de la matriz** $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$

***Ejercicio nº 8.-***

**Calcula la inversa de la matriz** $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\ 2 & 1 & 7\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}.$

***Ejercicio nº 9.-***

**Calcula la inversa de la matriz** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}.$

***Ejercicio nº 10.-***

**Calcula la inversa de la matriz** $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$

***Ejercicio nº 11.-***

**Calcula una matriz** $X$ **tal que** $AX+B=2A$, **siendo** $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$

***Ejercicio nº 12.-***

**Halla la matriz** $X$ **que verifica** $BX=A$, **siendo** $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ **y** $A=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}.$

***Ejercicio nº 13.-***

**Resuelve la ecuación matricial** $XA=B$, **siendo** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$

***Ejercicio nº 14.-***

**Halla la matriz** $X$ **que verefica** $AX+B=0$, **siendo** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$

**y** $0$ **la matriz nula.**

***Ejercicio nº 15.-***

**Resuelve la ecuación matricial** $2A=AX+B$, **siendo** $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$

***Ejercicio nº 16.-***

**Averigua cuál es el rango de:**

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 17.-***

**Obtén el rango de la siguiente matriz:**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 18.-***

**Estudia el rango de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 19.-***

**Halla el rango de la siguiente matriz:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº20.-***

**Calcula el rango de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 21.-***

**Estudia el rango de la siguiente matriz según los valores de *a*:**

$$M = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 22.-***

**Estudia el rango de la matriz** $C = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ a & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **según los valores de** $a$.

***Ejercicio nº 23.-***

**Estudia el rango de la siguiente matriz según los valores de** $a$**:**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº24.-***

**Estudia el rango de la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ **según los valores de** $a$**.**

***Ejercicio nº 25.-***

**Estudia el rango de la matriz** $D = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & a+1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$.

***Ejercicio nº 26.-***

**Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores**

$$\{\vec{u}_1 = (2,\ -1,\ 0,\ 1);\ \vec{u}_2 = (-1,\ 0,\ 2,\ 1);\ \vec{u}_3 = (5,\ -4,\ 6,\ 7)\}$$

**y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son** $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$**.**

***Ejercicio nº 27.-***

**a) Halla el rango de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**b) Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores:**

$$\vec{u}_1 = (2,\ -1,\ 3,\ 4);\ \vec{u}_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 2) \ \text{ y } \ \vec{u}_3 = (-1,\ 3, 4,\ 1)$$

***Ejercicio nº 28.-***

**Estudia la dependencia lineal del conjunto de vectores:**

$$\vec{u}_1 = (1,\ 1,\ -1,\ 1);\ \vec{u}_2 = (2,\ 3,\ -2,\ 1);\ \vec{u}_3 = (1,\ 3,\ -1,\ -1)$$

***Ejercicio nº 29.-***

**Dados los vectores:**

$$\vec{u}_1 = (3,\ -1,\ 2,\ 0);\ \vec{u}_2 = (1,\ 2,\ -1,\ 1);\ \vec{u}_3 = (2,\ 1,\ 0,\ -1)$$

**Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$.**

***Ejercicio nº 30.-***

**Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 31.-***

**En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y bolígrafos, agrupándolos en tres tipos de lotes:**

**- Lote *A*: 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 bolígrafo.**
**- Lote *B*: 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 bolígrafos.**
**- Lote *C*: 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 bolígrafos.**

**Cada carpeta cuesta 6 euros, cada cuaderno 1,5 euros y cada bolígrafo 0,24 euros.**

**a) Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.**

**b) Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes *A, B* y *C.***

***Ejercicio nº 32.-***

**En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos *A, B,* y *C,* que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:**

| PRODUCTO / MATERIAL | *A* | *B* | *C* |
|---|---|---|---|
| **CHATARRA** | 8 | 6 | 6 |
| **CARBÓN** | 6 | 6 | 4 |
| **ALEACIONES** | 2 | 1 | 3 |

**Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de *A,* 4 de *B* y 3 de C.**

.

***Ejercicio nº 33.-***

**Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz *A.* La evolución de los precios de los años 1997 a 2000 viene reflejada en la matriz *B.***

**a) Hallar, si es posible, *A · B* y *B · A* e indicar que información proporciona el producto matricial.**

**b) ¿Qué información nos da el elemento $c_{34}$ de la matriz producto?**

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{PAN} & \text{AGUA} & \text{LECHE} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1997 & 1998 & 1999 & 2000 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{array}$$

***<u>Ejercicio nº 34.-</u>***

**En una compañía se utilizan tres tipos de materiales (madera, plástico y aluminio) para fabricar tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás, según la tabla:**

| | SILLA | MECEDORA | SOFÁ |
|---|---|---|---|
| MADERA | 1 unidad | 1 unidad | 1 unidades |
| PLÁSTICO | 1 unidad | 1 unidad | 2 unidades |
| ALUMINIO | 2 unidades | 3 unidades | 5 unidades |

**Obtén, matricialmente, las unidades de madera, de plástico y de aluminio que se han utilizado para fabricar 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás.**

***<u>Ejercicio nº 35.-</u>***

**Una empresa produce tres bienes *A, B,* y *C*. Tiene tres factorías y, cada una de ellas, produce los tres bienes en las cantidades por hora siguientes:**

| | FACTORÍA 1 | FACTORÍA 2 | FACTORÍA 3 |
|---|---|---|---|
| *A* | 10 unidades/hora | 20 unidades/hora | 15 unidades/hora |
| *B* | 25 unidades/hora | 25 unidades/hora | 20 unidades/hora |
| *C* | 30 unidades/hora | 25 unidades/hora | 25 unidades/hora |

**En la Factoría 1 se trabajan 8 horas diarias, la Factoría 2 funciona las 24 horas del día y en la Factoría 3 se trabajan 10 horas diarias.**

**a) Calcula matricialmente el número de unidades diarias de los bienes *A, B* y *C* que fabrica la empresa.**

**b) Si se trabaja durante 22 días cada mes, obtén matricialmente la proporción mensual de la empresa en cada uno de los bienes *A, B* y *C.***

# Soluciones Matrices

***Ejercicio nº 1.-***

**Dadas las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**a) Comprueba que** $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

**b) Halla una matriz, $X$, tal que $AX = B$.**

***Solución:***

a) Se trata de probar que $A\,A^{-1} = I$, donde $I$ es la matriz identidad de orden 3. Efectuamos el producto.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ como queriamos demostrar.}$$

b) Despejamos $X$ en la igualdad $AX = B$, multiplicando por la izquierda por $A^{-1}$:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \;\rightarrow\; IX = A^{-1}B \;\rightarrow\; X = A^{-1}B$$

Por el apartado a), conocemos $A^{-1}$; luego:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 1 \\ -18 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-9}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

***<u>Ejercicio nº 2.-</u>***

**Resuelve el siguiente sistema matricial:**

$$\mathbf{3}X - \mathbf{2}Y = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{5} & -\mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{15} & -\mathbf{4} & \mathbf{4} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{2}X + Y = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{10} & -\mathbf{5} & -\mathbf{2} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

Llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Así, el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} 3X - 2X = A \\ 2X + X = B \end{array}\right\} X = B - 2X$$

$$3X - 2(B - 2X) = A \;\rightarrow\; 3X - 2B + 4X = A \;\rightarrow\; 7X = A + 2B \;\rightarrow\; X = \frac{1}{7}(A + 2B)$$

$$Y = B - 2X = B - \frac{2}{7}(A + 2B) = B - \frac{2}{7}A - \frac{4}{7}B = \frac{3}{7}B - \frac{2}{7}A = \frac{1}{7}(3B - 2A)$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{7}(A + 2B) = \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{7}(3B - 2A) = \frac{1}{7}\left[3\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 21 & -7 & 14 \\ -28 & 0 & 21 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 3.-***

**Calcula los valores de $x$ para que la matriz:**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x} \end{pmatrix}$$

**verifique la ecuación $\boldsymbol{A^2 - 6A + 9I = 0}$, donde $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{O}$ son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.**

***Solución:***

Calculamos $A^2 - 6A + 9I$ e igualamos a 0:

$$A^2=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2-6A+9I=\begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}-6\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}+9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} x^2-6x+9 & 0 & 0 \\ 0 & x^2-6x+9 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-6x+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha de ser:

$$x^2-6x+9=0 \;\rightarrow\; x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{6}{2}=3 \;\rightarrow\; x=3$$

Por tanto, el único valor de $x$ que hace que se verifique la igualdad propuesta es $x = 3$.

***Ejercicio nº 4.-***

**Halla los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ en la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$, de forma que $\boldsymbol{A^2-2A=B}$, siendo $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$.**

***Solución:***

Calculamos $A^2 - 2A$ e igualamos el resultado a $B$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{r} a^2 - 2a = 0 \\ 2ab - 2b = 1 \end{array}\right\} \quad a(a-2) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} a = 0 \\ \text{ó} \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = 0, \quad -2b = 1 \;\rightarrow\; b = \frac{-1}{2} \;\rightarrow\; A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Si $a = 2, \quad 2b = 1 \;\rightarrow\; b = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

***<u>Ejercicio nº 5.-</u>***

**Si $I$ es la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, halla el valor que deben tener $x$ e $y$ para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.**

***Solución:***

Calculamos $A^2 - xA - yI$ e igualamos a 0:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - xA - yI = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2x-y & 9-3x \\ -6+2x & -5-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos que ha de ser:

$$\left.\begin{array}{r} -2-2x-y = 0 \\ 9-3x = 0 \\ -6+2x = 0 \\ -5-x-y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow\; y = -2-2x = -2-6 = -8 \\ \rightarrow\; x = 3 \\ \rightarrow\; x = 3 \\ \rightarrow\; y = -5-x = -5-3 = -8 \end{array}$$

Por tanto: $x = 3, \; y = -8$

***Ejercicio nº 6.-***

**Calcula la inversa de la matriz** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$.

***Solución:***

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \to \begin{array}{r} 1^{\underline{a}}\\ 2^{\underline{a}}-1^{\underline{a}}\\ 3^{\underline{a}}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{r} 1^{\underline{a}}\\ 2^{\underline{a}}\\ 2\cdot 3^{\underline{a}}-2^{\underline{a}}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2\end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{r} 4\cdot 1^{\underline{a}}+3\cdot 2^{\underline{a}}\\ 2^{\underline{a}}+3^{\underline{a}}\\ 3^{\underline{a}}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2\end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{r} 1^{\underline{a}}+3^{\underline{a}}\\ 2^{\underline{a}}\\ 3^{\underline{a}}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2\end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{r} \frac{1}{8}\cdot 1^{\underline{a}}\\ \frac{1}{4}\cdot 2^{\underline{a}}\\ \frac{1}{2}\cdot 3^{\underline{a}}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{array}\right)$$

Así, $B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

***Ejercicio nº 7.-***

**Calcula la inversa de la matriz** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$.

***Solución:***

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \to \begin{array}{r} 1^{\underline{a}}\\ 3\cdot 2^{\underline{a}}+1^{\underline{a}}\\ 3^{\underline{a}}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \to$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 5\cdot 3^{a}+2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^{a}-3^{a} \\ 2^{a}-3^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 5\cdot 1^{a}+2^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -15 & 0 & 0 & 0 & -15 & -30 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} -\frac{1}{15}\cdot 1^{a} \\ -\frac{1}{5}\cdot 2^{a} \\ \frac{1}{2}\cdot 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Luego, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

***Ejercicio nº 8.-***

**Calcula la inversa de la matriz** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$.

***Solución:***

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} 1^{a} \\ 2^{a}-2\cdot 1^{a} \\ 3^{a}-1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}-2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^{a}+3\cdot 3^{a} \\ 2\cdot 2^{a}-5\cdot 3^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & -10 & 0 & -9 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 10\cdot 1^{a}+3\cdot 2^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 13 & -9 & 15 \\ 0 & -10 & 0 & -9 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \frac{1}{10}\cdot 1^{a} \\ -\frac{1}{10}\cdot 2^{a} \\ -\frac{1}{2}\cdot 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{15}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{5}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Por tanto, $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 13 & -9 & 15 \\ 9 & -7 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

***<u>Ejercicio nº 9.-</u>***

**Calcula la inversa de la matriz** $\mathbf{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}}$.

***Solución:***

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \\ 2^{a}-2\cdot 1^{a} \\ 3^{a}-3\cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiamos las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ -2^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1^{a}-2\cdot 2^{a}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a}+3^{a} \\ 2^{a}-3^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

***<u>Ejercicio nº 10.-</u>***

**Calcula la inversa de la matriz** $\mathbf{B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

***Solución:***

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 3^{a} \\ 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3\cdot 3^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 5\cdot 1^{\underline{a}} - 3^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \frac{1}{15}\cdot 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ \frac{1}{5}\cdot 3^{\underline{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{15} & \frac{-3}{15} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{array}\right) \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

***<u>Ejercicio nº 11.-</u>***

**Calcula una matriz $X$ tal que $AX + B = 2A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.**

***Solución:***

Despejamos $X$:

$$AX = 2A - B \;\rightarrow\; A^{-1}AX = A^{-1}(2A - B) \;\rightarrow\; X = A^{-1}(2A - B)$$

Calculamos $A^{-1}$ por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right] \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

***<u>Ejercicio nº 12.-</u>***

**Halla la matriz $X$ que verifica $BX = A$, siendo $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.**

***Solución:***

Despejamos $X$ multiplicando por la izquierda por $B^{-1}$:

$$B^{-1}BX = B^{-1}A \;\rightarrow\; X = B^{-1}A$$

Hallamos $B^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&1&1&0&0\\1&0&2&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\begin{array}{c}1^{\underline{a}}\\3^{\underline{a}}\\2^{\underline{a}}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1\\1&0&2&0&1&0\end{array}\right)\to$$

$$\to\begin{array}{c}1^{\underline{a}}\\2^{\underline{a}}\\3\cdot3^{\underline{a}}-1^{\underline{a}}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&5&-1&3&0\end{array}\right)\to$$

$$\to\begin{array}{c}5\cdot1^{\underline{a}}-3^{\underline{a}}\\2^{\underline{a}}\\3^{\underline{a}}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}15&0&0&6&-3&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&5&-1&3&0\end{array}\right)\to$$

$$\to\begin{array}{c}\frac{1}{15}\cdot1^{\underline{a}}\\2^{\underline{a}}\\\frac{1}{5}\cdot3^{\underline{a}}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{6}{15}&\frac{-3}{15}&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&0\end{array}\right)\to B^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}6&-3&0\\0&0&15\\-3&9&0\end{pmatrix}$$

Como $B^{-1}=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix}6&-3&0\\0&0&15\\-3&9&0\end{pmatrix}$, $X=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix}6&-3&0\\0&0&15\\-3&9&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Así:

$$X=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}12\\60\\-21\end{pmatrix}\to X=\begin{pmatrix}4/5\\4\\7/5\end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 13.-***

**Resuelve la ecuación matricial $XA=B$, siendo $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3&-1\\0&2\end{pmatrix}$.**

***Solución:***

Despejamos $X$ multiplicando por $A^{-1}$ por la derecha:

$$XAA^{-1}=BA^{-1}\to X=BA^{-1}$$

Hallamos $A^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\to\begin{array}{c}F_1-2F_2\\F_2\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-2\\0&1&0&1\end{array}\right)\to A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$

Así:

$$X=\begin{pmatrix}3&-1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\to X=\begin{pmatrix}3&-7\\0&2\end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 14.-***

**Halla la matriz $X$ que verefica $AX + B = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $0$ la matriz nula.**

***Solución:***

Despejamos $X$:

$$AX = -B \quad \to \quad A^{-1}AX = A^{-1}(-B) \quad \to \quad IX = -A^{-1}B \quad \to \quad X = -A^{-1}B$$

Calculamos la inversa de $A$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 2^a - 2\cdot 1^a \\ \\ 3^a - 3\cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiamos las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 1^a \\ -2^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1^a - 2\cdot 2^a}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 1^a + 3^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$X = -\begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 26 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \to \quad X = \begin{pmatrix} 35 \\ -26 \\ 12 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 15.-***

**Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.**

***Solución:***

Despejamos $X$ de la ecuación propuesta:

$$2A = AX + B \;\rightarrow\; 2A - B = AX \;\rightarrow\; A^{-1}(2A - B) = A^{-1}AX \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2A^{-1}A - A^{-1}B = IX \;\rightarrow\; 2I - A^{-1}B = X$$

Calculamos la inversa de $A$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}}+1^{\underline{a}} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operamos para obtener $X$:

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = 2I - A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

***<u>Ejercicio nº 16.-</u>***

**Averigua cuál es el rango de:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{\underline{a}} \\ 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 3 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} + 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} + 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $ran\ (A) = 2$.

***<u>Ejercicio nº 17.-</u>***

**Obtén el rango de la siguiente matriz:**

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{7} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{\underline{a}} \\ 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} + 2 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} + 4 \cdot 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}-3\cdot 2^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $ran\ (M) = 2.$

***Ejercicio nº 18.-***

**Estudia el rango de la matriz:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{7} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{a} \\ 1^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}-4\cdot 1^{a} \\ 3^{a}-2\cdot 1^{a} \\ 4^{a}-1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}-2^{a} \\ 4^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $ran\ (A) = 3.$

***Ejercicio nº 19.-***

**Halla el rango de la siguiente matriz:**

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{8} & -\mathbf{6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{a} \\ 1^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 8 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}-1^{a} \\ 3^{a}-1^{a} \\ 4^{a}-3\cdot 1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}+3\cdot 2^{a} \\ 3\cdot 4^{a}+4\cdot 2^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $ran\ (M) = 3$.

***Ejercicio nº20.-***

**Calcula el rango de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

***Solución:***

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{\underline{a}} \\ 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 2 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 10 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 2 \cdot 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $ran\ (A) = 2$.

***Ejercicio nº 21.-***

**Estudia el rango de la siguiente matriz según los valores de $a$:**

$$M = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix}$$

***Solución:***

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ a \cdot 2^{\underline{a}} - 2 \cdot 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a^2 - a - 6 \end{pmatrix}$$

Hacemos $a^2 - a - 6 = 0 \quad \begin{cases} a = 3 \\ a = -2 \end{cases}$

***Ejercicio nº 22.-***

**Estudia el rango de la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ a & 4 & 2 \end{pmatrix}$ según los valores de $a$.**

***Solución:***

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ a & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - a \cdot 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ 0 & 4-a^2 & -a^2+a+2 \end{pmatrix}$$

Hacemos $4-a^2=0 \begin{cases} a=2 \\ a=-2 \end{cases}$

Si $a=2$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\,C=1$

Si $a=-2$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\,C=2$

Si $a \neq \pm 2$, $ran\ C=2$.

***Ejercicio nº 23.-***

**Estudia el rango de la siguiente matriz según los valores de *a*:**

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & -\boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}}-2\cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}}-3\cdot 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 2 & -a+9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ a\cdot 3^{\underline{a}}-2\cdot 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 0 & -a^2+9a-14 \end{pmatrix}$$

Hacemos $-a^2+9a-14=0 \begin{cases} a=7 \\ a=2 \end{cases}$

Si $a \neq 7$ y $a \neq 2$, $ran\ B=3$

Si $a=7$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\,B=2$

Si $a=2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\,B=2$

***Ejercicio nº24.-***

**Estudia el rango de la matriz** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **según los valores de *a*.**

***Solución:***

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 3 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -3a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} + (a-1)2^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -3a \\ 0 & 0 & -3a^2+2a+1 \end{pmatrix}$$

Hacemos $-3a^2+2a+1=0 \begin{cases} a=1 \\ a=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Si $a=1$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ A=2$

Si $a=-\dfrac{1}{3}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ A=2$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -\dfrac{1}{3}$, $ran\ A=3$.

***<u>Ejercicio nº 25.-</u>***

**Estudia el rango de la matriz** $\boldsymbol{D = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & a+1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}}$.

***Solución:***

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & a+1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2 \cdot 2^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & a+2 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

La tercera fila se anula si $a=1$ y la segunda, si $a=-2$. Estudiamos estos dos casos:

Si $a=1$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ D=2$

Si $a=-2$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ D=2$

Por tanto, $ran\ D=2$ cualquiera que sea el valor de $a$.

***Ejercicio nº 26.-***

**Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores**

$$\{\vec{u}_1 = (2,\ -1,\ 0,\ 1);\ \vec{u}_2 = (-1,\ 0,\ 2,\ 1);\ \vec{u}_3 = (5,\ -4,\ 6,\ 7)\}$$

**y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$.**

***Solución:***

Estudiamos el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{\underline{a}} \\ 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} + 2 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} + 5 \cdot 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 16 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 4 \cdot 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, el rango de la matriz es } 2.$$

Esto significa que los vectores son linealmente dependientes. Hay dos vectores linealmente independientes y el tercero depende de ellos.

***Ejercicio nº 27.-***

**a) Halla el rango de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**b) Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores:**

$$\vec{u}_1 = (2,\ -1,\ 3,\ 4);\ \vec{u}_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 2) \ \text{ y } \ \vec{u}_3 = (-1,\ 3, 4,\ 1)$$

***Solución:***

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{\underline{a}} \\ 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \\ 4^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} + 2 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} + 3 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} + 4 \cdot 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 13 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 2 \cdot 2^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} - 3 \cdot 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \\ 3 \cdot 4^{\underline{a}} + 2 \cdot 3^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \operatorname{ran}(A) = 3.$$

b) Observamos que las columnas de la matriz $A$ coinciden con los vectores $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$.

El número de vectores linealmente independientes es el rango de $A$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

***Ejercicio nº 28.-***

**Estudia la dependencia lineal del conjunto de vectores:**

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{1,\ 1,\ -1,\ 1});\ \vec{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{2,\ 3,\ -2,\ 1});\ \vec{\mathbf{u}}_3 = (\mathbf{1,\ 3,\ -1,\ -1})$$

***Solución:***

Estudiemos el rango de la matriz cuyas filas son los tres vectores dados. El rango coincide con el número de vectores linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 2\cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 2\cdot 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz es 2. Luego, hay dos vectores linealmente independientes; el tercero se puede escribir como combinación lineal de los otros dos.

Los tres vectores $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ son linealmente dependientes.

***Ejercicio nº 29.-***

**Dados los vectores:**

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{3,\ -1,\ 2,\ 0});\ \vec{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{1,\ 2,\ -1,\ 1});\ \vec{\mathbf{u}}_3 = (\mathbf{2,\ 1,\ 0,\ -1})$$

**Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{\mathbf{u}}_1,\ \vec{\mathbf{u}}_2,\ \vec{\mathbf{u}}_3$.**

***Solución:***

Calcula el rango de la matriz cuyas filas son los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{\underline{a}} \\ 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 3\cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 2\cdot 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 7\cdot 3^{\underline{a}} - 3\cdot 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \end{pmatrix}.\ \text{Por tanto, el rango de la matriz es 3.}$$

Esto significa que $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ son linealmente independientes.

***Ejercicio nº 30.-***

**Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes:**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{6} & -\mathbf{5} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

Calculamos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{\underline{a}} \\ 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}}+3\cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}}+1^{\underline{a}} \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}}+2^{\underline{a}} \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \operatorname{ran}(A)=2.$$

Esto significa que hay dos columnas linealmente independientes en $A$; las otras dos dependen linealmente de ellas.

***Ejercicio nº 31.-***

**En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y bolígrafos, agrupándolos en tres tipos de lotes:**

**- Lote *A*: 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 bolígrafo.**
**- Lote *B*: 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 bolígrafos.**
**- Lote *C*: 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 bolígrafos.**

**Cada carpeta cuesta 6 euros, cada cuaderno 1,5 euros y cada bolígrafo 0,24 euros.**

**a) Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.**

**b) Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes *A, B* y *C.***

***Solución:***

a) La matriz será:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{CARPETAS} & \text{CUADERNOS} & \text{BOLÍGRAFOS} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Los precios de cada carpeta, cada cuaderno y cada bolígrafo se resumen en la matriz:

$$\begin{array}{c} \text{CARPETA} \\ \text{CUADERNO} \\ \text{BOLÍGRAFO} \end{array}\begin{pmatrix} 6 \\ 1{,}5 \\ 0{,}24 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la matriz obtenida en a) con esta última, obtendremos la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c}\text{CARPETA} \quad \text{CUADERNO} \quad \text{BOLÍGRAFO} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{CARPETA} \\ \text{CUADERNO} \\ \text{BOLÍGRAFO} \end{array}\begin{pmatrix} 6 \\ 1{,}5 \\ 0{,}24 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 7{,}74 \\ 11{,}22 \\ 17{,}46 \end{pmatrix}$$

Es decir, el lote *A* cuesta 7,74 euros, el lote *B,* 11,22 euros y el lote *C,* 17,46 euros.

***<u>Ejercicio nº 32.-</u>***

**En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos *A, B,* y *C,* que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:**

| MATERIAL \ PRODUCTO | ***A*** | ***B*** | ***C*** |
|---|---|---|---|
| **CHATARRA** | 8 | 6 | 6 |
| **CARBÓN** | 6 | 6 | 4 |
| **ALEACIONES** | 2 | 1 | 3 |

**Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de *A,* 4 de *B* y 3 de C.**

***Solución:***

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{r} \\ \text{CHATARRA} \\ \text{CARBÓN} \\ \text{ALEACIONES} \end{array}\begin{array}{c} A \quad B \quad C \\ \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\end{array} \cdot \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{r} \text{CHATARRA} \\ \text{CARBÓN} \\ \text{ALEACIONES} \end{array}\begin{pmatrix} 90 \\ 72 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Es decir, necesitaremos 90 unidades de chatarra, 72 de carbón mineral y 25 de aleaciones.

***<u>Ejercicio nº 33.-</u>***

**Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz *A.* La evolución de los precios de los años 1997 a 2000 viene reflejada en la matriz *B.***

**a) Hallar, si es posible, *A · B* y *B · A* e indicar que información proporciona el producto matricial.**

**b) ¿Qué información nos da el elemento $c_{34}$ de la matriz producto?**

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{array}{c} \text{PAN} \quad \text{AGUA} \quad \text{LECHE} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix}\end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array}\begin{array}{c} 1997 \quad 1998 \quad 1999 \quad 2000 \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix}\end{array}$$

***Solución:***

a) La matriz *A* es $3 \times 3$ y la *B* es $3 \times 4$. Para poder efectuar el producto de dos matrices, el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

Por tanto, el producto $B \cdot A$ no se puede hacer, pero el $A \cdot B$ sí.

$$A \cdot B = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{PAN} & \text{AGUA} & \text{LECHE} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1997 & 1998 & 1999 & 2000 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1997 & 1998 & 1999 & 2000 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 106150 & 111300 & 113250 & 122750 \\ 108580 & 113140 & 115800 & 125450 \\ 73000 & 76200 & 78000 & 84500 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz $A \cdot B$ nos da el gasto anual de cada familia en el total de los tres productos durante los años 1997 a 2000.

b) El elemento $c_{34} = 84500$, corresponde a la familia tercera en el año 2000; es decir, nos indica el gasto total de esta familia en los tres productos durante ese año.

***<u>Ejercicio nº 34.-</u>***

**En una compañía se utilizan tres tipos de materiales (madera, plástico y aluminio) para fabricar tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás, según la tabla:**

| | SILLA | MECEDORA | SOFÁ |
|---|---|---|---|
| **MADERA** | **1 unidad** | **1 unidad** | **1 unidades** |
| **PLÁSTICO** | **1 unidad** | **1 unidad** | **2 unidades** |
| **ALUMINIO** | **2 unidades** | **3 unidades** | **5 unidades** |

**Obtén, matricialmente, las unidades de madera, de plástico y de aluminio que se han utilizado para fabricar 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás.**

***Solución:***

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{c} \\ \text{MADERA} \\ \text{PLÁSTICO} \\ \text{ALUMINIO} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{SILLA} & \text{MECED.} & \text{SOFÁ} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{SILLAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SOFÁS} \end{array}\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \text{MADERA} \\ \text{PLÁSTICO} \\ \text{ALUMINIO} \end{array}\begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 1\,500 \end{pmatrix}$$

Es decir se han utilizado 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1 500 de aluminio.

***<u>Ejercicio nº 35.-</u>***

**Una empresa produce tres bienes *A, B,* y *C*. Tiene tres factorías y, cada una de ellas, produce los tres bienes en las cantidades por hora siguientes:**

| | FACTORÍA 1 | FACTORÍA 2 | FACTORÍA 3 |
|---|---|---|---|
| ***A*** | 10 unidades/hora | 20 unidades/hora | 15 unidades/hora |
| ***B*** | 25 unidades/hora | 25 unidades/hora | 20 unidades/hora |
| ***C*** | 30 unidades/hora | 25 unidades/hora | 25 unidades/hora |

**En la Factoría 1 se trabajan 8 horas diarias, la Factoría 2 funciona las 24 horas del día y en la Factoría 3 se trabajan 10 horas diarias.**

**a) Calcula matricialmente el número de unidades diarias de los bienes *A, B* y *C* que fabrica la empresa.**

**b) Si se trabaja durante 22 días cada mes, obtén matricialmente la proporción mensual de la empresa en cada uno de los bienes *A, B* y *C.***

***Solución:***

a) Organizamos en dos matrices los datos que tenemos; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{FACT.1} & \text{FACT.2} & \text{FACT.3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 25 & 25 & 20 \\ 30 & 25 & 25 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{FACT.1} \\ \text{FACT.2} \\ \text{FACT.3} \end{array}\begin{pmatrix} 8 \\ 24 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 710 \\ 1000 \\ 1090 \end{pmatrix}$$

Es decir, cada día se fabrican en total (entre las tres factorías de la empresa) 710 unidades de *A*, 1000 unidades de *B* y 1090 de *C.*

b) La matriz obtenida en a) nos daba la proporción diaria: si la multiplicamos por 22 (los días que se trabajan cada mes), obtendremos la producción mensual:

$$22 \cdot \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 710 \\ 1000 \\ 1090 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 15620 \\ 22000 \\ 23980 \end{pmatrix}$$

Por tanto, cada mes se fabrican en la empresa (entre las tres factorías) 15620 unidades de *A,* 22000 unidades de *B* y 23980 de *C.*