APLICACIONES DE LA DERIVADA

Ecucación de la recta tangente

Ejercicio nº 1.-

Halla las rectas tangentes a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0 \text{ en } x_0 = 1$$

Ejercicio nº 2.-

Dada la función $f(x) = x^2 e^{x^2-1}$, escribe la ecuación de su recta tangente en el punto de abscisa $x_0 = -1$.

Ejercicio nº 3.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$ en $x_0 = 2$.

Ejercicio nº 4.-

Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$y = \frac{4x-2}{x(x^2+1)} \text{ en } x_0 = 1$$

Ejercicio nº 5.-

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ en el punto (0, 4).

Monotonía y curvatura

Ejercicio nº 6.-

Estudia el crecimiento y la curvatura de la siguiente función. Halla sus máximos, mínimos y puntos de inflexión:

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{9} - x^2 + 1$$

Ejercicio nº 7.-

Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{e^x}$$

Ejercicio nº 8.-

Dada la función:

$$f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x$$

a) Estudia su crecimiento y halla sus máximos y mínimos.

b) Estudia su curvatura y obtén sus puntos de inflexión.

Ejercicio nº 9.-

Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Ejercicio nº 10.-

Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = (x - 2)^3 (x + 1)$$

Di dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

Optimización de funciones

Ejercicio nº 11.-

El lado de un cuadrado tiene una longitud de 4 metros. Entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, halla el de área mínima:

Ejercicio nº 12.-

Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

Ejercicio nº 13.-

Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Ejercicio nº 14.-

Un transportista va de una ciudad A a otra B a una velocidad constante de x km/h por una carretera en la que debe cumplirse que $35 \le x \le 55$. El precio del carburante es de 0,6 euros el litro y el consumo es de $10 + x^2/120$ litros por hora. El conductor cobra 8 euros por hora y la distancia entre A y B es de 300 km. Halla la velocidad a la que debe ir para que el viaje resulte lo más económico posible.

Ejercicio nº 15.-

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 1 dm. Hacemos girar el triángulo alrededor de uno de sus catetos. Determina la longitud de los catetos de forma que el cono engendrado de esta forma tenga volumen máximo.

Regla de L´Hôpital

Ejercicio nº 16.-

Calcula, utilizando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - sen^2 x}{x^4}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

Ejercicio nº 17.-

Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$

Ejercicio nº 18.-

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - sen\, x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Ejercicio nº 19.-

Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + sen\, x}{x^2 - sen\, x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

Ejercicio nº 20.-

Obtén el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{tg\, x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Teorema de Rolle y del valor medio

Ejercicio nº 21.-

Calcula m y n para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} mx+1 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ -2x^2+3x+n & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3]. ¿Dónde cumple la tesis?

Ejercicio nº 22.-

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Comprueba que satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 2]. ¿Dónde cumple la tesis?

Ejercicio nº 23.-

Comprueba que $y=x-x^3$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [–2, 1].

¿Dónde cumple la tesis?

Ejercicio nº 24.-

Calcula a, b y c para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-ax & \text{si} \quad x<2 \\ bx+c & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. ¿Qué asegura el teorema en este caso?

Ejercicio nº 25.-

Comprueba si la función $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. En caso afirmativo, averigua dónde cumple la tesis.

Problemas de funciones derivables y continuas

Ejercicio nº 26.-

Justifica los pasos de la siguiente demostración:

Vamos a probar que "si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b); y $f'(x) = 0$ en todos los puntos de (a, b), entonces f es constante en $[a, b]$".

1) Tomamos dos puntos cualesquiera $x_1 < x_2$ de $[a, b]$; entonces se cumple que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

2) Por tanto, $f(x_2) - f(x_1) = 0$.

3) Y así deducimos que f es constante.

Ejercicio nº 27.-

Demuestra que la función:

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 4 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

no cumple la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$, cualquiera que sea el valor de $b > 1$.

Ejercicio nº 28.-

Demuestra que la ecuación:

$$e^x - x - 1 = 0$$

solo tiene la aíz $x = 0$. Para ello, supón que tuviera otra raíz (digamos $x = a$), aplica el teorema de Rolle a la función $f(x) = e^x - x - 1$ en $[0, a]$ (o en $[a, 0]$ si $a < 0$) y llegarás a una contradicción.

Ejercicio nº 29.-

Demuestra que, entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo.

(Llama k al área del rectángulo y ten en cuenta que es constante).

Ejercicio nº 30.-

Demuestra que, entre todos los rectángulos que pueden inscribirse en un círculo de radio R, el cuadrado tiene el área máxima.

SOLUCIONES APLICACIONES DE LA DERIVADA

Ecucación de la recta tangente

Ejercicio nº 1.-

Halla las rectas tangentes a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0 \text{ en } x_0 = 1$$

Solución:

- Ordenadas en $x_0 = 1$:

$$1 + y^2 + 2 + 2y - 6 = 0 \rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} y = 1 \rightarrow \text{Punto } (1, 1) \\ y = -3 \rightarrow \text{Punto } (1, -3) \end{cases}$$

- Pendiente de las rectas tangentes:

Derivamos: $2x + 2y\, y' + 2 + 2y' = 0$

Despejamos y':

$$y'(2y+2) = -2x - 2 \rightarrow y' = \frac{-2x-2}{2y+2} = \frac{-x-1}{y+1}$$

$$y'(1, 1) = \frac{-1-1}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y'(1, -3) = \frac{-1-1}{-3+1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

- Ecuaciones de las rectas tangentes:

En el punto (1, 1) $\rightarrow$ $y = 1 - (x - 1)$ $\rightarrow$ $y = -x + 2$

En el punto (1, –3) $\rightarrow$ $y = -3 + (x - 1)$ $\rightarrow$ $y = x - 4$

Ejercicio nº 2.-

Dada la función $f(x) = x^2 e^{x^2 - 1}$, escribe la ecuación de su recta tangente en el punto de abscisa $x_0 = -1$.

Solución:

- Ordenada en el punto: $f(-1) = 1$

- Pendiente de la recta:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2-1} + x^2 \cdot e^{x^2-1} \cdot 2x = \left(2x + 2x^3\right) e^{x^2-1}$$

$$f'(-1) = -4$$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y = 1 - 4\,(x + 1) \quad \rightarrow \quad y = -4x - 3$$

Ejercicio nº 3.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$ en $x_0 = 2$.

Solución:

- Ordenada en el punto: $y\,(2) = 5$
- Pendiente de la recta:

$$y = \frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}} = \frac{2x^2 + x}{\sqrt{x+2}}$$

Derivamos:

$$y' = \frac{(4x+1)\sqrt{x+2} - \left(2x^2 + x\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}{(x+2)} = \frac{(8x+2)\,(x+2) - \left(2x^2 + x\right)}{2\sqrt{(x+2)^3}} =$$

$$= \frac{8x^2 + 16x + 2x + 4 - 2x^2 - x}{2\sqrt{(x+2)^3}} = \frac{6x^2 + 17x + 4}{2\sqrt{(x+2)^3}}$$

$$y'(2) = \frac{31}{8}$$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y = 5 + \frac{31}{8}(x-2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{31}{8}x - \frac{11}{4}$$

Ejercicio nº 4.-

Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$\boldsymbol{y = \frac{4x - 2}{x(x^2+1)} \ \text{ en } \ x_0 = 1}$$

Solución:

- Ordenada en el punto: $y\,(1) = 1$
- Pendiente de la recta:

$$y = \frac{4x-2}{x(x^2+1)} = \frac{4x-2}{x^3+x}$$

Derivamos:

$$y' = \frac{4(x^3+x)-(4x-2)\cdot(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = \frac{4x^3+4x-12x^3-4x+6x^2+2}{(x^3+x)^2} =$$

$$= \frac{-8x^3+6x^2+2}{(x^3+x)^2}$$

$y'(1) = 0$

- Ecuación de la recta tangente:

$y = 1$

Ejercicio nº 5.-

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ en el punto (0, 4).

Solución:

- Comprobamos que la curva pasa por (0, 4):

$0^2 + 4^2 - 2\cdot 0 - 4\cdot 4 = 16 - 16 = 0$

- Derivamos para obtener la pendiente de la recta:

$2x + 2y\cdot y' - 2 - 4y' = 0$

Despejamos y':

$$y'(2y-4) = 2-2x \quad \to \quad y' = \frac{2-2x}{2y-4}$$

Por tanto:

$$y'(0,\ 4) = \frac{2-2\cdot 0}{2\cdot 4-4} = \frac{2}{8-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Ecuación de la tangente:

$$y = 4 + \frac{1}{2}x$$

Monotonía y curvatura

Ejercicio nº 6.-

Estudia el crecimiento y la curvatura de la siguiente función. Halla sus máximos, mínimos y puntos de inflexión:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{9} - x^2 + 1}$$

Solución:

- Derivada:

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} - 2x$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{x^3 - x^2 - 6x}{3} = \frac{x(x^2 - x - 6)}{3} = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

- Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	3	$\nearrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 3)$; es creciente en $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$. Tiene un mínimo en $\left(-2, \; \frac{-7}{9}\right)$ y otro en $\left(3, \; \frac{-17}{4}\right)$. Tiene un máximo en $(0, \; 1)$.

- Segunda derivada:

$$f''(x) = x^2 - \frac{2x}{3} - 2$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 2x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+72}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{76}}{6} \;\begin{cases} x \approx -1{,}12 \\ x \approx 1{,}79 \end{cases}$$

- Signo de $f''(x)$:

$f'' > 0$		$f'' < 0$		$f'' > 0$
$\cup$	$-1{,}12$	$\cap$	$1{,}79$	$\cup$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty; -1{,}12) \cup (1{,}79; +\infty)$; es convexa en $(-1{,}12; 1{,}79)$. Tiene dos puntos de inflexión:

$(-1{,}12; 0{,}03)$ y $(1{,}79, -1{,}99)$

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{e^x}}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbb{R}$; pues $e^x > 0$ para todo x.

- Derivada:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)\,e^x - (x^2 + x + 1)\,e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x\,(2x + 1 - x^2 - x - 1)}{(e^x)^2} = \frac{-x^2 + x}{e^x}$$

$$f'(x)=0 \;\rightarrow\; -x^2+x=0 \;\rightarrow\; x(-x+1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

- Signo de $f'(x)$:

$f'<0$	0	$f'>0$	1	$f'<0$
↘		↗		↘

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$; es creciente en $(0, 1)$. Tiene un mínimo en $(0, 1)$ y un máximo en $\left(1, \dfrac{3}{e}\right)$.

<u>Ejercicio nº 8.-</u>

Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x}$$

a) Estudia su crecimiento y halla sus máximos y mínimos.

b) Estudia su curvatura y obtén sus puntos de inflexión.

Solución:

a) $f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12(x^3 + 2x^2 - x - 2) = 0$

$$12(x-1)(x+1)(x+2)=0 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

- Signo de $f'(x)$:

$f'<0$	-2	$f'>0$	-1	$f'<0$	1	$f'>0$
↘		↗		↘		↗

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-1, 1)$; es creciente en $(-2, -1) \cup (1, +\infty)$. Tiene un mínimo en $(-2, 8)$, otro en $(1, -19)$ y un máximo en $(-1, 13)$.

b) $f''(x) = 36x^2 + 48x - 12$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12(3x^2 + 4x - 1) = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+12}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} \begin{cases} x \approx 0{,}22 \\ x \approx -1{,}55 \end{cases}$$

- Signo de $f''(x)$:

$f''>0$	$-1{,}55$	$f''<0$	$0{,}22$	$f''>0$
$\cup$		$\cap$		$\cup$

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty; -1{,}55) \cup (0{,}22; +\infty)$; es convexa en $(-1{,}55; 0{,}22)$. Tiene dos puntos de inflexión, $(-1{,}55; 10{,}31)$ y $(0{,}22; -5{,}48)$.

Ejercicio nº 9.-

Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbb{R} - \{1\}$

- Derivada:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad x^2-2x=0 \quad \rightarrow \quad x(x-2)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

- Signo de $f'(x)$.

$f'>0$		$f'<0$		$f'<0$		$f'>0$
$\nearrow$	0	$\searrow$	1	$\searrow$	2	$\nearrow$

  $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$. Tiene un máximo en $(0, -2)$ y un mínimo en $(2, 2)$.

Ejercicio nº 10.-

Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = (x-2)^3 (x+1)}$$

Di dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

Solución:

- Derivada:

$$f'(x) = 3(x-2)^2 (x+1) + (x-2)^3 = (x-2)^2 (3x+3+x-2) = (x-2)^2 (4x+1)$$

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad (x-2)^2 (4x+1)=0 \quad \begin{cases} x=2 \\ x=\dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

- Signo de $f'(x)$.

$f'<0$		$f'>0$		$f'>0$
$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$

  $f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{4}\right)$ y es creciente en $\left(-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$. Tiene un mínimo en

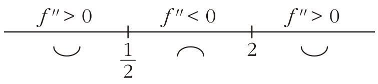
  $\left(-\dfrac{1}{4}; -8{,}54\right)$. En $(2, 0)$ hay un punto de inflexión.

- Segunda derivada:

$$f''(x) = 2(x-2)(4x+1) + (x-2)^2 \cdot 4 = (x-2)(8x+2+4x-8) = (x-2)(12x-6)$$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6(x-2)(2x-1) = 0 \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Signo de $f''(x)$.



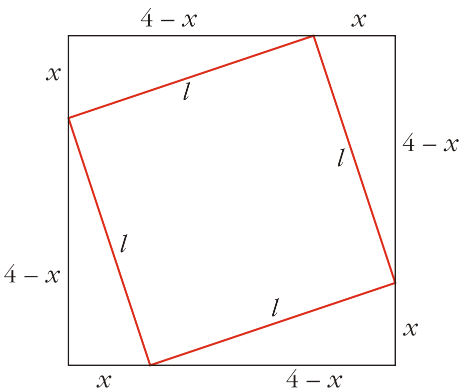
$f(x)$ es cóncava en $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$; es convexa en $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$. Tiene dos puntos de inflexión: $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-81}{16}\right)$ y $(2, 0)$.

Optimización de funciones

Ejercicio nº 11.-

El lado de un cuadrado tiene una longitud de 4 metros. Entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, halla el de área mínima:

Solución:



Si llamamos x a la distancia de uno de los vértices del cuadrado inscrito, al vértice más próximo del cuadrado original (como indica la figura), tenemos que el área del cuadrado inscrito será:

$$\text{Área} = l^2 = x^2 + (4-x)^2; \quad 0 \le x \le 4$$

Buscamos x para que el área sea mínima:

$$A(x) = x^2 + (4-x)^2$$

$$A'(x) = 2x + 2(4-x) \cdot (-1) = 2x - 8 + 2x = 4x - 8$$

$$A'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 4x - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Comprobamos que es el mínimo:

$A''(x) = 4, \; A''(2) = 4 > 0 \;\; \rightarrow \;\; \text{en } x = 2 \text{ hay mínimo}$

$A(0) = A(4) = 16$

Por tanto, el mínimo se alcanza en $x = 2$, que corresponde al cuadrado de lado:

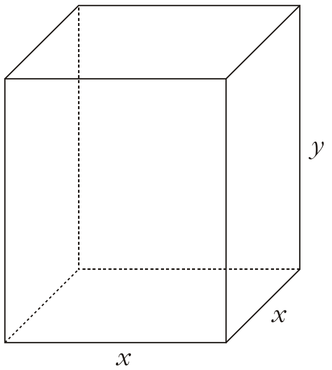
$$l = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83 \text{ metros,}$$

cuya área es de 8 m^2

Ejercicio nº 12.-

Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

Solución:



Llamamos x al lado de la base e y a la altura del depósito. Así, el volumen es:

$$V = x^2 y = 4\,000 \text{ dm}^3 \;\; \rightarrow \;\; y = \frac{4\,000}{x^2}$$

La superficie total del depósito (recordemos que está abierto) será:

$$A = 4xy + x^2 = 4x \cdot \frac{4\,000}{x^2} + x^2 = \frac{16\,000}{x} + x^2; \quad x > 0$$

Buscamos x para que A sea mínima:

$$A' = \frac{-16\,000}{x^2} + 2x = \frac{-16\,000 + 2x^3}{x^2}$$

$$A' = 0 \;\; \rightarrow \;\; -16\,000 + 2x^3 = 0 \;\; \rightarrow \;\; 2x^3 = 16\,000 \;\; \rightarrow$$

$$\rightarrow \;\; x^3 = \frac{16\,000}{2} = 8\,000 \;\; \rightarrow \;\; x = \sqrt[3]{8\,000} = 20 \text{ dm}$$

Veamos que es un mínimo:

$$A'' = \frac{32\,000}{x^3} + 2, \quad A''(20) > 0 \;\; \rightarrow \;\; \text{en } x = 20 \text{ hay mínimo}$$

Por tanto, el lado de la base debe medir $x = 20$ dm y la altura, $y = 10$ dm.

Ejercicio nº 13.-

Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Solución:

Llamamos x al número de árboles que se plantan. Tenemos que el número de frutos sería:

$$f(x) = (24 + x)(600 - 15x) = -15x^2 + 240x + 14\,400$$

Buscamos x para que $f(x)$ sea máxima:

$$f'(x) = -30x + 240$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -30x + 240 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{240}{30} = 8 \;\rightarrow\; x = 8$$

Veamos que es un máximo:

$f''(x) = -30$; $f''(8) = -30 < 0 \;\rightarrow$ en $x = 8$ hay máximo. (Como $f(x)$ corresponde a una parabola invertida, en $x = 8$ está el máximo absoluto).

Por tanto, se deben plantar 8 árboles. Así, habrá un total de $24 + 8 = 32$ árboles, que producirán 15 360 frutos.

Ejercicio nº 14.-

Un transportista va de una ciudad *A* a otra *B* a una velocidad constante de x km/h por una carretera en la que debe cumplirse que $35 \leq x \leq 55$. El precio del carburante es de 0,6 euros el litro y el consumo es de $10 + x^2/120$ litros por hora. El conductor cobra 8 euros por hora y la distancia entre *A* y *B* es de 300 km. Halla la velocidad a la que debe ir para que el viaje resulte lo más económico posible.

Solución:

La velocidad es x km/h y la distancia es de 300 km; por tanto, como x es constante, tardará $\frac{300}{x}$ horas en llegar. Así, el coste será:

$$C(x) = 8 \cdot \frac{300}{x} + \left(10 + \frac{x^2}{120}\right) 0{,}6 \cdot \frac{300}{x} = \frac{300}{x}\left(8 + 6 + \frac{x^2}{200}\right) = \frac{300}{x}\left(14 + \frac{x^2}{200}\right) =$$

$$= \frac{4\,200}{x} + \frac{3x}{2}, \quad x > 0$$

Además, ha de ser $35 \leq x \leq 55$.

Buscamos x para que $C(x)$ sea mínimo:

$$C'(x) = \frac{-4\,200}{x^2} + \frac{3}{2} = \frac{-8\,400 + 3x^2}{2x^2}$$

$$C'(x) = 0 \;\rightarrow\; -8\,400 + 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{8\,400}{3} = 2\,800 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; x \approx 52{,}92 \quad \text{(la raíz negativa no vale)}$$

Veamos que es un mínimo:

$$C''(x) = \frac{8\,400}{x^3}$$

$C''(52{,}92) > 0 \quad \rightarrow \quad$ en $x = 52{,}92$ hay un mínimo

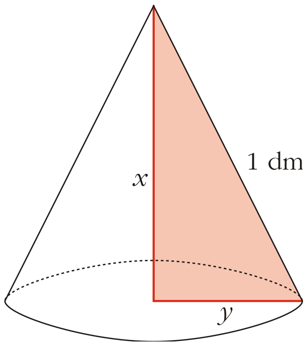
$C\,(35) = 172{,}5$ euros; $C\,(52{,}92) = 158{,}75$ euros; $C\,(55) = 158{,}86$

Por tanto, deberá ir a 52,92 km/h (el coste en este caso será de 158,75 euros).

<u>Ejercicio nº 15.-</u>

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 1 dm. Hacemos girar el triángulo alrededor de uno de sus catetos. Determina la longitud de los catetos de forma que el cono engendrado de esta forma tenga volumen máximo.

Solución:



Si llamamos x e y a las longitudes de cada uno de los catetos, sabemos que:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y^2 = 1 - x^2$$

El volumen del cono es:

$$V = \frac{\pi}{3}\, y^2 x = \frac{\pi}{3}\left(1 - x^2\right) x = \frac{\pi}{3}\left(x - x^3\right); \;\; 0 \leq x \leq 1$$

Buscamos x para que el volumen sea máximo:

$$V' = \frac{\pi}{3}\left(1 - 3x^2\right)$$

$$V' = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 3x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{(la raíz negativa no vale)}$$

Veamos que es un máximo:

$$V'' = \frac{\pi}{3}\left(-6x\right), \quad V''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0 \quad \rightarrow \quad \text{en } x = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ hay un máximo } \left(V(0) = V(1) = 0\right)$$

Por tanto, el máximo se alcanza cuando los catetos miden:

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58 \text{ dm} \quad \text{(el que será la altura del cono)}$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82 \text{ dm}$$

Regla de L´Hôpital

Ejercicio nº 16.-

Calcula, utilizando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - sen^2\, x}{x^4}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - sen^2\, x}{x^4} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - 2sen\, x\, cos\, x}{4x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - sen\, 2x}{4x^3} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2cos\, 2x}{12x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{4sen\, 2x}{24x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{8cos\, 2x}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1^{\infty}\right)$. Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x\to 0} ln\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{ln\left(1 + x^2\right)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1 + x^2}}{1} = 0$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

Ejercicio nº 17.-

Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos^2\, x - 1}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(cos\, 2x\right)^{3/x^2}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos^2\, x - 1}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2cos\, x\, sen\, x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-sen\,(2x)}{2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2cos\,(2x)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(cos\, 2x\right)^{3/x^2} = \left(1^{+\infty}\right)$. Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x\to 0} ln\left(cos\, 2x\right)^{3/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3\, ln\, (cos\, 2x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{3 \cdot \frac{-2sen\, 2x}{cos\, 2x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3tg\; 2x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3\left(1 + tg^2\; 2x\right)\cdot 2}{1} = -6$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

Ejercicio nº 18.-

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ **b)** $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{3x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3} = \frac{-1}{3}$$

b) $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{1-x}} = \left(1^{\infty}\right)$. Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x\to 1}\ln\left(x^{\frac{1}{1-x}}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Ejercicio nº 19.-

Calcula los límites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 + \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{sen} x}$ **b)** $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 + \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x + \cos x}{2x - \cos x} = \frac{1}{-1} = -1$

b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\left(3x^{\frac{2}{3}}\right)}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to +\infty} 3x^{\frac{-1}{3}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$

Ejercicio nº 20.-

Obtén el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{tg\, x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{tg\, x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\, x}{1+tg^2\, x} = \dfrac{0}{1} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = (+\infty)^0$. Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x\to +\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

Teorema de Rolle y del valor medio

Ejercicio nº 21.-

Calcula *m* y *n* para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} mx+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x^2+3x+n & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3]. ¿Dónde cumple la tesis?

Solución:

- *Continuidad en* [0, 3]:

Si $x \neq 1$, la función es continua, pues está formada por funciones continuas.

En $x = 1$, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (mx+1) = m+1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(-2x^2+3x+n\right) = 1+n \\ f(1) = m+1 \end{cases}$

Para que sea continua, ha de ser $m+1 = n+1 \rightarrow m = n$

- *Derivabilidad en* (0, 3):

Si $x \neq 1$, es derivable, y su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} m & \text{si} \quad x<1 \\ -4x+3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 1$, han de ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=m \\ f'(1^+)=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad m=-1$$

- Por tanto, $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en [0, 3] si $m = n = -1$. En este caso, quedaría:

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ -2x^2+3x-1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

- Veamos dónde cumple la tesis:

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{-10-1}{3}=\frac{-11}{3}$$

$$\begin{cases} f'(c)=-1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ f'(c)=-4c+3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

$$-4c+3=\frac{-11}{3} \quad \rightarrow \quad c=\frac{5}{3}\in(0,\,3)$$

<u>Ejercicio nº 22.-</u>

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Comprueba que satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 2]. ¿Dónde cumple la tesis?

Solución:

- *Continuidad en* [0, 2]:

Si $x \ne 1$, la función es contínua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

$$\text{En } x=1, \quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{3-x^2}{2}=1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \\ f(x) \text{ es continua en } x=1 \end{array}$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en [0, 2].

- *Derivabilidad en* (0, 2):

Si $x \neq 1$, es derivable, y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

En $x = 1$, como $f'(1^-) = f'(1^+) = -1$, también es derivable, y $f'(1) = -1$.

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $(0, 2)$.

Se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio; es decir, existe $c \in (0, 2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{-1}{2}$$

Veamos dónde se cumple la tesis:

$$-x = \frac{-1}{2} \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2} \quad (\text{si } x > 1)$$

$$\frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{2} \;\rightarrow\; x^2 = 2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{2} \quad (\text{si } x > 1)$$

Por tanto, hay dos valores: $c_1 = \dfrac{1}{2}$ y $c_2 = \sqrt{2}$

<u>Ejercicio nº 23.-</u>

Comprueba que $y = x - x^3$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-2, 1]$.

¿Dónde cumple la tesis?

Solución:

- La función $y = x - x^3$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$; por tanto, será continua en $[-2, 1]$ y derivable en $(-2, 1)$. Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

- Entonces, existe $c \in (-2, 1)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{0 - 6}{1 + 2} = \frac{-6}{3} = -2$$

Veamos cual es el valor de c en el que se cumple la tesis:

$f'(x) = 1 - 3x^2 \;\rightarrow f'(c) = 1 - 3c^2 = -2$

$-3c^2 = -3 \;\rightarrow\; c^2 = 1 \;\rightarrow\; c = \pm 1$

La tesis se cumple en $c = -1$ (pues $-1 \in (-2, 1)$, pero $1 \notin (-2, 1)$).

Ejercicio nº 24.-

Calcula a, b y c para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-ax & \text{si} \quad x<2 \\ bx+c & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. ¿Qué asegura el teorema en este caso?

Solución:

- *Continuidad en* [0, 4]:

  Si $x \neq 2$, la función es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

$$\text{En } x=2: \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} \left(2x^2-ax\right)=8-2a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \left(bx+c\right)=2b+c \\ f(2)=2b+c \end{cases}$$

  Para que sea continua en $x = 2$, ha de ser:

  $8 - 2a = 2b + c$

- *Derivabilidad en* (0, 4):

  Si $x \neq 2$, la función es derivable, y su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} 4x-a & \text{si} \quad x<2 \\ b & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

$$\text{En } x=2, \text{ ha de ser } \left.\begin{cases} f'(2^-)=8-a \\ f'(2^+)=b \end{cases}\right\} \quad 8-a=b$$

- Además, debe ser $f(0) = f(4)$; es decir:

  $0 = 4b + c$

- Uniendo las condiciones anteriores, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 8-2a=2b+c \\ 8-a=b \\ 0=4b+c \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=6 \\ b=2 \\ c=-8 \end{array}$$

- En este caso, el teorema de Rolle asegura que existe $c \in (0, 4)$ tal que $f'(c) = 0$.

Ejercicio nº 25.-

Comprueba si la función $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. En caso afirmativo, averigua dónde cumple la tesis.

Solución:

- La función $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ es continua en □ por tanto, también lo es en el intervalo [0, 4].
- Además, $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$.
- Pero veamos que no es derivable en (0, 4) (pues no lo es en $x = 2 \in (0, 4)$).

  La derivada es:

  $$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-2)}} \quad \rightarrow \quad \text{No existe la derivada en } x = 2$$

- Por tanto, no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

Problemas de funciones derivables y continuas

Ejercicio nº 26.-

Justifica los pasos de la siguiente demostración:

Vamos a probar que "si *f* es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*); y *f'* (*x*) = 0 en todos los puntos de (*a*, *b*), entonces *f* es constante en [*a*, *b*]".

1) Tomamos dos puntos cualesquiera $x_1 < x_2$ de [*a*, *b*]; entonces se cumple que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

2) Por tanto, $f(x_2) - f(x_1) = 0$.

3) Y así deducimos que *f* es constante.

Solución:

1) Tomamos dos puntos cualesquiera $x_1 < x_2$ de [*a*, *b*]; como *f* es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*), aplicando el teorema del valor medio, existe $c \in (a, b)$ tal que

   $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

   Como $f'(x) = 0$ en todos los puntos de (*a*, *b*), en particular $f'(c) = 0$; es decir:

   $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

2) Por tanto, $f(x_2) - f(x_1) = 0$.

3) Así, hemos llegado a que $f(x_2) = f(x_1)$ cualesquiera que sean $x_1 < x_2$ de [*a*, *b*]. Esto significa que $f(x)$ es constante en [*a*, *b*].

Ejercicio nº 27.-

Demuestra que la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-3x+4 & \text{si} \quad x\le 1\\ 2x-1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}}$$

no cumple la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, *b*], cualquiera que sea el valor de *b* > 1.

Solución:

- *Continuidad en* $[0, b]$, *con* $b > 1$:

  Si $x \neq 1$, la función es continua, pues está formada por funciones continuas.

  $$\text{En } x=1 \text{ , } \left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-3x+4)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)=1\\ f(1)=1\end{cases}\right\} \quad f(x) \text{ es continua en } x=1.$$

  Por tanto, $f(x)$ es continua en $[0, b]$.

- *Derivabilidad en* $(0, b)$, *con* $b > 1$:

  Si $x \neq 1$, la función es derivable, y su derivada es:

  $$f'(x)=\begin{cases}-3 & \text{si} \quad x<1\\ 2 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

  Como $f'(1^-) = -3 \neq f'(1^+) = 2$, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

  Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $(0, b)$, con $b > 1$. Así, no cumple las hipótesis del teorema de Rolle en este intervalo.

Ejercicio nº 28.-

Demuestra que la ecuación:

$$\boldsymbol{e^x - x - 1 = 0}$$

solo tiene la aíz $x = 0$. Para ello, supón que tuviera otra raíz (digamos $x = a$), aplica el teorema de Rolle a la función $f(x) = e^x - x - 1$ en $[0, a]$ (o en $[a, 0]$ si $a < 0$) y llegarás a una contradicción.

Solución:

- Supongamos que tuviera otra raíz positiva, $x = a$.

  Como $f(x) = e^x - x - 1$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, también será continua en $[0, a]$ y derivable en $(0, a)$. Además, sería $f(0) = f(a) = 0$.

  Por el teorema de Rolle, existiría $c \in (0, a)$ tal que $f'(c) = 0$. Pero:

  $$f'(x) = e^x - 1 = 0 \;\rightarrow e^x = 1 \;\rightarrow\; x = 0 \notin (0, a)$$

  Llegamos a una contradicción, luego no existe ninguna otra raíz positiva.

- Análogamente, si suponemos que existe otra raíz negativa, $x = a$, aplicando el teorema de Rolle con $[a, 0]$, llegaríamos a una contradicción.

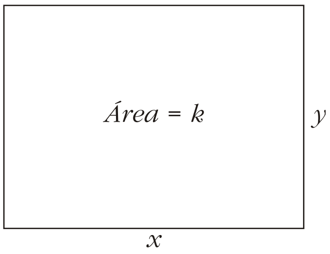
- Por tanto, solo tiene la raíz $x = 0$, como queríamos demostrar.

Ejercicio nº 29.-

Demuestra que, entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo.

(Llama *k* al área del rectángulo y ten en cuenta que es constante).

Solución:



Consideramos los rectángulos de área k, con k constante. Llamamos x a su base e y a su altura. El área será:

$$A = x \cdot y = k \quad \rightarrow \quad y = \frac{k}{x}$$

El perímetro del rectángulo es:

$$P = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{k}{x} = 2x + \frac{2k}{x}, \ x > 0$$

Buscamos x para que el perímetro sea mínimo:

$$P' = 2 - \frac{2k}{x^2} = \frac{2x^2 - 2k}{x^2}$$

$$P' = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 2k = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = k \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{k} \quad \text{(la raíz negativa no vale)}$$

Veamos que es mínimo:

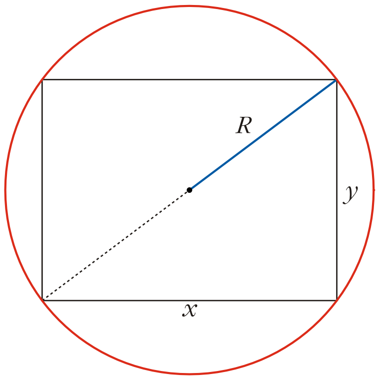
$$P'' = \frac{4k}{x^3}, \ P''\left(\sqrt{k}\right) > 0 \quad \text{(pues } k > 0\text{)} \quad \rightarrow \quad \text{en } x = \sqrt{k} \text{ hay un mínimo.}$$

Por tanto, el rectángulo buscado es el que tiene de lados $x = \sqrt{k}$, $y = \sqrt{k}$, es decir, el cuadrado de lado $\sqrt{k}$, como queríamos demostrar.

Ejercicio nº 30.-

Demuestra que, entre todos los rectángulos que pueden inscribirse en un círculo de radio *R*, el cuadrado tiene el área máxima.

Solución:



Llamamos x a la base del rectángulo e y a su altura. Tenemos que:

$$x^2 + y^2 = (2R)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4R^2$$

$$y = \sqrt{4R^2 - x^2}\,, \quad 0 < x < 2R$$

El área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y = x\,\sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}\,, \quad 0 < x < 2R$$

Buscamos x para que el área se máxima:

$$A' = \frac{8R^2x - 4x^3}{2\sqrt{4R^2x^2 - x^4}} = \frac{4R^2x - 2x^3}{\sqrt{4R^2x^2 - x^4}} = \frac{x\left(4R^2 - 2x^2\right)}{x\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

$$A' = 0 \quad \rightarrow \quad 4R^2 - 2x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 = 4R^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 2R^2 \quad \rightarrow \quad x = R\sqrt{2}$$
(la raíz negativa no vale, pues $x > 0$).

($A' > 0$ a la izquierda de $x = R\sqrt{2}$ y $A' < 0$ a su derecha; por tanto, en $x = R\sqrt{2}$ hay un máximo).

$$A\,(0) = A\,(2R) = 0$$

Por tanto, el máximo se alcanza para $x = y = R\sqrt{2}$; es decir, para el cuadrado de lado $R\sqrt{2}$, como queríamos demostrar.