

MATRICES

Ejercicio nº 1.-

Halla los valores de a y b en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de forma que $A^2 - 2A = B$,

siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio nº 2.-

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

b) Halla una matriz, X , tal que $AX = B$.

Ejercicio nº 3.-

Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4.-

Calcula los valores de x para que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

verifique la ecuación $A^2 - 6A + 9I = 0$, donde I y O son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.

Ejercicio nº 5.-

Si I es la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, halla el valor que deben tener x e y para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.

Ejercicio nº 6.-

Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales:

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}; \quad X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla X e Y , y calcula, si tiene sentido, X^{-1} e Y^{-1} .

Ejercicio nº 7.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2 , A^3 , A^4 , A^5 .

b) Halla el valor de $A^{25} + A^{-1}$.

Ejercicio nº 8.-

Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 9.-

Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donde } a, b \text{ y } c \text{ son tres números reales arbitrarios.}$$

a) Encuentra A^n para todo natural n .

b) Calcula $(A^{35} - A)^2$.

Ejercicio nº 10.-

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A^t A$ y AA^t , donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

b) Encuentra las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tales que: $AA^t X = X$

c) Encuentra todas las matrices de la forma $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, tales que: $A^t AY = Y$

Ejercicio nº 11.-

Obtén el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 12.-

Averigua cuál es el rango de:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 13.-

Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 14.-

Estudia el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 15.-

Halla el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 16.-

Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 17.-

Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores

$$\{\bar{u}_1 = (2, -1, 0, 1); \bar{u}_2 = (-1, 0, 2, 1); \bar{u}_3 = (5, -4, 6, 7)\}$$

y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$.

Ejercicio nº 18.-

a) Halla el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores:

$$\bar{u}_1 = (2, -1, 3, 4); \bar{u}_2 = (0, 1, 1, 2) \text{ y } \bar{u}_3 = (-1, 3, 4, 1)$$

Ejercicio nº 19.-

Dados los vectores:

$$\bar{u}_1 = (3, -1, 2, 0); \bar{u}_2 = (1, 2, -1, 1); \bar{u}_3 = (2, 1, 0, -1)$$

Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$.

Ejercicio nº 20.-

Estudia la dependencia lineal del conjunto de vectores:

$$\vec{u}_1 = (1, 1, -1, 1); \vec{u}_2 = (2, 3, -2, 1); \vec{u}_3 = (1, 3, -1, -1)$$

Ejercicio nº 21.-

En una compañía se utilizan tres tipos de materiales (madera, plástico y aluminio) para fabricar tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás, según la tabla:

	SILLA	MECEDORA	SOFÁ
MADERA	1 unidad	1 unidad	1 unidades
PLÁSTICO	1 unidad	1 unidad	2 unidades
ALUMINIO	2 unidades	3 unidades	5 unidades

Obtén, matricialmente, las unidades de madera, de plástico y de aluminio que se han utilizado para fabricar 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás.

Ejercicio nº 22.-

Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz A . La evolución de los precios de los años 1997 a 2000 viene reflejada en la matriz B .

a) Hallar, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$ e indicar que información proporciona el producto matricial.

b) ¿Qué información nos da el elemento c_{34} de la matriz producto?

$$A = \begin{matrix} & \text{PAN} & \text{AGUA} & \text{LECHE} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & 1997 & 1998 & 1999 & 2000 \\ \begin{matrix} \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Ejercicio nº 23.-

En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos A , B , y C , que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:

MATERIAL \ PRODUCTO	PRODUCTO		
	A	B	C
CHATARRA	8	6	6
CARBÓN	6	6	4
ALEACIONES	2	1	3

Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de A , 4 de B y 3 de C .

Ejercicio nº 24.-

Una empresa produce tres bienes *A*, *B*, y *C*. Tiene tres factorías y, cada una de ellas, produce los tres bienes en las cantidades por hora siguientes:

	FACTORÍA 1	FACTORÍA 2	FACTORÍA 3
<i>A</i>	10 unidades/hora	20 unidades/hora	15 unidades/hora
<i>B</i>	25 unidades/hora	25 unidades/hora	20 unidades/hora
<i>C</i>	30 unidades/hora	25 unidades/hora	25 unidades/hora

En la Factoría 1 se trabajan 8 horas diarias, la Factoría 2 funciona las 24 horas del día y en la Factoría 3 se trabajan 10 horas diarias.

- Calcula matricialmente el número de unidades diarias de los bienes *A*, *B* y *C* que fabrica la empresa.
- Si se trabaja durante 22 días cada mes, obtén matricialmente la proporción mensual de la empresa en cada uno de los bienes *A*, *B* y *C*.

Ejercicio nº 25.-

En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y bolígrafos, agrupándolos en tres tipos de lotes:

- Lote *A*: 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 bolígrafo.
- Lote *B*: 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 bolígrafos.
- Lote *C*: 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 bolígrafos.

Cada carpeta cuesta 6 euros, cada cuaderno 1,5 euros y cada bolígrafo 0,24 euros.

- Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.
- Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes *A*, *B* y *C*.

SOLUCIONES EJERCICIOS DE MATRICES

Ejercicio nº 1.-

Halla los valores de a y b en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de forma que $A^2 - 2A = B$,

siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Calculamos $A^2 - 2A$ e igualamos el resultado a B :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, ha de ser:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 - 2a = 0 \\ 2ab - 2b = 1 \end{array} \right\} a(a-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ó} \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } a = 0, -2b = 1 \rightarrow b = -\frac{1}{2} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ Si } a = 2, 2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 2.-

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

b) Halla una matriz, X , tal que $AX = B$.

Solución:

a) Se trata de probar que $A \cdot A^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. Efectuamos el producto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ como queriamos demostrar.}$$

b) Despejamos X en la igualdad $AX = B$, multiplicando por la izquierda por A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Por el apartado a), conocemos A^{-1} ; luego:

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 1 \\ -18 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 3.-

Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Así, el sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} 3X - 2Y = A \\ 2X + Y = B \end{array} \right\} X = B - 2Y$$

$$3X - 2(B - 2X) = A \rightarrow 3X - 2B + 4X = A \rightarrow 7X = A + 2B \rightarrow X = \frac{1}{7}(A + 2B)$$

$$Y = B - 2X = B - \frac{2}{7}(A + 2B) = B - \frac{2}{7}A - \frac{4}{7}B = \frac{3}{7}B - \frac{2}{7}A = \frac{1}{7}(3B - 2A)$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{7}(A + 2B) = \frac{1}{7} \left[\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{7}(3B - 2A) = \frac{1}{7} \left[3 \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 21 & -7 & 14 \\ -28 & 0 & 21 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4.-

Calcula los valores de x para que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

verifique la ecuación $A^2 - 6A + 9I = 0$, donde I y O son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.

Solución:

Calculamos $A^2 - 6A + 9I$ e igualamos a 0:

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 9I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 9 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 - 6x + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha de ser:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow x = 3$$

Por tanto, el único valor de x que hace que se verifique la igualdad propuesta es $x = 3$.

Ejercicio nº 5.-

Si I es la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, halla el valor que deben tener x e y para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.

Solución:

Calculamos $A^2 - xA - yI$ e igualamos a 0:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - xA - yI = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2x - y & 9 - 3x \\ -6 + 2x & -5 - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos que ha de ser:

$$\left. \begin{array}{l} -2 - 2x - y = 0 \\ 9 - 3x = 0 \\ -6 + 2x = 0 \\ -5 - x - y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = -2 - 2x = -2 - 6 = -8 \\ \rightarrow x = 3 \\ \rightarrow x = 3 \\ \rightarrow y = -5 - x = -5 - 3 = -8 \end{array}$$

Por tanto: $x = 3$, $y = 8$

Ejercicio nº 6.-

Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales:

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}; \quad X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla X e Y , y calcula, si tiene sentido, X^{-1} e Y^{-1} .

Solución:

Llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, el sistema queda:

$$\begin{cases} 2X - Y = A \\ X + 2Y = B \end{cases} \Rightarrow X = B - 2Y$$

$$2(B - 2Y) - Y = A \rightarrow 2B - 4Y - Y = A \rightarrow -5Y = A - 2B \rightarrow 5y = 2B - A \rightarrow$$

$$\rightarrow Y = \frac{1}{5}(2B - A)$$

$$X = B - 2Y = B - \frac{2}{5}(2B - A) = B - \frac{4}{5}B + \frac{2}{5}A = \frac{1}{5}B + \frac{2}{5}A = \frac{1}{5}(B + 2A)$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{5}(B + 2A) = \frac{1}{5} \left[\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{5}(2B - A) = \frac{1}{5} \left[2 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución al sistema es:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• Matrices inversas:

X no tiene matriz inversa. Veámoslo:

Supongamos que $X^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$X \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ a - 2c & b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ es decir:}$$

$$\left. \begin{array}{l} a - 2c = 1 \\ a - 2c = 0 \end{array} \right\} \text{ imposible} \\ \left. \begin{array}{l} b - 2d = 0 \\ b - 2d = 1 \end{array} \right\} \text{ imposible} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} a - 2c = 1 \\ a - 2c = 0 \end{array}} \right\} \text{ Luego, no existe } X^{-1}.$$

Calculamos $Y^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$Y \cdot Y^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ de donde:}$$

$$\left. \begin{array}{l} -c=1 \\ -d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c=-1 \\ d=0 \\ a=-c=1 \\ b=1-d=1-0=1 \end{array} \quad \text{Por tanto: } Y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Se comprueba que $Y \cdot Y^{-1} = I$).

Ejercicio nº 7.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2 , A^3 , A^4 , A^5 .

b) Halla el valor de $A^{25} + A^{-1}$.

Solución:

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^5 = A^4 A = IA = A$$

$$\text{b) } A^{25} = A^{4 \cdot 6 + 1} = (A^4)^6 A = I^6 A = IA = A$$

Para hallar A^{-1} , tenemos en cuenta que:

$$A^4 = A^3 A = I \rightarrow A^{-1} = A^3$$

Utilizando los resultados del apartado a), tenemos que:

$$A^{25} + A^{-1} = A + A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 8.-

Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Despejamos X en la ecuación propuesta:

$$2A = AX + B \rightarrow 2A - B = AX \rightarrow A^{-1}(2A - B) = A^{-1}AX$$

$$2A^{-1}A - A^{-1}B = IX \rightarrow 2I - A^{-1}B = X$$

Calculamos la inversa de A :

Llamamos $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ de donde:}$$

$$\left. \begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ -a+c=0 \\ -b+d=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ c=a=1 \\ d=1+b=1+0=1 \end{array} \right\} \text{ Por tanto: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operamos para obtener $X = 2I - A^{-1}B$:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = 2I - A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 9.-

Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donde } a, b \text{ y } c \text{ son tres números reales arbitrarios.}$$

a) Encuentra A^n para todo natural n .

b) Calcula $(A^{35} - A)^2$.

Solución:

a) $A^1 = A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como $A^3 = 0$, tenemos que $A^n = 0$ para $n \geq 3$.

b) Teniendo en cuenta lo obtenido en a):

$$(A^{35} - A)^2 = (0 - A)^2 = (-A)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 10.-

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A^t A$ y AA^t , donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

b) Encuentra las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tales que: $AA^t X = X$

c) Encuentra todas las matrices de la forma $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, tales que: $A^t A Y = Y$

Solución:

a) La matriz transpuesta de A es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto:}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Imponemos la condición dada:

$$A A^t X = X \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = x \\ 2y = y \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $x \in \mathbb{R}$.

$$c) A^t A Y = Y \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+c = a \rightarrow c = 0 \\ b = b \\ a+c = c \rightarrow a = 0 \end{cases}$$

Por tanto: $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $b \in \mathbb{R}$.

Ejercicio nº 11.-

Obtén el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 4 \cdot 1^a \\ 4^a + 7 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \\ 4^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(M) = 2.$$

Ejercicio nº 12.-

Averigua cuál es el rango de:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A) = 2.$$

Ejercicio nº 13.-

Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 5 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 10 & -8 \\ 0 & -20 & 20 & -16 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \\ 4^a - 4 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A) = 2.$$

Ejercicio nº 14.-

Estudia el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ 4^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a + 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A) = 3.$$

Ejercicio nº 15.-

Halla el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & 18 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2^a & 0 & -3 & 2 & -6 \\ 3^a + 3 \cdot 2^a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 \cdot 4^a + 4 \cdot 2^a & 0 & 0 & 14 & -30 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(M) = 3.$$

Ejercicio nº 16.-

Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2^a \\ 1^a \\ 3^a}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1^a & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2^a & 0 & 5 & 4 & -4 \\ 3^a + 2^a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A) = 2.$$

Esto significa que hay dos columnas linealmente independientes en A ; las otras dos dependen linealmente de ellas.

Ejercicio nº 17.-

Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores

$$\{\bar{u}_1 = (2, -1, 0, 1); \bar{u}_2 = (-1, 0, 2, 1); \bar{u}_3 = (5, -4, 6, 7)\}$$

y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$.

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz cuyas filas son $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 5 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 16 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 4 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, el rango de la matriz es 2.}$$

Esto significa que los vectores son linealmente dependientes. Hay dos vectores linealmente independientes y el tercero depende de ellos.

Ejercicio nº 18.-

a) Halla el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores:

$$\bar{u}_1 = (2, -1, 3, 4); \bar{u}_2 = (0, 1, 1, 2) \text{ y } \bar{u}_3 = (-1, 3, 4, 1)$$

Solución:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 3 \cdot 1^a \\ 4^a + 4 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 13 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \\ 4^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 3 \cdot 4^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A) = 3.$$

b) Observamos que las columnas de la matriz A coinciden con los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$.

El número de vectores linealmente independientes es el rango de A . Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

Ejercicio nº 19.-

Dados los vectores:

$$\vec{u}_1 = (3, -1, 2, 0); \vec{u}_2 = (1, 2, -1, 1); \vec{u}_3 = (2, 1, 0, -1)$$

Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

Solución:

Calcula el rango de la matriz cuyas filas son los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^a} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2^a - 3 \cdot 1^a} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a - 2 \cdot 1^a} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz es 3.

Esto significa que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ son linealmente independientes.

Ejercicio nº 20.-

Estudia la dependencia lineal del conjunto de vectores:

$$\vec{u}_1 = (1, 1, -1, 1); \vec{u}_2 = (2, 3, -2, 1); \vec{u}_3 = (1, 3, -1, -1)$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz cuyas filas son los tres vectores dados. El rango coincide con el número de vectores linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^a} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2^a} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz es 2. Luego, hay dos vectores linealmente independientes; el tercero se puede escribir como combinación lineal de los otros dos.

Los tres vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ son linealmente dependientes.

Ejercicio nº 21.-

En una compañía se utilizan tres tipos de materiales (madera, plástico y aluminio) para fabricar tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás, según la tabla:

	SILLA	MECEDORA	SOFÁ
MADERA	1 unidad	1 unidad	1 unidades
PLÁSTICO	1 unidad	1 unidad	2 unidades
ALUMINIO	2 unidades	3 unidades	5 unidades

Obtén, matricialmente, las unidades de madera, de plástico y de aluminio que se han utilizado para fabricar 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás.

Solución:

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{l} \text{SILLA MECED. SOFÁ} \\ \text{MADERA} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{PLÁSTICO} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{ALUMINIO} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{SILLAS} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SOFÁS} \end{array} = \begin{array}{l} \text{MADERA} \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 1500 \end{pmatrix} \\ \text{PLÁSTICO} \\ \text{ALUMINIO} \end{array}$$

Es decir se han utilizado 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio.

Ejercicio nº 22.-

Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz A . La evolución de los precios de los años 1997 a 2000 viene reflejada en la matriz B .

a) Hallar, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$ e indicar que información proporciona el producto matricial.

b) ¿Qué información nos da el elemento c_{34} de la matriz producto?

$$A = \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \begin{array}{c} \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array} \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \quad B = \begin{array}{l} \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array} \begin{array}{c} 1997 \\ 1998 \\ 1999 \\ 2000 \end{array} \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) La matriz A es 3×3 y la B es 3×4 . Para poder efectuar el producto de dos matrices, el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

Por tanto, el producto $B \cdot A$ no se puede hacer, pero el $A \cdot B$ sí.

$$A \cdot B = \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \begin{array}{c} \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array} \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{l} \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array} \begin{array}{c} 1997 \\ 1998 \\ 1999 \\ 2000 \end{array} \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \begin{array}{c} 1997 \\ 1998 \\ 1999 \\ 2000 \end{array} \begin{pmatrix} 106150 & 111300 & 113250 & 122750 \\ 108580 & 113140 & 115800 & 125450 \\ 73000 & 76200 & 78000 & 84500 \end{pmatrix}$$

La matriz $A \cdot B$ nos da el gasto anual de cada familia en el total de los tres productos durante los años 1997 a 2000.

b) El elemento $c_{34} = 84\,500$, corresponde a la familia tercera en el año 2000; es decir, nos indica el gasto total de esta familia en los tres productos durante ese año.

Ejercicio nº 23.-

En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos *A*, *B*, y *C*, que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:

	PRODUCTO		
MATERIAL	A	B	C
CHATARRA	8	6	6
CARBÓN	6	6	4
ALEACIONES	2	1	3

Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de *A*, 4 de *B* y 3 de *C*.

Solución:

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{matrix} & A & B & C \\ \text{CHATARRA} & 8 & 6 & 6 \\ \text{CARBÓN} & 6 & 6 & 4 \\ \text{ALEACIONES} & 2 & 1 & 3 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} A(6) \\ B(4) \\ C(3) \end{matrix} = \begin{matrix} \text{CHATARRA}(90) \\ \text{CARBÓN}(72) \\ \text{ALEACIONES}(25) \end{matrix}$$

Es decir, necesitaremos 90 unidades de chatarra, 72 de carbón mineral y 25 de aleaciones.

Ejercicio nº 24.-

Una empresa produce tres bienes *A*, *B*, y *C*. Tiene tres factorías y, cada una de ellas, produce los tres bienes en las cantidades por hora siguientes:

	FACTORÍA 1	FACTORÍA 2	FACTORÍA 3
A	10 unidades/hora	20 unidades/hora	15 unidades/hora
B	25 unidades/hora	25 unidades/hora	20 unidades/hora
C	30 unidades/hora	25 unidades/hora	25 unidades/hora

En la Factoría 1 se trabajan 8 horas diarias, la Factoría 2 funciona las 24 horas del día y en la Factoría 3 se trabajan 10 horas diarias.

- a) Calcula matricialmente el número de unidades diarias de los bienes *A*, *B* y *C* que fabrica la empresa.
- b) Si se trabaja durante 22 días cada mes, obtén matricialmente la proporción mensual de la empresa en cada uno de los bienes *A*, *B* y *C*.

Solución:

a) Organizamos en dos matrices los datos que tenemos; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{matrix} \text{FACT.1} & \text{FACT.2} & \text{FACT.3} \\ A(10 & 20 & 15) \\ B(25 & 25 & 20) \\ C(30 & 25 & 25) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \text{FACT.1}(8) \\ \text{FACT.2}(24) \\ \text{FACT.3}(10) \end{matrix} = \begin{matrix} A(710) \\ B(1000) \\ C(1090) \end{matrix}$$

Es decir, cada día se fabrican en total (entre las tres factorías de la empresa) 710 unidades de A , 1000 unidades de B y 1090 de C .

b) La matriz obtenida en a) nos daba la proporción diaria: si la multiplicamos por 22 (los días que se trabajan cada mes), obtendremos la producción mensual:

$$\begin{matrix} A \\ 22 \cdot B \\ C \end{matrix} \begin{pmatrix} 710 \\ 1000 \\ 1090 \end{pmatrix} = \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{pmatrix} 15620 \\ 22000 \\ 23980 \end{pmatrix}$$

Por tanto, cada mes se fabrican en la empresa (entre las tres factorías) 15620 unidades de A , 22000 unidades de B y 23980 de C .

Ejercicio nº 25.-

En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y bolígrafos, agrupándolos en tres tipos de lotes:

- Lote A : 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 bolígrafo.
- Lote B : 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 bolígrafos.
- Lote C : 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 bolígrafos.

Cada carpeta cuesta 6 euros, cada cuaderno 1,5 euros y cada bolígrafo 0,24 euros.

- a) Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.
- b) Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes A , B y C .

Solución:

a) La matriz será:

CARPETAS	CUADERNOS	BOLÍGRAFOS
A $\begin{pmatrix} 1$	1	$\begin{pmatrix} 1$
B $\begin{pmatrix} 1$	3	$\begin{pmatrix} 3$
C $\begin{pmatrix} 2$	3	$\begin{pmatrix} 4$

b) Los precios de cada carpeta, cada cuaderno y cada bolígrafo se resumen en la matriz:

CARPETA	$\begin{pmatrix} 6$
CUADERNO	$\begin{pmatrix} 1,5$
BOLÍGRAFO	$\begin{pmatrix} 0,24$

Si multiplicamos la matriz obtenida en a) con esta última, obtendremos la matriz que buscamos:

CARPETA	CUADERNO	BOLÍGRAFO		
A $\begin{pmatrix} 1$	1	$\begin{pmatrix} 1$	·	CARPETA $\begin{pmatrix} 6$
B $\begin{pmatrix} 1$	3	$\begin{pmatrix} 3$	·	CUADERNO $\begin{pmatrix} 1,5$
C $\begin{pmatrix} 2$	3	$\begin{pmatrix} 4$	·	BOLÍGRAFO $\begin{pmatrix} 0,24$
				$=$
				B $\begin{pmatrix} 7,74$
				C $\begin{pmatrix} 11,22$
				C $\begin{pmatrix} 17,46$

Es decir, el lote A cuesta 7,74 euros, el lote B , 11,22 euros y el lote C , 17,46 euros.