

APLICACIONES DE LAS MATRICES

Ejercicio nº 1.-

a) Encuentra los valores de a para los que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

no es inversible.

b) Calcula A^{-1} para $a = 2$.

Ejercicio nº 2.-

Calcula, si es posible, la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$$

Para los casos en los que $a = 2$ y $a = 0$.

Ejercicio nº 3.-

Halla una matriz, X , tal que $AX + B = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4.-

Halla X tal que $AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 5.-

a) Calcula para qué valores de λ existe la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$$

b) Calcula A^{-1} para $\lambda = 0$.

Ejercicio nº 6.-

Expresa el siguiente sistema en forma matricial y resuélvelo utilizando la matriz inversa:

$$\left. \begin{array}{l} -3x + y - z = -5 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x \quad + z = 3 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 7.-

Expresa y resuelve el siguiente sistema en forma matricial:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 6 \\ x \quad + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 8.-

Expresa en forma matricial y resuelve, utilizando la matriz inversa:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 7 \\ x + y - 2z = 5 \\ y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 9.-

Expresa y resuelve en forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 6 \\ 2x - y + z = 8 \\ x - 2y + z = 7 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 10.-

Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\left. \begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = -4 \\ x - y + z = -1 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 11.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z - t = 3 \\ 2x + y - z + t = 2 \\ -x + y + z - t = 1 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 12.-

Estudia la compatibilidad del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 3 \\ -x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x + 5y - 5z = 5 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 13.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 1 \\ -x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 14.-

Utiliza el teorema de Rouché para estudiar la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 4y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 3 \\ x \quad \quad - z = 7 \\ x - y \quad \quad = 2 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 15.-

Estudia la compatibilidad de este sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ -x + 3y = -1 \\ -x + 6y = 2 \\ x - y = 5 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 16.-

Resuelve, aplicando la regla de Cramer, los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} -x + 3y = -5 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} -x + 2y - z = 0 \\ x - 3y + z = -3 \\ 2x + y - z = 1 \end{array} \right\} \end{array}$$

Ejercicio nº 17.-

Resuelve, aplicando la regla de Cramer:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} -3x + 2y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 1 \\ x - 3y - 2z = -3 \end{array} \right\} \end{array}$$

Ejercicio nº 18.-

Resuelve los siguientes sistemas, aplicando la regla de Cramer:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 4 \\ 3x + y + z = 6 \end{array} \right\} \end{array}$$

Ejercicio nº 19.-

Aplica la regla de Cramer para resolver estos sistemas:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = -5 \\ 5x + y = 1 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ -3x + y + z = -5 \\ x - y + 3z = 5 \end{array} \right\} \end{array}$$

Ejercicio nº 20.-

Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} -x + 4y = -6 \\ 2x - 3y = 7 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = -3 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x - y + 3z = 6 \end{array} \right\} \end{array}$$

Ejercicio nº 21.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo si es posible:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 6 \\ 3x - y + z = 5 \\ -x + 2y - z = 1 \\ x + 3y - z = 7 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 22.-

Estudia, y resuelve si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} -3x + 4y - z = -3 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + y + 3z = 6 \\ -x - y + 2z = -1 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 23.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema, y resuélvelo si es posible:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y - 2z = -5 \\ x + 3y + z = -4 \\ 7x + 5y + 11z = 8 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 24.-

Estudia, y resuelve si es posible, el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y + z - t = 8 \\ x + y - z + t = 1 \\ -x + 2y + z + 2t = 2 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 25.-

Estudia la compatibilidad de este sistema y resuélvelo si tiene solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z - t = -2 \\ 2x + y - 2z + 2t = 3 \\ -x - y + z + t = 5 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 26.-

Discute, y resuelve cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y = a \\ (a+1)x + 2y + z = a+3 \\ 2y + z = 2 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 27.-

Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores de λ y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x - y + 2z = 0 \\ -x + \lambda y + 2z = 0 \\ 2x + \lambda y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 28.-

Discute y resuelve el siguiente sistema, según los valores del parámetro m :

$$\left. \begin{array}{l} mx + y + z = 2 \\ x + my = 1 \\ x + my + mz = 1 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 29.-

Discute el siguiente sistema homogéneo según los diferentes valores del parámetro λ . Resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x + 2z = 0 \\ (\lambda - 2)y + z = 0 \\ (\lambda - 1)x + y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 30.-

Discute el siguiente sistema, y resuélvelo cuando sea posible, en función del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} y + az = 1 \\ x + a^2z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 31.-

Estudia el siguiente sistema, en función de a y b . Resuélvelo en los casos en los que sea compatible indeterminado:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + az = 1 \\ 2x + y + az = 3 \\ x + 2y - az = b \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 32.-

Discute, en función de λ y μ , el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + \lambda z = 2 \\ -x + 2y - \lambda z = -2 \\ x + 4y + z = \mu \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 33.-

Estudia, en función de a y b , el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible indeterminado:

$$\left. \begin{array}{l} x + ay - z = 2 \\ ax - 2y + 2z = -1 \\ 2x - y + z = b \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 34.-

Estudia el siguiente sistema según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y + z = \mu \\ 2x - y + z = 2 \\ x + \lambda y + 2z = 3 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 35.-

Discute el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x = a \\ 5x + y = 3 + b + 2a \\ x = b \end{array} \right\}$$

SOLUCIONES EJERCICIOS APLICACIONES DE LAS MATRICES

Ejercicio nº 1.-

a) Encuentra los valores de a para los que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

no es inversible.

b) Calcula A^{-1} para $a = 2$.

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.

Calculamos el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2 - (a-2) + a \cdot (a-2) - 2a - 2 = 3a^2 - 5a + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Por tanto, la matriz no es inversible para $a = 1$ y para $a = \frac{2}{3}$.

b) Para $a = 2$, tenemos que $|A| = 4$. La matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 2.-

Calcula, si es posible, la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$$

Para los casos en los que $a = 2$ y $a = 0$.

Solución:

Para $a = 2$, queda:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, $|A| = -2$. En este caso, sí existe A^{-1} . La calculamos:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Para $a = 0$, queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como las dos primeras filas son iguales, $|A| = 0$.

Por tanto, en este caso, no existe A^{-1} .

Ejercicio nº 3.-

Halla una matriz, X , tal que $AX + B = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1} :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

Despejamos X en la ecuación dada:

$$AX + B = 0 \rightarrow AX = -B \rightarrow A^{-1}AX = -A^{-1}B \rightarrow X = -A^{-1}B$$

Hallamos la matriz inversa de A :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz X :

$$X = -A^{-1}B = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4.-

Halla X tal que $AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1} :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

Despejamos X de la ecuación dada:

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Hallamos la matriz inversa de A :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz X :

$$X = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -15 & -5 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 5.-

a) Calcula para qué valores de λ existe la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$$

b) Calcula A^{-1} para $\lambda = 0$.

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.

Calculamos el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 4\lambda - 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 3(\lambda + 1)^2$$

$$|A| = 0 \rightarrow 3(\lambda + 1)^2 = 0 \rightarrow \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

Por tanto, existe A^{-1} para $\lambda \neq -1$.

b) Para $\lambda = 0$, la matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 6.-

Expresa el siguiente sistema en forma matricial y resuélvelo utilizando la matriz inversa:

$$\left. \begin{array}{l} -3x + y - z = -5 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x \quad + z = 3 \end{array} \right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1} :

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

Calcula la inversa de A :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Despejamos X :

$$AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$x = 1, y = -1, z = 1$$

Ejercicio nº 7.-

Expresa y resuelve el siguiente sistema en forma matricial:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 6 \\ x \quad \quad + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{array} \right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1} :

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A :

$$\begin{aligned} \text{Adj}(A) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow A^{-1} &= \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Despejamos X :

$$AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$$

$$X = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 0$$

Ejercicio nº 8.-

Expresa en forma matricial y resuelve, utilizando la matriz inversa:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 7 \\ x + y - 2z &= 5 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

Si llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Para resolverlo, despejamos X multiplicando por la izquierda por A^{-1} :

$$AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$$

Comprobamos que $|A| = 3 \neq 0$ y hallamos A^{-1} :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos X :

$$X = A^{-1}C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la solución del sistema es:

$$x = 1; \quad y = 2; \quad z = -1$$

Ejercicio nº 9.-

Expresa y resuelve en forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 6 \\ 2x - y + z = 8 \\ x - 2y + z = 7 \end{array} \right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Calculamos $|A|$, para ver si existe A^{-1} :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X :

$$AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$x = 2, y = -1, z = 3$$

Ejercicio nº 10.-

Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\left. \begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = -4 \\ x - y + z = -1 \end{array} \right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Calculamos $|A|$, para ver si existe A^{-1} :

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Despejamos X :

$$AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \quad X = A^{-1}C$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$x = -2, \quad y = 0, \quad z = 1$$

Ejercicio nº 11.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z - t = 3 \\ 2x + y - z + t = 2 \\ -x + y + z - t = 1 \end{array} \right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Luego, $\text{ran}(A) \geq 2$.

Además:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Por tanto, $\text{ran}(A) = 3$.

Con esto, también deducimos que $\text{ran}(A') = 3$, siendo A' la matriz ampliada.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, como $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') < n^\circ \text{ incógnitas}$, el sistema es compatible indeterminado.

Ejercicio nº 12.-

Estudia la compatibilidad del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 3 \\ -x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x + 5y - 5z = 5 \end{array} \right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow |A'| = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Como $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^\circ \text{ de incógnitas}$, el sistema es compatible determinado.

Ejercicio nº 13.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 1 \\ -x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{array} \right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Como $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A')$, el sistema es incompatible.

Ejercicio nº 14.-

Utiliza el teorema de Rouché para estudiar la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 3 \\ x - z = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Solución:

- Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Luego, $\text{ran}(A) \geq 2$.

Veamos si la 3ª fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{La 3ª fila depende de las dos primeras.}$$

Veamos si la 4ª fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{La 4ª fila también depende linealmente de las dos primeras.}$$

Por tanto, $\text{ran}(A) = 2$.

- Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 7 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\text{ran}(A') = 2$.

- Así, como $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') < n^\circ \text{ incógnitas}$, el sistema es compatible indeterminado.

Ejercicio nº 15.-

Estudia la compatibilidad de este sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ -x + 3y = -1 \\ -x + 6y = 2 \\ x - y = 5 \end{array} \right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2.$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Como $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A')$, el sistema es incompatible.

Ejercicio nº 16.-

Resuelve, aplicando la regla de Cramer, los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } -x + 3y = -5 \\ \quad x + y = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{b) } -x + 2y - z = 0 \\ \quad x - 3y + z = -3 \\ \quad 2x + y - z = 1 \end{array} \right\}$$

Solución:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} -x + 3y = -5 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right); A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; |A| = -4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

La solución del sistema es: $x = 2, y = -1$

$$\text{b) } \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ x-3y+z=-3 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right); |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-14}{-3} = \frac{14}{3}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{4}{3}$; $y = 3$; $z = \frac{14}{3}$

Ejercicio nº 17.-

Resuelve, aplicando la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} -3x+2y=3 \\ 2x-y=-1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y+z=1 \\ x-3y-2z=-3 \end{cases}$$

Solución:

$$\text{a) } \begin{cases} -3x+2y=3 \\ 2x-y=-1 \end{cases} \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} \right); A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; |A| = -1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = 3$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y+z=1 \\ x-3y-2z=-3 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -3 \end{array} \right); |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0}{-2} = 0;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$

Ejercicio nº 18.-

Resuelve los siguientes sistemas, aplicando la regla de Cramer:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 4 \\ 3x + y + z = 6 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{array} \right); \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A| = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = 2$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 4 \\ 3x + y + z = 6 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12}{12} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{24}{12} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$

Ejercicio nº 19.-

Aplica la regla de Cramer para resolver estos sistemas:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = -5 \\ 5x + y = 1 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ -3x + y + z = -5 \\ x - y + 3z = 5 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = -5 \\ 5x + y = 1 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad |A| = -7$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{28}{-7} = -4$$

La solución del sistema es: $x = 1, y = -4$

$$b) \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3x+y+z=-5 \\ x-y+3z=5 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{array} \right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 22$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{44}{22} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{0}{22} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{22} = \frac{22}{22} = 1$$

La solución del sistema es: $x = 2, y = 0, z = 1$

Ejercicio nº 20.-

Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

$$a) \begin{cases} -x+4y=-6 \\ 2x-3y=7 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x-2y+z=-3 \\ 2x+3y-z=3 \\ x-y+3z=6 \end{cases}$$

Solución:

$$a) \begin{cases} -x+4y=-6 \\ 2x-3y=7 \end{cases} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{array} \right); \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad |A| = -5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-10}{-5} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$$

La solución del sistema es: $x = 2, y = -1$

$$b) \begin{cases} x-2y+z=-3 \\ 2x+3y-z=3 \\ x-y+3z=6 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 17$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{-15}{17}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{45}{17};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{17} = \frac{54}{17}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{-15}{17}$, $y = \frac{45}{17}$, $z = \frac{54}{17}$

Ejercicio nº 21.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo si es posible:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 6 \\ 3x - y + z = 5 \\ -x + 2y - z = 1 \\ x + 3y - z = 7 \end{array} \right\}$$

Solución:

Empezamos estudiando la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Luego, $\text{ran}(A) \geq 2$.

Además:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{ran}(A) = 3$.

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Como $|A| \neq 0$, tenemos que $\text{ran}(A') = 3$

Así, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^\circ \text{ incógnitas}$. El sistema es compatible determinado.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación, que es combinación lineal de las otras tres.

Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{11} = \frac{22}{11} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{11} = \frac{22}{11} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$

Ejercicio nº 22.-

Estudia, y resuelve si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} -3x + 4y - z = -3 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + y + 3z = 6 \\ -x - y + 2z = -1 \end{array} \right\}$$

Solución:

En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

Luego, $\text{ran}(A) \geq 2$.

Además:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$$

Por tanto, $\text{ran}(A) = 3$.

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Como $|A'| = 0$, $\text{ran}(A') = 3$.

Así, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^\circ \text{ incógnitas}$. El sistema es compatible determinado.
 Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación, pues es combinación lineal de las otras tres.

Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-44}{-22} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-22}{-22} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-22}{-22} = 1$$

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$

Ejercicio nº 23.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema, y resuélvelo si es posible:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y - 2z = -5 \\ x + 3y + z = -4 \\ 7x + 5y + 11z = 8 \end{array} \right\}$$

Solución:

En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Luego, $\text{ran}(A) \geq 2$.

Además, $|A| = 0$. Por tanto, $\text{ran}(A) = 2$.

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 7 & 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

Sabemos que la 3ª columna depende linealmente de las otras dos primeras. Veamos qué ocurre con la 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 7 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\text{ran}(A') = 2$.

Como $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') < n^\circ \text{ incógnitas}$, el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación pues es combinación lineal de las dos primeras. Pasamos la z al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y = -5 + 2z \\ x + 3y = -4 - z \end{array} \right\}$$

Hacemos $z = \lambda$: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -5 + 2\lambda \\ 1 & 3 & -4 - \lambda \end{array} \right)$

Sabemos que $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 + 2\lambda & 1 \\ -4 - \lambda & 3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-11 + 7\lambda}{-4} = \frac{11}{4} - \frac{7}{4}\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 + 2\lambda \\ 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix}}{-4} = \frac{9 - \lambda}{-4} = \frac{-9}{4} + \frac{1}{4}\lambda$$

Las soluciones del sistema son:

$$x = \frac{11}{4} - \frac{7}{4}\lambda; \quad y = \frac{-9}{4} + \frac{1}{4}\lambda; \quad z = \lambda, \quad \text{con } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Ejercicio nº 24.-

Estudia, y resuelve si es posible, el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y + z - t = 8 \\ x + y - z + t = 1 \\ -x + 2y + z + 2t = 2 \end{array} \right\}$$

Solución:

En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 1 & -1 & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 & 2 & \end{array} \right)$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Luego, $\text{ran}(A) \geq 2$.

Además:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Por tanto, $\text{ran}(A) = 3$.

Con esto, también deducimos que $\text{ran}(A) = 3$, siendo A' la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, como $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') < n^{\circ}$ incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, pasamos la t al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y + z = 8 + t \\ x + y - z = 1 - t \\ -x + 2y + z = 2 - 2t \end{array} \right\}$$

Hacemos $t = \lambda$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 8 + \lambda \\ 1 & 1 & -1 & 1 - \lambda \\ -1 & 2 & 1 & 2 - 2\lambda \end{array} \right)$$

Sabemos que
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 + \lambda & 2 & 1 \\ 1 - \lambda & 1 & -1 \\ 2 - 2\lambda & 2 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{18 + 9\lambda}{9} = 2 + \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 + \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - 2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{9 - 9\lambda}{9} = 1 - \lambda$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 8 + \lambda \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \\ -1 & 2 & 2 - 2\lambda \end{vmatrix}}{9} = \frac{18 + 9\lambda}{9} = 2 + \lambda$$

Las soluciones del sistema son:

$$x = 2 + \lambda, \quad y = 1 - \lambda, \quad z = 2 + \lambda, \quad t = \lambda, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{P}.$$

Ejercicio nº 25.-

Estudia la compatibilidad de este sistema y resuélvelo si tiene solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z - t = -2 \\ 2x + y - 2z + 2t = 3 \\ -x - y + z + t = 5 \end{array} \right\}$$

Solución:

En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Luego, $\text{ran}(A) \geq 2$.

Además:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Por tanto, $\text{ran}(A) = 3$.

Con esto, también deducimos que $\text{ran}(A') = 3$, siendo A' la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Así, como $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') < n^{\text{a}} \text{ incógnitas}$, el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, pasamos t al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = -2 + t \\ 2x + y - 2z = 3 - 2t \\ -x - y + z = 5 - t \end{array} \right\}$$

Hacemos $t = \lambda$. Entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 + \lambda \\ 2 & 1 & -2 & 3 - 2\lambda \\ -1 & -1 & 1 & 5 - \lambda \end{array} \right)$$

Sabemos que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 + \lambda & 2 & 1 \\ 3 - 2\lambda & 1 & -2 \\ 5 - \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-32 + 10\lambda}{-2} = 16 - 5\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 + \lambda & 1 \\ 2 & 3 - 2\lambda & -2 \\ -1 & 5 - \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{26 - 8\lambda}{-2} = -13 + 4\lambda$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2+\lambda \\ 2 & 1 & 3-2\lambda \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-16+4\lambda}{-2} = 8-2\lambda$$

Las soluciones del sistema son:

$$x = 16-5\lambda, \quad y = -13+4\lambda, \quad z = 8-2\lambda, \quad t = \lambda, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{P}.$$

Ejercicio nº 26.-

Discute, y resuelve cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y = a \\ (a+1)x + 2y + z = a+3 \\ 2y + z = 2 \end{array} \right\}$$

Solución:

Estudiando el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2a - 2a - (a+1) = -(a+1) = 0 \rightarrow a = -1$$

- Si $a \neq -1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$. El sistema es compatible determinado. Para cada valor de $a \neq -1$, tenemos un sistema con solución única:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = \frac{-a-1}{-a-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a+1 & a+3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & a+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = \frac{-2(a+1)}{-(a+1)} = 2$$

Para cada valor de $a \neq -1$, tenemos un sistema diferente. Cada uno de los sistemas tiene solución única:

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 2$$

- Si $a = -1$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & & \end{array} \right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, entonces $\text{ran}(A) = 2$.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 0 & -1 & \\ 0 & 2 & 1 & 2 & \\ 0 & 2 & 1 & 2 & \end{array} \right)$$

Las dos últimas filas son iguales, luego $\text{ran}(A') = 2$.

Como $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') < n^{\circ}$ incógnitas, en este caso el sistema sería compatible indeterminado. Prescindimos de la 3ª ecuación, pues es idéntica a la 2ª, pasamos z al 2º miembro y resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y = -1 \\ 2y = 2 - z \end{array} \right\} \text{ Hacemos } z = \lambda \rightarrow y = \frac{2 - \lambda}{2} = 1 - \frac{1}{2}\lambda$$

$$x = y + 1 = 1 - \frac{1}{2}\lambda + 1 = 2 - \frac{1}{2}\lambda$$

Las soluciones del sistema son:

$$x = 2 - \frac{1}{2}\lambda; \quad y = 1 - \frac{1}{2}\lambda; \quad z = \lambda, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio nº 27.-

Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores de λ y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x - y + 2z = 0 \\ -x + \lambda y + 2z = 0 \\ 2x + \lambda y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Solución:

Por tratarse de un sistema homogéneo, siempre tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$. Veamos si tiene, en algún caso, más soluciones:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = -3(\lambda + 1)^2 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

- Si $\lambda \neq -1 \rightarrow$ el sistema solo tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$.
- Si $\lambda = -1$, quedaría:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Las dos primeras filas son iguales y, además, $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

Luego, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$.

El sistema sería compatible indeterminado. Para resolverlo, pasamos z al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} -x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -x - y = -2z \\ 2x - y = z \end{array} \quad \text{Hacemos } z = \mu$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2\mu \\ 2 & -1 & \mu \end{array} \right)$$

Sabemos que $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2\mu & -1 \\ \mu & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3\mu}{3} = \mu; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2\mu \\ 2 & \mu \end{vmatrix}}{3} = \frac{3\mu}{3} = \mu$$

Las soluciones del sistema son:

$$x = \mu; \quad y = \mu; \quad z = \mu, \quad \text{con } \mu \in \mathbb{P}$$

Ejercicio nº 28.-

Discute y resuelve el siguiente sistema, según los valores del parámetro m :

$$\left. \begin{array}{l} mx + y + z = 2 \\ x + my = 1 \\ x + my + mz = 1 \end{array} \right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{pmatrix} \rightarrow |A| = m^3 - m = m(m^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

- Si $m \neq 0$, $m \neq 1$ y $m \neq -1 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

Para cada valor de m , distinto de 0, 1 y -1, tenemos un sistema diferente, todos ellos con solución única:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}}{m(m^2 - 1)} = \frac{m(2m - 1)}{m(m^2 - 1)} = \frac{2m - 1}{m^2 - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{m(m^2 - 1)} = \frac{m(m-2)}{m(m^2 - 1)} = \frac{m-2}{m^2 - 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{m(m^2 - 1)} = 0$$

Solución: $\left(\frac{2m-1}{m^2-1}, \frac{m-2}{m^2-1}, 0\right)$

- Si $m = 0$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Las dos últimas filas son iguales y $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Luego, el sistema es compatible indeterminado.

Las soluciones serían:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2 - z \\ x = 1 \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ Es decir: } x = 1, y = 2 - \lambda, z = \lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

- Si $m = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ Las ecuaciones 1ª y 3ª son contradictorias. El sistema sería incompatible.}$$

- Si $m = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{FILAS}} \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \cdot (-1) \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Las ecuaciones 1ª y 3ª son contradictorias. El sistema sería incompatible.

Ejercicio nº 29.-

Discute el siguiente sistema homogéneo según los diferentes valores del parámetro λ . Resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x \quad \quad + 2z = 0 \\ (\lambda - 2)y + z = 0 \\ (\lambda - 1)x + y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Solución:

Por tratarse de un sistema homogéneo, siempre tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$. Veamos si tiene, en algún caso, más soluciones.

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -3\lambda^2 + 7\lambda - 4 = 0 \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = \frac{4}{3} \end{cases}$$

• Para $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq \frac{4}{3}$ \rightarrow El sistema solo tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$.

• Para $\lambda = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$.

El sistema sería compatible indeterminado.

Para resolverlo, pasamos z al 2º miembro:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -2z \\ y = z \end{array} \quad \text{Hacemos } z = \mu$$

Las soluciones serían: $x = -2\mu$; $y = \mu$; $z = \mu$, con $\mu \in \mathbb{P}$

• Para $\lambda = \frac{4}{3}$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4/3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Como $\begin{vmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{vmatrix} = \frac{-8}{9} \neq 0$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$.

El sistema sería compatible indeterminado.

Para resolverlo, pasamos z al 2º miembro:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{3}x + 2z = 0 \\ -\frac{2}{3}y + z = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 4x + 6z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 4x = -6z \\ -2y = -3z \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \frac{-6}{4}z = \frac{-3}{2}z \\ y = \frac{-3}{-2}z = \frac{3}{2}z \end{array}$$

Las soluciones serían: $x = \frac{-3}{2}\mu$; $y = \frac{3}{2}\mu$; $z = \mu$, con $\mu \in \mathbb{R}$

Ejercicio nº 30.-

Discute el siguiente sistema, y resuélvelo cuando sea posible, en función del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} y + az = 1 \\ x + a^2z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{array} \right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 0 \text{ para cualquier valor de } a.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, entonces $\text{ran}(A) = 2$ para cualquier valor de a .

Estudiamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & a(a-1) & 2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\text{ran}(A') = 2$.

Como $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') < n^\circ \text{ incógnitas}$, el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a .

Podemos prescindir de la 3ª ecuación, pues es combinación lineal de las dos primeras.

Lo resolvemos pasando la z al 2º miembro:

$$\left. \begin{array}{l} y + az = 1 \\ x + a^2z = 2a + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 1 - az \\ x = 2a + 1 - a^2z \end{array} \text{ Hacemos } z = \lambda$$

Las soluciones del sistema serían:

$$x = 2a + 1 - a^2\lambda; \quad y = 1 - a\lambda; \quad z = \lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio nº 31.-

Estudia el siguiente sistema, en función de a y b . Resuélvelo en los casos en los que sea compatible indeterminado:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + az = 1 \\ 2x + y + az = 3 \\ x + 2y - az = b \end{array} \right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -3a = 0 \rightarrow a = 0$$

- Si $a \neq 0 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquier que sea el valor de b .
- Si $a = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & b \end{array} \right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = 3b - 6 = 0 \rightarrow b = 2$$

Si $a = 0$ y $b \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema es incompatible.

Si $a = 0$ y $b = 2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas}$. El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ z = \lambda \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}$$

Las soluciones son: $x = \frac{4}{3}$; $y = \frac{1}{3}$; $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio n° 32.-

Discute, en función de λ y μ , el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + \lambda z = 2 \\ -x + 2y - \lambda z = -2 \\ x + 4y + z = \mu \end{array} \right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ -1 & 2 & -\lambda \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 3 - 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

- Si $\lambda \neq 1 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquiera que sea el valor de μ . Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ -2 & 2 & -\lambda \\ \mu & 4 & 1 \end{vmatrix}}{3 - 3\lambda} = \frac{6 - 3\lambda\mu}{3 - 3\lambda} = \frac{2 - \lambda\mu}{1 - \lambda}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ -1 & -2 & -\lambda \\ 1 & \mu & 1 \end{vmatrix}}{3 - 3\lambda} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & \mu \end{vmatrix}}{3-3\lambda} = \frac{3\mu-6}{3-3\lambda} = \frac{\mu-2}{1-\lambda}$$

La solución es $\left(\frac{2-\lambda\mu}{1-\lambda}, 0, \frac{\mu-2}{1-\lambda}\right)$.

- Si $\lambda = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & \mu \end{array} \right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & \mu \end{vmatrix} = 3\mu - 6 = 0 \rightarrow \mu = 2$$

Si $\lambda = 1$ y $\mu \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema es incompatible.

Si $\lambda = 1$ y $\mu = 2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^{\circ}$ incógnitas. El sistema es compatible indeterminado.

Ejercicio nº 33.-

Estudia, en función de a y b , el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible indeterminado:

$$\left. \begin{array}{l} x + ay - z = 2 \\ ax - 2y + 2z = -1 \\ 2x - y + z = b \end{array} \right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -a^2 + 5a - 4 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 4 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquiera que sea el valor de b .
- Si $a = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & b \end{array} \right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix} = -3b + 3 = 0 \rightarrow b = 1$$

Si $a = 1$ y $b \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema sería incompatible.

Si $a = 1$ y $b = 1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^{\circ}$ incógnitas. El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ x - 2y + 2z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y = 2 + z \\ x - 2y = -1 - 2z \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ x - 2y + 2z = -1 \end{array}} \right\} \text{Hacemos } z = \lambda$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2+\lambda \\ 1 & -2 & -1-2\lambda \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2+\lambda \\ 1 & -2 & -1-2\lambda \end{array} \right| = -3; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 \\ -1-2\lambda & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+\lambda \\ 1 & -1-2\lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3-3\lambda}{-3} = 1+\lambda$$

Las soluciones son: $x = 1$; $y = 1 + \lambda$; $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{P}$

- Si $a = 4$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & b \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & b \end{array} \right| = -18b - 9 = 0 \rightarrow b = \frac{-1}{2}$$

Si $a = 4$ y $b \neq \frac{-1}{2} \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema sería incompatible.

Si $a = 4$ y $b = \frac{-1}{2} \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$

El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y - z = 2 \\ 4x - 2y + 2z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 4y = 2 + z \\ 4x - 2y = -1 - 2z \end{array} \quad \text{Hacemos } z = \lambda$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2+\lambda \\ 4 & -2 & -1-2\lambda \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2+\lambda \\ 4 & -2 & -1-2\lambda \end{array} \right| = -18; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 2+\lambda & 4 \\ -1-2\lambda & -2 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{6\lambda}{-18} = \frac{-\lambda}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+\lambda \\ 4 & -1-2\lambda \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-6\lambda - 9}{-18} = \frac{\lambda}{3} + \frac{1}{2}$$

Las soluciones son: $x = \frac{-\lambda}{3}$; $y = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{3}$; $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio nº 34.-

Estudia el siguiente sistema según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y + z = \mu \\ 2x - y + z = 2 \\ x + \lambda y + 2z = 3 \end{array} \right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

- Si $\lambda \neq 0 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado. Para cada valor de $\lambda \neq 0$ y cada valor de μ , tenemos un sistema diferente, cada uno de ellos con solución única. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda & 2 \end{vmatrix}}{3\lambda} = \frac{2 + 2\lambda - 2\mu - \lambda\mu}{3\lambda}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & \mu & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{3\lambda} = \frac{3 - 3\mu}{3\lambda} = \frac{1 - \mu}{\lambda}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & \mu \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix}}{3\lambda} = \frac{-1 + 2\lambda + \mu + 2\lambda\mu}{3\lambda}$$

$$\text{Solución: } \left(\frac{2 + 2\lambda - 2\mu - \lambda\mu}{3\lambda}, \frac{1 - \mu}{\lambda}, \frac{-1 + 2\lambda + \mu + 2\lambda\mu}{3\lambda} \right)$$

- Si $\lambda = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \mu \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & \mu \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \mu - 1 = 0 \rightarrow \mu = 1$$

Si $\lambda = 0$ y $\mu = 1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^{\circ}$ incógnitas. El sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = 0$ y $\mu \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema es incompatible.

Ejercicio nº 35.-

Discute el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x = a \\ 5x + y = 3 + b + 2a \\ x = b \end{array} \right\}$$

Solución:

- Observando la 2ª y la 4ª ecuación, deducimos que, si $a \neq b$, el sistema es incompatible.

- Si $a = b$, queda:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x = a \\ 5x + y = 3 + 3a \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 3 - 2x = 3 - 2a \\ x = a \\ y = 3 + 3a - 5x = 3 + 3a - 5a = 3 - 2a \end{array}$$

El sistema sería compatible determinado. La solución es: $x = a$, $y = 3 - 2a$