

LUGARES GEOMÉTRICOS

Ejercicio nº 1.-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P , cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-4, 0, 0)$ y $B(4, 0, 0)$ es 40. Identifica la figura resultante.

Ejercicio nº 2.-

Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos

$$\pi: 2x - 3y + z - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \sigma: 3x + y - 2z + 5 = 0$$

Ejercicio nº 3.-

Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos:

$$\pi: 3x - 4y + 2z + 3 = 0 \quad \text{y} \quad \sigma: 2x + 3y - 4z - 1 = 0$$

Ejercicio nº 4.-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P , del espacio tales que su distancia al punto $Q(1, 0, 0)$ es 3. Identifica la figura resultante.

Ejercicio nº 5.-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P , del espacio cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-2, 0, 0)$ y $B(2, 0, 0)$ es 106. Identifica la figura resultante.

ESFERA

Ejercicio nº 6.-

Halla la ecuación de la esfera de centro $(2, 1, -4)$ y que tiene el mismo radio que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$$

Ejercicio nº 7.-

Escribe la ecuación de la esfera de radio 5, que es concéntrica con la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 13 = 0$$

Ejercicio nº 8.-

Di si la siguiente ecuación corresponde a una esfera. En caso afirmativo, di su centro y su radio:

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 24x - 12y - 12z - 36 = 0$$

Ejercicio nº 9.-

Averigua si la siguiente ecuación corresponde a una esfera. En caso afirmativo, halla su centro y su radio:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 8y + 2 = 0$$

Ejercicio nº 10.-

Obtén la ecuación de la esfera que tiene el mismo centro que

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z - 61 = 0$$

y es tangente al plano $x + y - z + 6 = 0$.

SOLUCIÓN EJERCICIOS LUGARES GEOMÉTRICOS

Ejercicio nº 1.-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P , cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-4, 0, 0)$ y $B(4, 0, 0)$ es 40. Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, ha de tenerse que:

$$[dist(P, A)]^2 + [dist(P, B)]^2 = 40$$

Es decir:

$$(x+4)^2 + y^2 + z^2 + (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 40$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + z^2 + x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 = 40$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Es una esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 2.

Ejercicio nº 2.-

Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos

$$\pi: 2x - 3y + z - 1 = 0 \text{ y } \sigma: 3x + y - 2z + 5 = 0$$

Solución:

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, debe tenerse que:

$$\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, \sigma)$$

Es decir:

$$\frac{|2x - 3y + z - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{|3x + y - 2z + 5|}{\sqrt{14}}$$

$$|2x - 3y + z - 1| = |3x + y - 2z + 5|$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 3x + y - 2z + 5 & \rightarrow x + 4y - 3z + 6 = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = -3x - y + 2z - 5 & \rightarrow 5x - 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y σ . Los planos obtenidos son perpendiculares entre sí y se cortan en la misma recta que π y σ .

Ejercicio nº 3.-

Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos:

$$\pi: 3x - 4y + 2z + 3 = 0 \quad \text{y} \quad \sigma: 2x + 3y - 4z - 1 = 0$$

Solución:

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, debe tenerse que:

$$\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, \sigma); \text{ es decir:}$$

$$\frac{|3x - 4y + 2z + 3|}{\sqrt{29}} = \frac{|2x + 3y - 4z - 1|}{\sqrt{29}}$$

$$|3x - 4y + 2z + 3| = |2x + 3y - 4z - 1|$$

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z + 3 = 2x + 3y - 4z - 1 & \rightarrow x - 7y + 6z + 4 = 0 \\ 3x - 4y + 2z + 3 = -2x - 3y + 4z - 1 & \rightarrow 5x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y σ . Los planos obtenidos son perpendiculares entre sí y se cortan en la misma recta que π y σ .

Ejercicio nº 4.-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P , del espacio tales que su distancia al punto $Q(1, 0, 0)$ es 3. Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, Q) = 3$; es decir:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = 3 \rightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Es una esfera de centro $(1, 0, 0)$ y radio 3.

Ejercicio nº 5-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P , del espacio cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-2, 0, 0)$ y $B(2, 0, 0)$ es 106. Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, ha de tenerse que:

$$[dist(P, A)]^2 + [dist(P, B)]^2 = 106$$

Es decir:

$$(x+2)^2 + y^2 + z^2 + (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 106$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 = 106$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 98$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49$$

Obtenemos una esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 7.

ESFERA

Ejercicio nº 6.-

Halla la ecuación de la esfera de centro $(2, 1, -4)$ y que tiene el mismo radio que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$$

Solución:

Hallamos el radio:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \rightarrow Radio = \sqrt{16} = 4$$

Ecuación de la esfera:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z + 5 = 0$$

Ejercicio nº 7.-

Escribe la ecuación de la esfera de radio 5, que es concéntrica con la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 13 = 0$$

Solución:

Hallamos el centro:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 13 = 0$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{4}{2} \right) = (3, -1, 2)$$

Ecuación de la esfera:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 11 = 0$$

Ejercicio nº 8.-

Di si la siguiente ecuación corresponde a una esfera. En caso afirmativo, di su centro y su radio:

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 24x - 12y - 12z - 36 = 0$$

Solución:

Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y - 4z - 12 = 0$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{-8}{2}, \frac{4}{2}, \frac{4}{2} \right) = (-4, 2, 2)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{16 + 4 + 4 - (-12)} = \sqrt{36} = 6$$

Es una esfera de centro $(-4, 2, 2)$ y radio 6.

Ejercicio nº 9.-

Averigua si la siguiente ecuación corresponde a una esfera. En caso afirmativo, halla su centro y su radio:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 8y + 2 = 0$$

Solución:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 8y + 2 = 0. \text{ Dividimos entre 2:}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, 0\right) = (1, 2, 0)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{1+4-1} = \sqrt{4} = 2$$

Es una esfera de centro $(1, 2, 0)$ y radio 2.

Ejercicio nº 10.-

Obtén la ecuación de la esfera que tiene el mismo centro que

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z - 61 = 0$$

y es tangente al plano $x + y - z + 6 = 0$.

Solución:

Hallamos el centro: $\text{Centro} = (-1, -1, 1)$

El radio es la distancia del centro al plano tangente:

$$R = \frac{|-1-1-1+6|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Ecuación de la esfera:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z = 0$$