11 Integral definida

1. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^e \frac{L^2 x}{x}\,dx$

2. Calcula las siguientes integrales definidas:

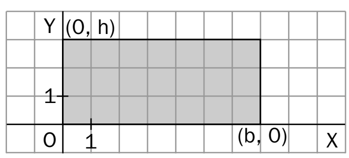
a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx$

3. Halla la función cuya gráfica es tal que la recta pendiente en cada punto de abscisa x sigue la ecuación $y = 6x + 4$, y el área encerrada por la curva pedida, el eje OX y las abscisas $x = 1$ y $x = 2$ es 5 unidades cuadradas.

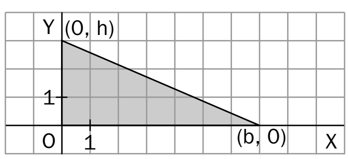
4. Se sabe que $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx = 3$. ¿Cuál es el valor de $\displaystyle\int_2^5 (f(x) + 2)\,dx$?

5. La parábola $f(x) = x^2 + ax + b$ verifica que su gráfica pasa por el punto (0, 3) y que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 2$. Halla los valores de a y b.

6. Demuestra, utilizando la integral definida, que el área del rectángulo de la figura es $S = b \cdot h$



7. Demuestra, utilizando la integral definida, que el área del triángulo rectángulo de la figura es $S = \dfrac{b \cdot h}{2}$



8. Considera la función $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) ¿Es f continua?

b) ¿Es f derivable?

c) Halla el valor de $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

9. Considera la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

a) Aproxima, mediante el área de un trapecio curvilíneo, el valor de $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$ (ayúdate de la gráfica de f).

b) Aplica la regla de Barrow para calcular $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$

c) Estima el error cometido al calcular el área pedida mediante el método del apartado a.

10. La función $f(x) = \dfrac{1}{e^{x^2}}$ no tiene primitiva y, por tanto, no se puede usar la regla de Barrow. Aproxima, mediante el área de un trapecio curvilíneo, el valor de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$

SOLUCIONES

1. a) $2\sqrt{x+2}\,\Big|_2^7 = 6 - 4 = 2$

b) $\text{sen } x + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$

c) $\dfrac{L^3\, x}{3}\Bigg|_1^e = \dfrac{1}{3}$

2. a) $L(\cos x) + x\text{tg } x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{L2}{2}$

b) $-\dfrac{1}{x+2}\Bigg|_0^4 = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

c) $-\dfrac{\cos^3 x}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{3}$

3. $f(x) = \displaystyle\int (6x + 4)\, dx = 3x^2 + 4x + C$, además $\displaystyle\int_1^2 (3x^2 + 4x + C)\, dx = x^3 + 2x^2 + Cx\Big|_1^2 = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow (16 + 2C) - (3 + C) = 5 \Rightarrow C = -8$, la función pedida es $f(x) = 3x^2 + 4x - 8$

4. $\displaystyle\int_2^5 (f(x) + 2)\, dx = \int_2^5 f(x)\, dx + \int_2^5 2\, dx =$
$= 3 + (2x)\Big|_2^5 = 3 + 6 = 9$

5. Si pasa por $(0, 3) \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow b = 3$

$\displaystyle\int_0^1 (x^2 + ax + 3)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + 3x\Big|_0^1 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\dfrac{8}{3}$

6. Se trata de hacer la integral definida de la recta que pasa por $(0, h)$ y (b, h) entre $x = 0$ y $x = b$:

$\displaystyle\int_0^b hdx = hx\Big|_0^b = bh$

7. Se trata de hacer la integral definida de la recta que pasa por $(0, h)$ y $(b, 0)$ entre $x = 0$ y $x = b$:

$\displaystyle\int_0^b \left(-\frac{hx}{b} + h\right) dx = -\frac{hx^2}{2b} + hx\Big|_0^b =$

$= -\dfrac{hb}{2} + hb = \dfrac{bh}{2}$

8. a) f es continua siempre, pues es continua en cada trozo de su dominio por ser exponencial y polinómica, respectivamente, y además es continua en 0, ya que
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 2$

b) f es derivable siempre, pues es derivable en cada trozo de su definición por ser exponencial y polinómica, respectivamente, y además es derivable en 0, ya que $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\, dx =$

$= \displaystyle\int_{-1}^0 (e^x + 1)\, dx + \int_0^1 (x^2 + x + 2)\, dx =$

$= e^x + x\Big|_{-1}^0 + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x\Big|_0^1 = \dfrac{29}{6} - \dfrac{1}{e}$

9. a) $S = \dfrac{f(e) + f(1)}{2}(e - 1) \cong$

$\cong 1{,}175$ unidades cuadradas.

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\, dx = \text{L}x\Big|_1^e = 1$ unidades cuadradas.

c) error $\cong 0{,}175$ unidades cuadradas.

10. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{e^{x^2}}\, dx \cong \frac{f(3) + f(1)}{2}(3 - 1) = \frac{1}{e^9} + \frac{1}{e} =$
$= 0{,}368$ unidades cuadradas.