17 Intervalos de confianza

1. a) Dar ejemplos de estimadores puntuales insesgados y eficientes para la media y la varianza poblacionales.

b) Supongamos que las alturas de 100 estudiantes de una universidad representan una muestra, elegida al azar, de las 5 316 alturas de todos los estudiantes de dicha universidad. Si la media y la desviación típica de estas 100 alturas son 178 cm y 10 cm respectivamente, determina estimaciones insesgadas y eficientes de la altura media y la varianza poblacionales.

2. Al medir el tiempo de respuesta a señales luminosas en pruebas para renovar el permiso de conducir, se estima que la desviación típica del mismo es de 0,05 segundos. Indica cuál será el número de medidas que deberás hacer para que el error de tu estimación no exceda de 0,01 segundos, con un nivel de confianza del:

a) 95 %.

b) 99 %.

3. En 60 lanzamientos de una moneda se obtuvieron 36 cruces. Halla el intervalo de confianza para la proporción de cruces que se obtendrían en un número ilimitado de tiradas, con un nivel de confianza del:

a) 95 %.

b) 99,73 %.

4. El consumo de un producto sigue una distribución normal, con varianza 300. A partir de una muestra de tamaño 25 se ha logrado una media muestral igual a 180. Halla un intervalo de confianza, al 99 %, para la media del consumo.

5. Al medir el diámetro de arandelas producidas por una empresa, se estima que la desviación típica de dicho diámetro es 0,05 cm. Se han hecho 121 mediciones con objeto de estimar el diámetro medio.

¿Se puede afirmar, con el 99 % de confianza, que el error de la estimación no excederá de 0,012 cm?

6. Una empresa adquiere 5 000 cables de acero. Un ensayo con 40 de ellos, elegidos al azar, dieron una media de resistencia a la rotura de 2 400 kg, con una desviación típica de 150 kg.

a) Halla un intervalo de confianza para la resistencia media, de la población de cables adquiridos, al nivel de confianza del 80 %.

b) Repite el apartado a para un nivel del 95 %.

c) Compara las longitudes de los intervalos obtenidos en los apartados anteriores e interprétalos.

d) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra, para estar seguro al nivel del 85 %, que el error máximo cometido sea de 10 kg?

SOLUCIONES

1. a) Para la media poblacional: la media muestral: $\overline{X}$.
Para la varianza poblacional:
la cuasivarianza muestral: $\hat{S}^2 = \dfrac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

b) Para la media poblacional: 178 cm.
Para la varianza poblacional:

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1} S^2 \Rightarrow \hat{S}^2 = \frac{100}{99} \cdot 10^2 = 101{,}01 \text{ cm}^2$$

2. a) Para $1 - \alpha = 0{,}95$ el intervalo de confianza, para la media poblacional, es $\left(\overline{x} \pm 1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Como no conocemos σ, tomamos $\sigma = s = 0{,}05\ s$, con lo que el error es:

$$1{,}96 \frac{0{,}05}{\sqrt{n}} = 0{,}01 \iff n = \left(1{,}96 \frac{0{,}05}{0{,}01}\right)^2 =$$

$= 9{,}8^2 = 96{,}04 \Rightarrow$ para $n \geqslant 97$, el error $< 0{,}01\ s$

b) Para $1 - \alpha = 99$, el intervalo de confianza es $\left(\overline{x} \pm 2{,}58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ y el error de la estimación $2{,}58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Tomamos $\sigma = s = 0{,}05\ s$, así:

$$2{,}58 \frac{0{,}05}{\sqrt{n}} = 0{,}01 \iff n = \left(2{,}58 \frac{0{,}05}{0{,}01}\right)^2 =$$

$= 12{,}9^2 = 166{,}4 \Rightarrow$ para $n \geqslant 167$, el error $< 0{,}01\ s$

3. a) $1 - \alpha = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}05$

$$p(Z \leqslant Z_{\frac{\sigma}{2}}) = 0{,}95 + \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975,\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

$$IC: \left(\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0{,}6 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{60}}\right)$$

$= (0{,}6 \pm 0{,}124) = (0{,}476,\ 0{,}724)$

b) $1 - \alpha = 0{,}9973$, $\alpha = 0{,}0027$, $P(Z \leqslant Z_{\frac{\sigma}{2}}) =$

$$= 0{,}9973 + \frac{0{,}0027}{2} = 0{,}9987,\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 3$$

$$IC: \left(\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0{,}6 \pm 3 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{60}}\right)$$

$= (0{,}6 \pm 0{,}189) = (0{,}411;\ 0{,}789)$

4. Como la población sigue una normal, la variable media muestral sigue $N\left(\overline{x}, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, aun para valores de $n < 30$, donde hemos sustituido μ, desconocida, por $\overline{x}$. El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$\left(\overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(180 \pm z_{\frac{0{,}01}{2}} \cdot \frac{\sqrt{300}}{\sqrt{25}}\right) =$$

$= (171{,}06;\ 188{,}94)$, ya que $Z_{\frac{0{,}01}{2}} = 2{,}58$

5. Sí se puede, ya que: error máximo $= z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} =$

$$= z_{\frac{0{,}01}{2}} \cdot \frac{0{,}05}{\sqrt{121}} = 2{,}58 \cdot \frac{0{,}05}{11} = 0{,}0117$$

6. El estimador de la media poblacional es la media muestral, $\overline{x} \longrightarrow N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, pero como σ es desconocida se trabaja con: $N\left(\mu, \dfrac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{5\,000}{4\,999}} \cdot s = 150{,}01 \approx 150$$

a) Para $1 - \alpha = 0{,}80$, el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}2}{2}} = 1{,}28$, puesto que: $p(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}80 + 0{,}10 = 0{,}90$; entonces:

$$IC = \left(\overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right) = \left(2\,400 \pm 1{,}28 \cdot \frac{150}{\sqrt{40}}\right) =$$

$= (2\,369{,}6;\ 2\,430{,}4)$

b) Para un nivel de confianza $1 - \alpha = 0{,}95$, el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}05}{2}} = 1{,}96$, ya que $p(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}95 + 0{,}025 = 0{,}975$

$$IC = \left(2\,400 \pm 1{,}96 \cdot \frac{150}{\sqrt{40}}\right) = (2\,353{,}5;\ 2\,446{,}5)$$

c) Los intervalos obtenidos cubrirán, o no, el valor de la media poblacional μ. Se observa que cuanto mayor es $1 - \alpha$, mayor es la amplitud del intervalo y mayor es la probabilidad de que cubra el verdadero valor de μ.

d) El error máximo que se comete es el radio del intervalo de confianza: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$, despejando:

$$z_{\frac{0{,}15}{2}} = 1{,}44, \text{ ya que } p\left(Z \leqslant z_{\frac{0{,}15}{2}}\right) =$$

$$= 0{,}85 + \frac{0{,}15}{2} = 0{,}925$$

$$n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{s}}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}44 \cdot 150}{10}\right)^2 = 466{,}56, \text{ con}$$

una muestra de 467 o más cables nos aseguramos, con un nivel de confianza del 85 %, que el error máximo sea de 10 kg.