4 Programación lineal

1. Representa gráficamente el conjunto de puntos que determinan las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leqslant 85 \\ 2x + 3y \leqslant 200 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

2. Considera la región del plano determinada por el polígono de vértices: $A = (1, 1)$; $B = (0, 3)$; $C = (3, 5)$; $D = (6, 2)$; $E = (4, 0)$.

a) Representación gráfica de dicha región.

b) En la misma figura representa las rectas asociadas a la función objetivo $Z = 2x + y$.

c) ¿Dónde alcanza Z el máximo y el mínimo?

3. Encuentra el valor máximo de $f(x, y) = 10x + 15y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leqslant 6 \\ 3x + y \leqslant 9 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

4. Una persona tiene que tomar en su alimentación dos clases de componentes A y B. Necesita tomar 70 unidades de A y 120 de B.

Se le dan dos tipos de dieta en la que la concentración de dichos componentes es:

Dieta $D1$: 2 unidades de A y 3 unidades de B.

Dieta $D2$: 1 unidad de A y 2 unidades de B.

Sabiendo que el precio de $D1$ es 15 euros, y el de $D2$ es 9 euros, ¿cuál es la distribución óptima para el menor coste?

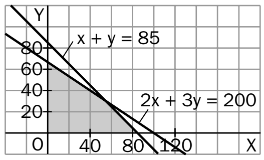
5. Una empresa de muebles posee tres madereras A, B y C. En ellas se corta madera a razón de 60 m^3, 45 m^3 y 30 m^3 por día, respectivamente. La madera se distribuye a dos fábricas M y N que necesitan 65 y 70 m^3. Los costes de transporte por m^3 desde las madereras a las fábricas son:

	a M	a N
Desde A	1,5	3
Desde B	3,5	2
Desde C	2,9	1,9

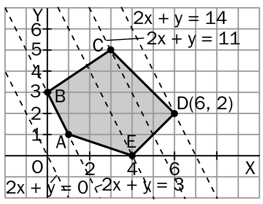
¿Cómo debe organizarse el transporte para que los gastos sean mínimos?

SOLUCIONES

1. $\begin{cases} x + y \leqslant 85 \\ 2x + 3y \leqslant 200 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$



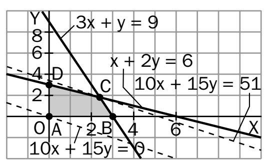
2. a) y b)



c) El máximo se alcanza en $D(6, 2)$ y vale 14. El mínimo se alcanza en cualquier punto del segmento $\overline{AB}$, y su valor es 3.

3. La región factible es:

R: $\begin{cases} x + 2y \leqslant 6 \\ 3x + y \leqslant 9 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$



Los valores de $f(x, y)$ en cada uno de los vértices son: $f(3, 0) = 30$; $f\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right) = 51$; $f(0, 3) = 45$, por lo que el valor máximo de $f(x, y)$ es 51 y se alcanza en $C\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

4. Se dispone la información dada en la tabla:

	A	B	PRECIO
*D*1	2	3	15
*D*2	1	2	9
Necesidades	70	120	

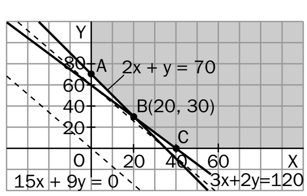
Se trata de minimizar la función de coste:

$C(x, y) = 15x + 9y$

Donde x e y son el número de dietas *D*1 y *D*2, respectivamente, que ha de adquirir.

$\begin{cases} 2x + y \geqslant 70 \\ 3x + 2y \geqslant 120 \\ x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0 \end{cases}$

La región factible no es acotada.



El coste mínimo se alcanza en el vértice *B*.

Conclusión: deberá adquirir 20 dietas de tipo *D*1 y 30 del tipo *D*2.

5. Suponiendo que de la maderera *A* se distribuyen x m^3 a *M*, de la maderera *B* y m^3 a *M*, entonces de *C* se llevarán $65 - (x + y)$ m^3 a *M*.

Por otra parte, si en *A* se producen 60 m^3 y se envían x a *M*, entonces se enviarán $60 - x$ a *N*.

Planteamos la tabla:

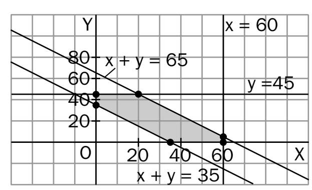
	a *M*	a *N*	Producción
Desde *A*	x	$60 - x$	60
Desde *B*	y	$45 - y$	45
Desde *C*	$65 -(x + y)$	$x + y - 35$	30
Demanda	65	70	

Se trata de minimizar la función de costes:

$C(x, y) = 1{,}5x + 3(60 - x) + 3{,}5y + 2(45 - y) +$
$+ 2{,}9[65 - (x + y)] + 1{,}9(x + y - 35) =$
$= 392 - 2{,}5x + 0{,}5y$

Sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0 \\ 65 - (x + y) \geqslant 0 \\ 60 - x \geqslant 0 \\ 45 - y \geqslant 0 \\ x + y - 35 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leqslant 65 \\ x \leqslant 60 \\ y \leqslant 45 \\ x + y \geqslant 35 \\ x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0 \end{cases}$$



La función objetivo toma valores:

$C_A(0, 35) = 409{,}5$; $C_B(0, 45) = 414{,}5$;
$C_C(20, 45) = 364{,}5$; $C_D(60, 5) = 244{,}5$;
$C_E(60, 0) = 242$; $C_F(35, 0) = 304{,}5$

El mínimo lo alcanza en el vértice *E* y asciende a 242 unidades monetarias, lo que significa que el transporte debe organizarse según la siguiente tabla:

	a *M*	a *N*
Desde *A*	60	0
Desde *B*	0	45
Desde *C*	5	25