7 Funciones derivables

1. Considera el triángulo que forman los ejes coordenados con la recta tangente a la curva $f(x) = xLx$ en el punto de abscisa $x = 1$.

a) ¿Qué tipo de triángulo es?

b) Halla su área.

2. Considera la función $f(x) = \begin{cases} e^x + a & \text{si } x \leqslant 0 \\ bx + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Halla el valor de a y de b sabiendo que la función es derivable en $x = 0$.

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ estudia su continuidad y su derivabilidad en la recta real y escribe su función derivada.

4. Considera la función definida de la siguiente manera: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2 + 1}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad.

b) Estudia su derivabilidad.

c) Escribe su función derivada.

d) ¿Es continua f' en $x = 1$?

5. Se tiene un recipiente metálico de forma cúbica de 10 cm de lado. Al calentar el recipiente, el lado experimenta una dilatación del 1 %.

a) Halla la tasa de variación absoluta (incremento) de su volumen.

b) Halla el valor de la diferencial en ese momento.

c) Halla el error cometido.

6. Considera la función $f(x) = x^2 - 3x$, calcula:

a) El incremento de la función en $x = 2$ para un incremento de la variable independiente de 0,02.

b) El valor de la diferencial y el error que se comete al estimar dicho incremento a través de la diferencial.

c) El punto de la gráfica de f en el cual la recta tangente tiene de pendiente 5.

7. Si se calienta un disco metálico, se observa que su radio, medido en cm, sufre un aumento en función de la temperatura que viene dado por la fórmula $r = 10 + 0{,}002t$, donde t representa la temperatura en °C.

a) ¿Cuál es la superficie del disco a 0 °C?

b) Escribe la expresión que da la superficie del disco en función de la temperatura.

c) Calcula el incremento del área cuando la temperatura pasa de 90 °C a 100 °C.

d) Calcula el valor de la diferencial del área en ese momento.

e) Halla el error que se comete al estimar la tasa de variación de la superficie del disco por medio de la diferencial.

f) ¿Cuánto ha aumentado la temperatura si teniendo el disco a 0 °C se le ha calentado y se ha observado que la superficie se ha incrementado 2 cm^2?

g) Estima este incremento de temperatura por medio de la diferencial.

8. Halla las tres primeras derivadas de la función $f(x) = L(x^2 + 1)$.

SOLUCIONES

1. Como $f'(x) = 1 + Lx$, $f'(1) = 1$, la recta tangente es $y = x - 1$ que corta a los ejes coordenados en $(1, 0)$ y $(0, -1)$

a) Es un triángulo rectángulo isósceles.

b) $A = \dfrac{1}{2}$ u^2

2. Si f es derivable en 0 es porque también es continua en dicho punto. Por ser continua en $x = 0$:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow e^0 + a = b \cdot 0 + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2$

Por ser derivable en $x = 0$:

$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow e^0 = b \Rightarrow b = 1$

3. En cada trozo de su dominio f es continua y derivable por ser en el primer caso polinómica y en el segundo exponencial. El problema está en $x = 0$.

En $x = 0$ la función es continua, pues $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^0$

En $x = 0$ la función es derivable, pues $f'(0^-) = -1 = f'(0^+) = -e^0$

Por tanto, f es continua y derivable en toda la recta real y su función derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ -e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

4. En cada trozo de su definición f es continua y derivable. El problema está en $x = 1$.

a) En $x = 1$ la función es continua, pues

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1+1}{4}$$

b) En $x = 1$ la función es derivable, pues

$$f'(1^-) = \frac{1}{2} = f'(1^+)$$

c) Por tanto, f es continua y derivable en toda la recta real. Su función derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leqslant 1 \\[2mm] \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

d) Sí, puesto que $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)$

5. El volumen del recipiente es $V(x) = x^3$, siendo x el lado, y su derivada es $V'(x) = 3x^2$

a) $V(10, 1) - V(10) = (10{,}1)^3 - 10^3 = 30{,}301$ cm^3

b) $dy = V'(10)dx = 300 \cdot 0{,}1 = 30$

c) $\Delta y - dy = 0{,}301$ cm^3

6. a) $f(2{,}02) - f(2) = 0{,}0204$

b) $dy = f'(2)dx = 1 \cdot 0{,}02 = 0{,}02$; el error es $\Delta y - dy = 0{,}0004$

c) $f'(x) = 2x - 3 = 5 \Rightarrow x = 4$

7. a) $r = 10 \Rightarrow S = 100\pi$ cm^2

b) La función que da la superficie del disco en función de la temperatura es: $S(t) = \pi(10 + 0{,}002t)^2$

c) $\Delta y = S(100) - S(90) = 1{,}28052$ cm^2

d) $dy = S'(90)dt = 0{,}127925 \cdot 10 = 1{,}27925$ cm^2

e) $\Delta y - dy = 0{,}00127$ cm^2

f) $\Delta y = S(t) - S(0) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow S(t) = \pi(10 + 0{,}002t)^2 = 2 + 100\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 15{,}894$ °C

g) $dy = S'(t) \cdot (t - 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 = 0{,}004\pi t(10 + 0{,}002t) \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 15{,}8649$ °C

8. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $f''(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$;

$$f'''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$